

En cada problema muestre explícitamente sus razonamientos.

Capítulo 6: Reglas de Derivación

Obtener la sexta derivada de la función $f(x) = (x^3 + 3x)^2$

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \Rightarrow f^{(n)}(x) = n! a_n ; f(x) = (x^3)^2 + 2(x^3)(3x) + (3x)^2 = x^6 + 6x^4 + 9x^2$$

$$\Rightarrow n = 6 \text{ y } a_6 = 1 \Rightarrow f^{(6)}(x) = 6! = 720$$

Capítulo 7: Razones de Cambio Relacionadas

Dada una esfera metálica de radio $r = 15$ cm, ¿con qué rapidez crece su volumen V en cm^3 por segundo, por calentamiento, si el radio aumenta en $1/100$ mm por segundo?

$$\begin{aligned} V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 &\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi (150 \text{ mm})^2 \frac{1}{100} \frac{\text{mm}}{\text{seg}} \\ &\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi \frac{225 \times 100}{100} \frac{\text{mm}^3}{\text{seg}} = 900\pi \frac{\text{mm}^3}{\text{seg}} \times \frac{\text{cm}^3}{1000 \text{ mm}^3} = 0.9\pi \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}} \approx 2.83 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}} \end{aligned}$$

Capítulo 8: Aplicaciones de la Derivada

¿En qué intervalos es creciente y decreciente la función $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x$? Empleando el criterio de la primera derivada determine sus valores extremos.

$$f'(x) = \frac{1}{12} \frac{d}{dx}(x^3 - x) = \frac{3}{12}x^2 - 1 = \frac{1}{4}x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ o } x = +2$$

$$x \in (-\infty, -2) \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 > 1 \Big|_{x=-3} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

$$x \in (-2, 2) \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 < 1 \Big|_{x=0, \pm 1} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente}$$

$$x \in (2, \infty) \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 > 1 \Big|_{x=+3} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

$$f(x) \uparrow \text{ en } (-\infty, -2) \text{ y } f(x) \downarrow \text{ en } (-2, 2) \Rightarrow (-2, f(-2)) = \left(-2, \frac{4}{3}\right) \text{ es máximo local}$$

$$f(x) \downarrow \text{ en } (-2, 2) \text{ y } f(x) \uparrow \text{ en } (2, \infty) \Rightarrow (2, f(2)) = \left(2, -\frac{4}{3}\right) \text{ es mínimo local}$$

Capítulo 9: Gráfica de una Función

Haga un bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{x^3}{1+x} \right)$ señalando sus puntos de inflexión e indicando los intervalos de concavidad o convexidad de la misma. Mediante el criterio de la segunda derivada determine sus valores extremos.

$$f'(x) = \frac{1}{5} \frac{d}{dx} \frac{x^3}{1+x} \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{x^3}{1+x} = \frac{3x^2(1+x) - x^3}{(1+x)^2} = \frac{x^2(3+2x)}{(1+x)^2} = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ o } x=-\frac{3}{2}$$

$$f'(-2 < -1.5) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow \text{ en } (-\infty, -1.5) ; f'(-1.25 > -1.5) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow \text{ en } (-1.5, -1) \\ \Rightarrow (-3/2, f(-3/2)) = (-1.5, 1.35) \text{ es un mínimo local, además } f(x) \uparrow \text{ en } (-1, \infty)$$

$$f''(x) = \frac{1}{5} \frac{d}{dx} \frac{3x^2 + 2x^3}{(1+x)^2} \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{3x^2 + 2x^3}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2(6x+6x^2) - 2(3x^2+2x^3)(1+x)}{(1+x)^4} \\ = \frac{(1+x)[(1+x)(6x+6x^2) - (6x^2+4x^3)]}{(1+x)^4} = \frac{6x+6x^2+6x^2+6x^3-6x^2-4x^3}{(1+x)^3} = \frac{2x(x^2+3x+3)}{(1+x)^3} \\ \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x=0 ; b^2 - 4ac = 9 - 4(1)(3) < 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow \frac{2x(x^2+3x+3)}{(1+x)^3} \Big|_{x=-2} = \frac{(<0)(>0)}{(<0)} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \cup \text{ (cóncava)}$$

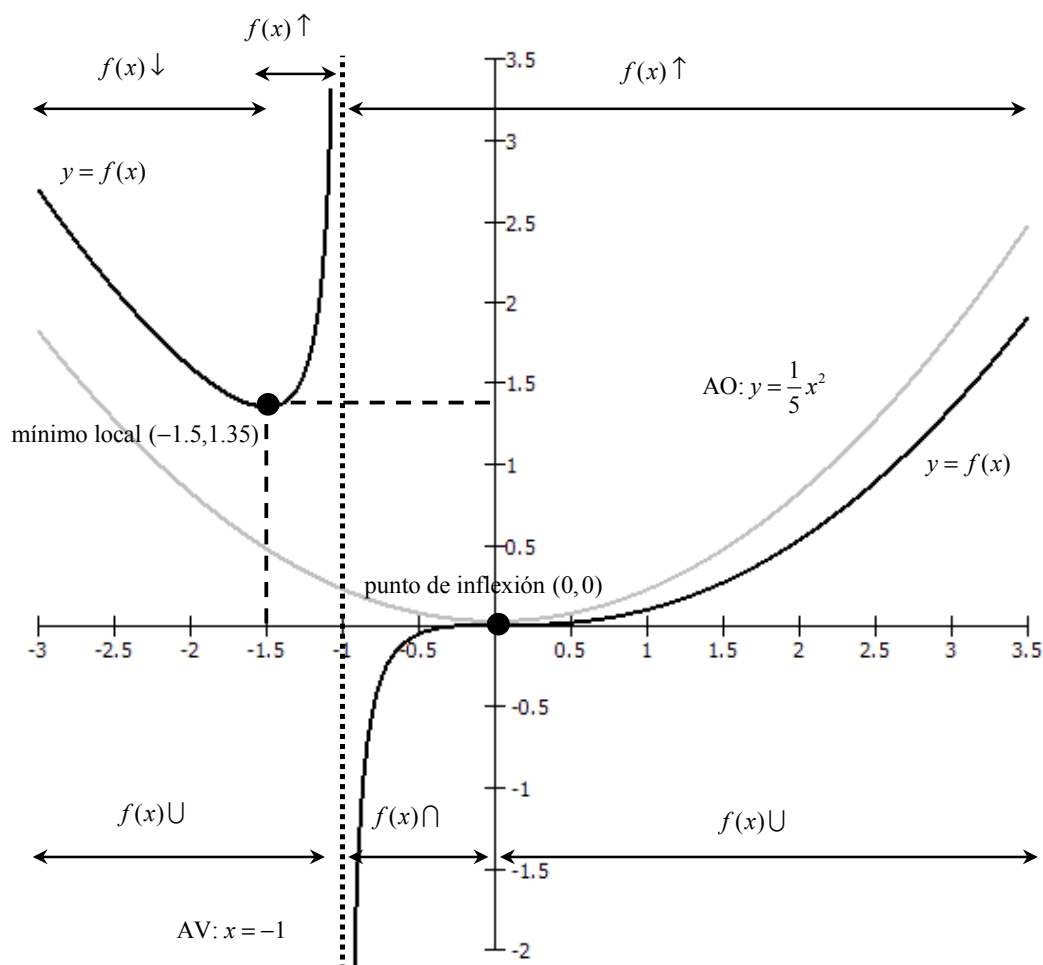
$$x \in (-1, 0) \Rightarrow \frac{2x(x^2+3x+3)}{(1+x)^3} \Big|_{x=-0.5} = \frac{(<0)(>0)}{(>0)} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \cap \text{ (convexa)}$$

$$x \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{2x(x^2+3x+3)}{(1+x)^3} \Big|_{x=1} = \frac{(>0)(>0)}{(>0)} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \cup \text{ (cóncava)}$$

$$\Rightarrow (0, f(0)) = (0, 0) \text{ es un punto de inflexión (el origen)}$$

$$\Rightarrow f''(-\frac{3}{2}) = \frac{2(-\frac{3}{2})((-\frac{3}{2})^2 + 3(-\frac{3}{2}) + 3)}{(1-\frac{3}{2})^3} = \frac{-3(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 3)}{(-\frac{1}{2})^3} = \frac{3(\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{12}{4})}{(\frac{1}{2})^3} > 0 \therefore \text{mínimo local}$$

hay una asíntota vertical (AV) en $x = -1$ ($-1 \notin D_f$); asíntota oblicua (AO) $\frac{1}{5}x^2 \Leftarrow x+1 \approx x \Leftrightarrow x \gg 0$
 $x \rightarrow -1^- \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$; $x \rightarrow -1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{5}x^2 = \infty$



Capítulo 10: Optimización

De todos los rectángulos de perímetro constante P ¿cuál es el de área máxima?

$$A = xy \quad ; \quad 2x + 2y = P \Rightarrow y = \frac{P}{2} - x$$

$$\Rightarrow A(x) = x\left(\frac{P}{2} - x\right) = \frac{P}{2}x - x^2 \Rightarrow A'(x) = \frac{P}{2} - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{P}{4}$$

$$\text{además, } A''(x) = -2 < 0 \quad \forall x \Rightarrow A(x) \cap \text{ y ocurre un máximo en } x_{\max} = \frac{P}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4} = x \text{ que corresponde a un cuadrado con } A_{\max} = x_{\max}^2 = \frac{P^2}{16}$$