CAPÍTULO

7

Razones de cambio relacionadas

la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto fijo x_0

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\Delta x = x - x_0 = h$$

incrementos de las variables y & x

incremento $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ cambio que tiene la variable y

incremento $\Delta x = x - x_0 = h$ cambio que tiene la variable x

razón de cambio
entre el cambio que tiene la variable y
& el cambio que tiene la variable x

razón que compara
el cambio de la variable y
con respecto al cambio de la variable x

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

razón que mide
el cambio promedio de la variable y
intervalo limitado por x_0 & $x_0 + \Delta x$

razón de cambio promedio
de la función $y = f(x)$ con respecto a x
intervalo con extremos x_0 & $x_0 + \Delta x$

al escribir $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nos estamos refiriendo a la razón de cambio promedio de la variable y cuando se consideran cambios cada vez más pequeños en x

con este límite se busca una <u>razón de cambio instantánea</u> de la variable y con respecto a la variable x

cuando hacemos que la longitud ($|\Delta x|$) del intervalo limitado por x_0 & $x_0 + \Delta x$ tienda a cero

"la razón de cambio promedio de y" se convierte en

"la razón de cambio instantánea de y" con respecto a x

En el caso particular en que la variable independiente es el tiempo t es usual referirse a la derivada como una <u>velocidad de cambio</u>

$$x = \phi(t) \text{ es la posición de un móvil en el instante de tiempo } t$$

$$\frac{dx}{dt} = \phi'(t) \text{ es la velocidad de cambio de la posición } x = \phi(t) \text{ en el instante de tiempo } t$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \phi'(t) \text{ es la velocidad instantánea del móvil}}$$

$$v = g(t) \text{ es la velocidad de un móvil en el instante de tiempo } t$$

$$\frac{dv}{dt} = g'(t) \text{ es la velocidad de cambio de la velocidad } v = g(t) \text{ en el instante de tiempo } t$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g'(t) \text{ es la aceleración instantánea del móvil}}$$

en el contexto de un problema, se tiene una función de la que queremos medir y obtener su razón de cambio (su derivada). Es muy problable que dicha función se encuentre relacionada con otras funciones cuyas derivadas se conozcan.

entonces se tiene un problema de razones de cambio relacionadas.

es de importancia tener claro

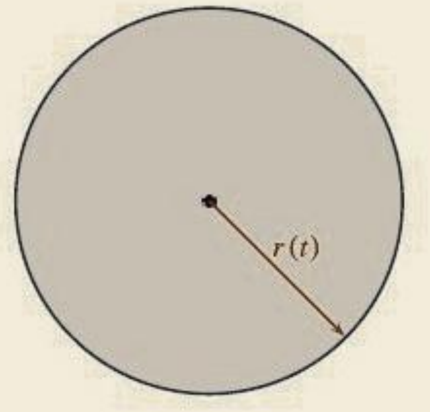
¿qué es lo que se sabe en el problema?
¿qué es lo que se pide en el problema?

La estrategia consiste en

1. encontrar una relación matemática donde se relacionen las funciones que aparezcan en el contexto del problema.
2. se deriva la expresión matemática y se obtiene una relación de funciones y razones de cambio (las que se conocen con las que no se conocen).
3. se despeja la razón de cambio deseada que estará en términos de las otras razones de cambio.

Ejemplo 7.1.1 *Al arrojar una piedra a un estanque de agua tranquila se forman ondas circulares concéntricas cuyos radios aumentan de longitud al paso del tiempo. Cuando la onda exterior tiene un radio de 3 m, éste aumenta a una rapidez (velocidad) de 50* **cm/s**. *¿A qué rapidez (velocidad) aumenta el área del círculo formado por dicha onda?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está aumentando el área de un círculo, cuando su radio mide 3 m y la longitud de éste aumenta a razón de 0.5 m/s. Es decir, si consideramos un círculo que (en cierto instante t) tiene un radio $r(t)$ y un área $A(t)$, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) el área $A(t)$, cuando el radio $r(t)$ es de 3 m y la razón de cambio del radio es de 0.5 m/s. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dA}{dt}$ cuando $r = 3$ y cuando $\dfrac{dr}{dt} = 0.5$.



El área del círculo es $A = \pi r^2$. La razón de cambio de A con respecto al tiempo t se obtiene derivando ambos miembros con respecto al tiempo:

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\pi\, r^2(t)\right] = 2\pi\, r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right)}$$

En el caso particular en que $\boxed{r(t) = 3\ \mathrm{m}\ \text{y}\ \frac{dr}{dt} = 0.5\ \mathrm{m/s}}$

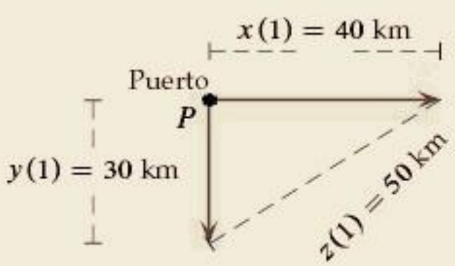
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right) = 2\pi(3\ \mathrm{m})(0.5\ \ \mathrm{m/s}) = 3\pi\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s} \;\Rightarrow\; \frac{dA}{dt} = 3\pi\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s} \approx 9.4248\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}\,.$$

Esto es, en el preciso instante en que el radio es de 3 m, éste tiene un cambio de 0.5 m/s y el área tiene un cambio de $3\pi\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s} \approx 9.4248\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

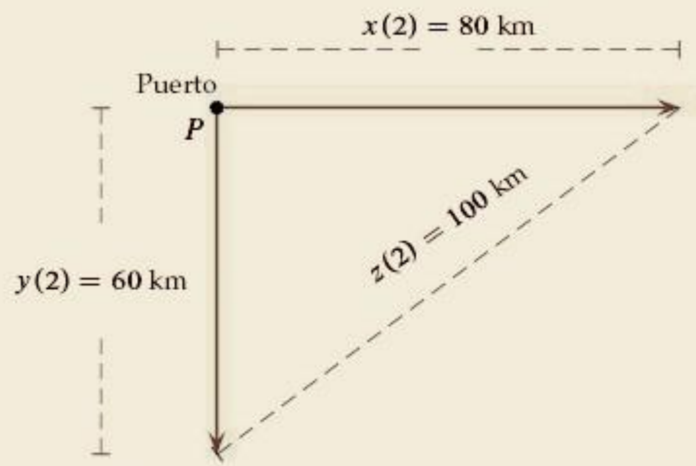
Ejemplo 7.1.3 *Dos barcos salen simultáneamente de un puerto; uno viaja hacia el sur a una velocidad de 30 km/h y el otro hacia el este a una velocidad de 40 km/h. Después de 2 h ¿cuál es la velocidad de separación de los dos barcos?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la velocidad a la que se están separando los barcos después de 2 h de haber partido del mismo puerto. Es decir, si consideramos que $z(t)$ es la distancia que separa a los barcos en cierto instante t, entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio) la distancia $z(t)$ al paso del tiempo. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dz}{dt}$ cuando el tiempo t transcurrido es de 2 h.

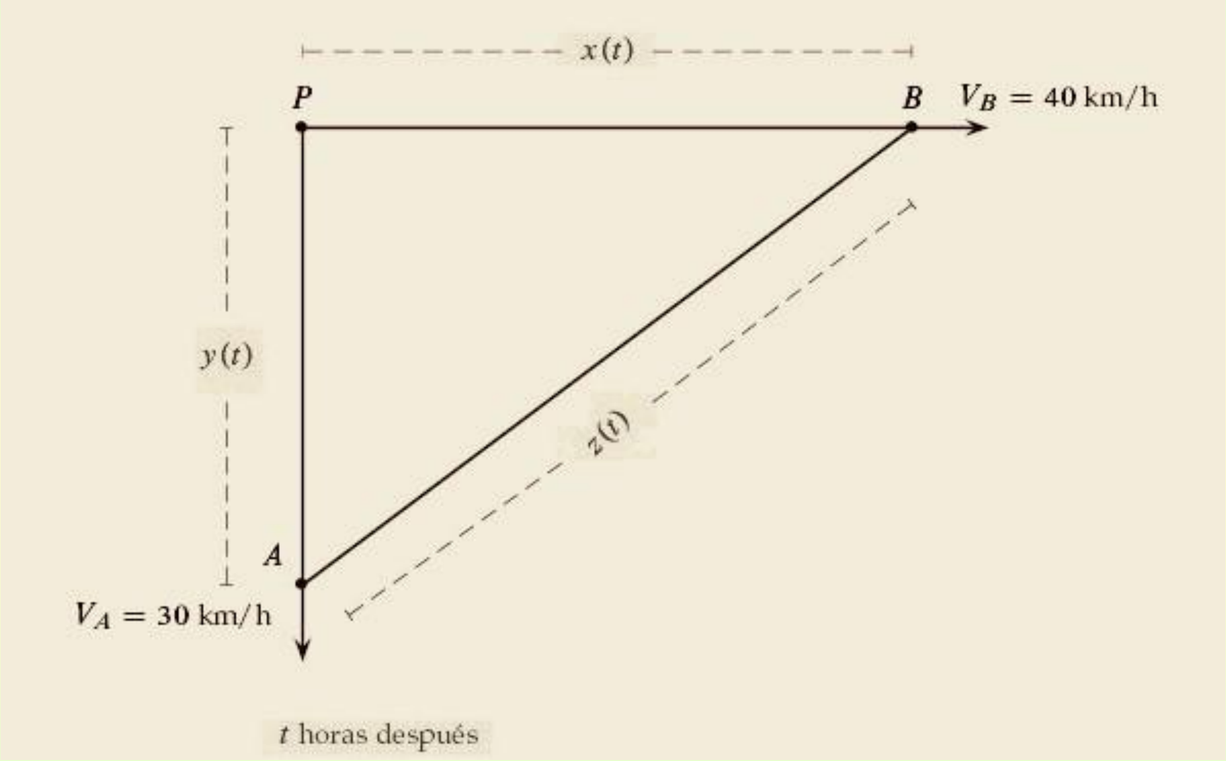
La posición de los barcos después de haber iniciado su desplazamiento es



Una hora después



Dos horas después


x(t)
P
B
VB = 40 km/h
y(t)
z(t)
A
VA = 30 km/h
t horas después

Si $x(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco B que se desplaza hacia el este, entonces

$$\boxed{x(t) = v_B \cdot t} = 40\,(\text{km/h}) \cdot t\ (\text{h}) = 40t\ (\text{km})\,.$$

y si $y(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco A que se desplaza hacia el sur, entonces

$$\boxed{y(t) = v_A \cdot t} = 30\,(\text{km/h}) \cdot t\ (h) = 30t\ (\text{km})\,.$$

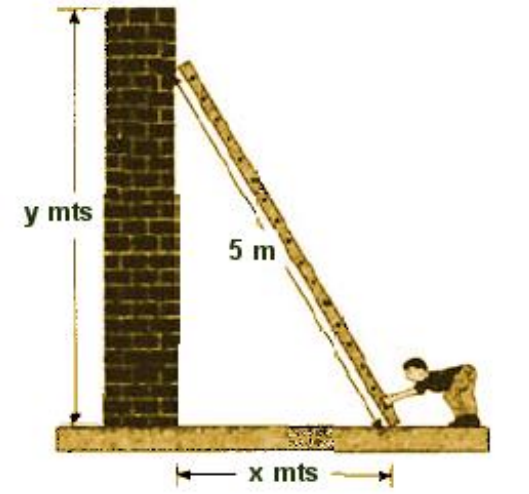
Luego, por el teorema de Pitágoras, la distancia z que separa a los dos barcos cumple con

$$\boxed{z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2} = (40t)^2 + (30t)^2 = 1\,600t^2 + 900t^2 = 2\,500t^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; z(t) = \sqrt{2\,500t^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; z(t) = 50t\ (\text{km}).$$

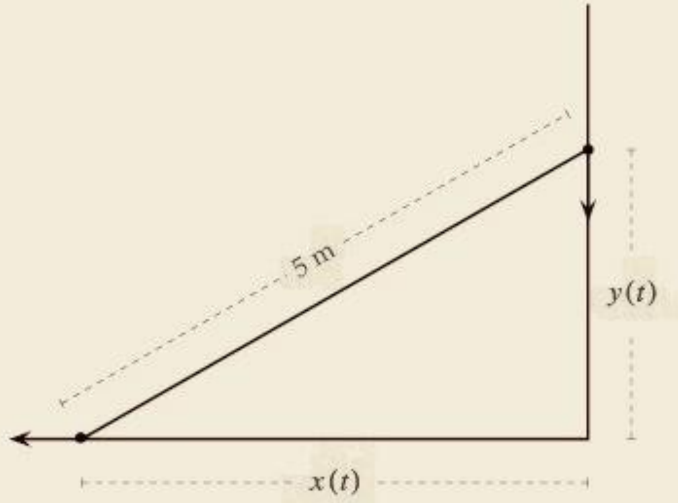
Así pues, la distancia $z(t)$ es la función lineal $z(t) = 50t$, por lo que su derivada es $\dfrac{dz}{dt} = 50$, que es una función constante. Esto es, en cualquier instante $t > 0$, los barcos se están separando a una velocidad constante $z'(t) = 50$ km/h. En particular, después de 2 h, $z'(2) = 50$ km/h.



Ejemplo 7.1.5 *Una escalera de 5 m de longitud descansa contra un muro perpendicular al suelo. Si el extremo inferior de la escalera se está resbalando a razón de 1.2 m/s, ¿a qué velocidad desciende el extremo superior cuando éste está a 3 m del suelo?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la velocidad a la que está disminuyendo la distancia que hay entre el extremo superior de la escalera y el piso, en el instante en que dicha distancia es de 3 m y la distancia que hay entre la pared y el extremo inferior de la escalera está aumentando a razón de 1.2 m/s. Es decir, si consideramos que (en cierto instante t) el extremo superior de la escalera se encuentra a una distancia $y(t)$ del piso y que $x(t)$ es la distancia que hay entre la pared y el extremo inferior de la escalera, entonces lo que se desea es calcular la volocidad con que cambia (razón de cambio) la distancia $y(t)$, cuando la velocidad de cambio de la distancia $x(t)$ es de 1.2 m/s. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $\dfrac{dx}{dt} = 1.2$ m/s, en el preciso instante en que $y(t) = 3$. [El signo positivo en la razón de cambio de la distancia $x(t)$ se debe a que dicha longitud está aumentando].

Consideramos el triángulo rectángulo que tiene catetos de longitudes $y(t)$ (distancia entre el extremo superior de la escalera y el piso); $x(t)$ (distancia entre el extremo inferior de la escalera y la pared) e hipotenusa de longitud $z = 5$ (longitud de la escalera).



Por el teorema de Pitágoras se cumple que

$$\boxed{y^2(t) + x^2(t) = 5^2 = 25}$$

$y(t)$ & $x(t)$ dependen del tiempo t

Derivando implícitamente con respecto a t se obtiene

$$\boxed{2y(t)\left(\frac{dy}{dt}\right) + 2x(t)\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0\,,}$$

de donde, para cualquier instante t, mientras $y(t) > 0$ se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x(t)}{y(t)}\left(\frac{dx}{dt}\right)\,.$$

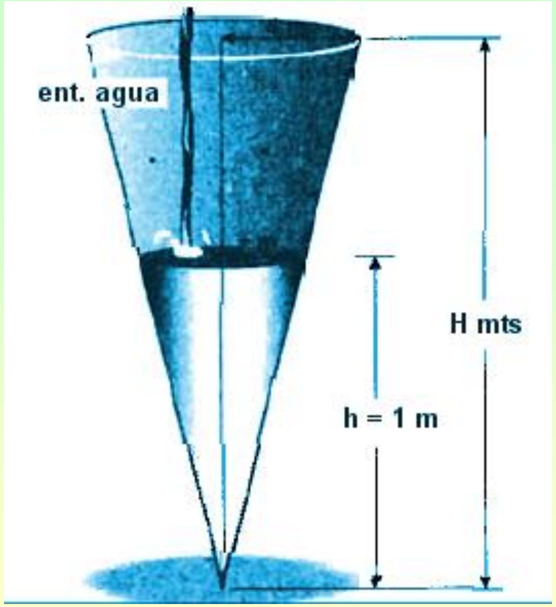
En el instante t_0 en que $\boxed{y(t_0) = 3\text{ m:}}$

$$3^2 + x^2(t_0) = 25 \;\Rightarrow\; \boxed{x(t_0) = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4\,\text{m.}}$$

Y debido a que $\boxed{\frac{dx}{dt} = 1.2\text{ m/s,}}$ obtenemos que, en ese instante t_0:

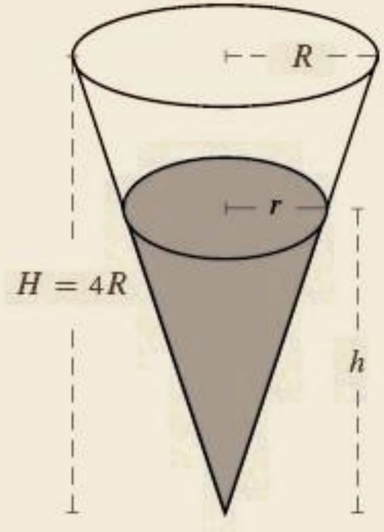
$$\frac{dy}{dt} = \left[-\frac{x(t_0)}{y(t_0)}\right]\frac{dx}{dt} = \left(-\frac{4}{3}\right)1.2 = -1.6 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = -1.6\,\text{m/s}\,.$$

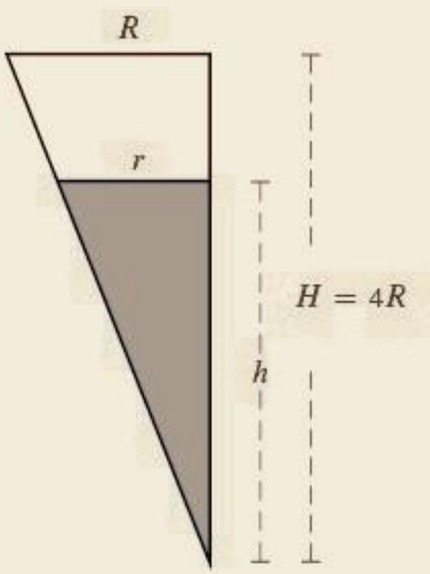
El signo negativo del resultado indica que la distancia $y(t)$ del extremo superior de la escalera al piso disminuye o decrece a razón de 1.6 m/s.



Ejemplo 7.1.6 *Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. Al recipiente le está entrando agua a una rapidez constante, por lo que la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de* 1 *m, la superficie sube a razón de* 1 *cm por minuto. ¿A qué rapidez le está entrando agua al recipiente?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez a la que está aumentando el volumen del cono limitado por la superficie del agua, cuando la altura del mismo cono es de 1 m y aumenta a razón de 1 cm/min. Es decir si consideramos el cono circular recto formado por el agua que tiene un radio r, una altura h y un volumen V, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) el volumen V, cuando la razón de cambio de la altura h es de 1 cm/min y $h = 1$ m. Esto es, se pide calcular a la derivada $\dfrac{dV}{dt}$ cuando $\dfrac{dh}{dt} = 1$ cm/min y cuando $h = 100$ cm.





El volumen V de un cono circular recto de radio r y de altura h es

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h .$$

Como la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro, por la semejanza de los triángulos mostrados se cumple que:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{R}{4R} \Rightarrow r = \frac{h}{4},$$

y el volumen es

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48}h^3 .$$

Ya que tanto la altura como el volumen son funciones del tiempo t , derivamos respecto a t y obtenemos

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48}3h^2\left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16}h^2\left(\frac{dh}{dt}\right)}$$

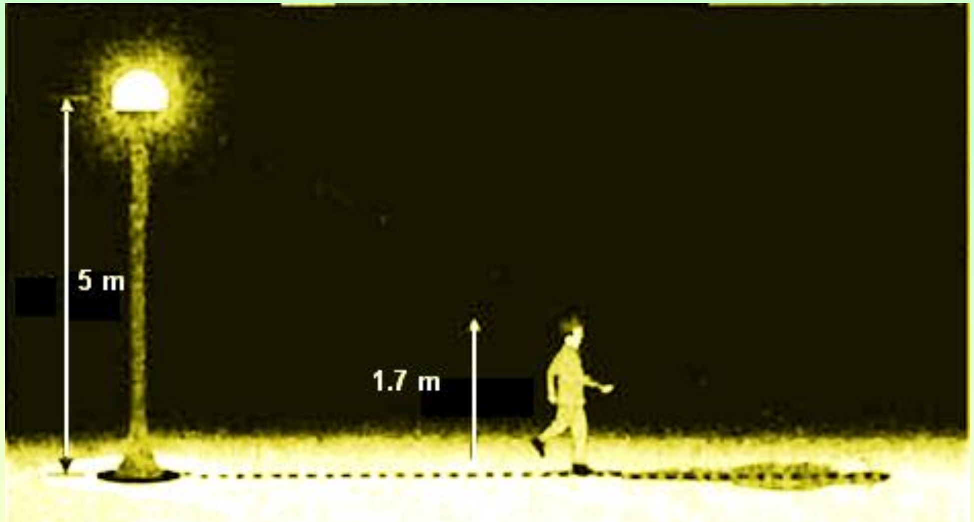
En el instante en que $\boxed{h = 100\,\text{cm}} = 10\,\text{dm}$ y $\boxed{\frac{dh}{dt} = 1\,\text{cm}/\text{min}} = 0.1\,\text{dm}/\text{min}$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{16}h^2\left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16}(10\,\text{dm})^2(0.1\,\text{dm}/\text{min}) = \frac{10\pi}{16}\,\text{dm}^3/\text{min} = \frac{5\pi}{8}\,dm^3/\text{min}.$$

Por lo tanto, la rapidez con que entra el agua al recipiente es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{5\pi}{8}\ell/\text{m} \approx 1.963\ell/\text{min}$$

pues $1\ell = 1\,\text{dm}^3$.

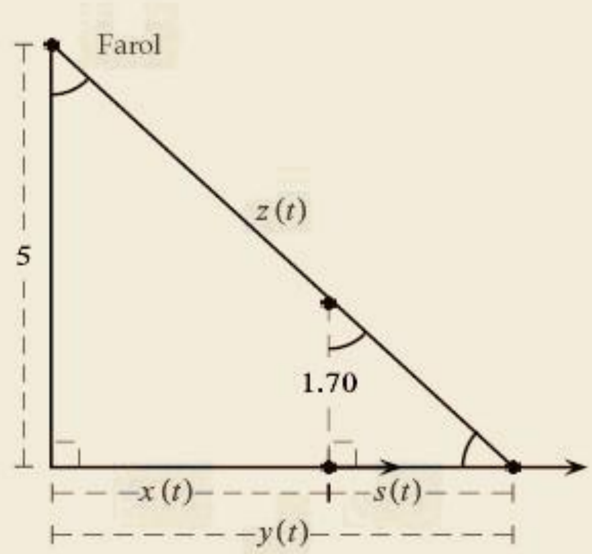


Ejemplo 7.1.7 *Un poste de 5 m de altura tiene un farol en la parte superior; un hombre de 1.70 m de estatura se aleja del poste caminando a una velocidad de 1.2 m/s. Cuando la distancia de la base del poste a la punta (parte más alejada) de la sombra del hombre es de* 6 *m, ¿con qué velocidad crece su sombra?; ¿con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol?*

- ¿Qué se pide en la primera pregunta?

  Se pide calcular la velocidad a la que está creciendo la sombra proyectada por el hombre, a medida que éste se aleja del poste. Es decir, se desea conocer la velocidad a la que crece la longitud $s(t)$ de la sombra, cuando se conoce la velocidad a la que aumenta la distancia $x(t)$ del hombre a la base del poste, así como la distancia $x(t) + s(t)$ desde la base del poste hasta la punta de la sombra. Esto es, se quiere conocer la razón de cambio $\dfrac{ds}{dt}$ a sabiendas de que $\dfrac{dx}{dt} = 1.2\,\text{m/s}$ y de que $x(t) + s(t) = 6\,\text{m}$.

Es importante notar que, a partir de los pies del hombre, se miden dos longitudes en el piso: su distancia $x(t)$ a la base del poste y la longitud $s(t)$ de su sombra.



Construimos dos triángulos rectángulos semejantes (uno dentro del otro) con un vértice común ubicado en la punta más alejada de la sombra. El triángulo grande con vértices en la base del poste y en farol; el triángulo pequeño con vértices en los pies y en la cabeza del hombre. El triángulo grande tiene un cateto de longitud 5 m y el otro de longitud $y(t) = x(t) + s(t)$; el triángulo pequeño tiene un cateto de longitud 1.70 m y el otro de longitud $s(t)$.

Por la semejanza de los triángulos rectángulos ocurre que $\dfrac{s(t)}{1.70} = \dfrac{y(t)}{5}$; por lo cual

$$5\,s(t) = 1.7\,y(t) \;\Rightarrow\; 5\,s(t) = 1.7[x(t) + s(t)] \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 5\,s(t) - 1.7\,s(t) = 1.7\,x(t) \;\Rightarrow\; 3.3\,s(t) = 1.7\,x(t) \;\Rightarrow\; s(t) = 0.\overline{51}\,x(t)\,.$$

Derivando con respecto a t se obtiene

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = 0.\overline{51}\left(\frac{dx}{dt}\right)}\,.$$

Considerando que $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = 1.2\,\mathrm{m/s}}$, se tiene que $\dfrac{ds}{dt} = (0.\overline{51})(1.2\,\mathrm{m/s}) = 0.6\overline{18}\,\mathrm{m/s}$.

Luego, en cualquier instante, la sombra crece a razón (constante) de $0.618\,\mathrm{m/s}$, no importando la distancia a la que se encuentre el hombre del poste. En particular, $\dfrac{ds}{dt} = (0.\overline{51})(1.2\,\mathrm{m/s}) = 0.6\overline{18}\,\mathrm{m/s}$ en el instante t_0 en que $y(t_0) = 6$ m.

- ¿Qué se pide en la segunda pregunta?

  Se pide calcular la velocidad a la que está creciendo la distancia que hay entre la luz y la punta de la sombra. Es decir, se desea conocer la velocidad a la que crece la longitud $z(t)$ de la hipotenusa del triángulo grande, cuando se conocen la velocidad a la que aumenta la distancia $x(t)$ del hombre al poste, la velocidad a la que aumenta la longitud $s(t)$ de la sombra proyectada por el hombre, así como la distancia $y(t) = x(t) + s(t)$ desde la base del poste hasta la punta de la sombra.

  Esto es, se quiere conocer la razón de cambio $\dfrac{dz}{dt}$ a sabiendas de que

  $\dfrac{dx}{dt} = 1.2$ m/s, que $\dfrac{ds}{dt} = 0.6\overline{18}$ m/s y que $y = 6$ m.

Por el teorema de Pitágoras:

$$z(t)^2 = y(t)^2 + 5^2 \;\Rightarrow\; z(t) = \sqrt{y(t)^2 + 25} = [y(t)^2 + 25]^{1/2}\,.$$

Derivando respecto a t

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\frac{d}{dt}[x(t)+s(t)] \;\Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{ds}{dt}\right)}\,.$$

Sustituyendo los valores particulares $\boxed{y = 6\text{ m},\ \frac{dx}{dt} = 1.2\text{ m/s y } \frac{ds}{dt} = 0.6\overline{18}\text{ m/s},}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6}{\sqrt{6^2+25}}(1.2 + 0.6\overline{18}) = \frac{6(1.\overline{81})}{\sqrt{61}} \approx 1.3968 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} \approx 1.4\,\text{m/s}\,.$$

Ejemplo 7.1.8 *La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T en grados (kelvin) y la presión P (en atmósferas) con un volumen V (en litros), es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante de los gases. Suponga que en cierto instante $P = 8$ atm y que aumenta a razón de 0.10 atm/min, además $V = 10\,\ell$ y disminuye a razón de 0.15 ℓ/min. Determinar la razón de cambio de T con respecto al tiempo, en ese preciso instante, si $n = 10$ mol.*

▼ ¿Qué se desea en el problema? Se desea determinar la razón de cambio de la temperatura T con respecto al tiempo t. Esto es, se quiere calcular la rapidez de cambio de la temperatura en el preciso instante en que la presión es de 8 atm, y aumenta a razón de 0.10 atm/min y además el volumen es de 10 ℓ y disminuye a razón de 0.15 ℓ/min. Más concretamente, se quiere calcular la velocidad de cambio de la temperatura $\dfrac{dT}{dt}$ en el preciso instante en que $P = 8$ atm, $\dfrac{dP}{dt} = 0.10$ atm/min, $V = 10\,\ell$ y $\dfrac{dV}{dt} = -0.15\,\ell/\text{min}$.

Ya que $PV = nRT$, $R = 0.0821$ y que $n = 10$ mol, entonces en cualquier instante t tenemos

$$\boxed{PV = 10(0.0821)T = 0.821\,T\,,}$$

donde P, V y T son funciones del tiempo t.

Derivando con respecto a t en $PV = 0.821\,T$:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(PV) = 0.821\left(\frac{dT}{dt}\right)} \Rightarrow P\left(\frac{dV}{dt}\right) + V\left(\frac{dP}{dt}\right) = 0.821\left(\frac{dT}{dt}\right).$$

Despejando $\dfrac{dT}{dt}$ y sustituyendo valores obtenemos:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{0.821}\boxed{\left[P\left(\frac{dV}{dt}\right) + V\left(\frac{dP}{dt}\right)\right]} = \frac{1}{0.821}\left[(8)(-0.15) + (10)(0.10)\right] = \frac{-0.2}{0.821} \approx -0.24.$$

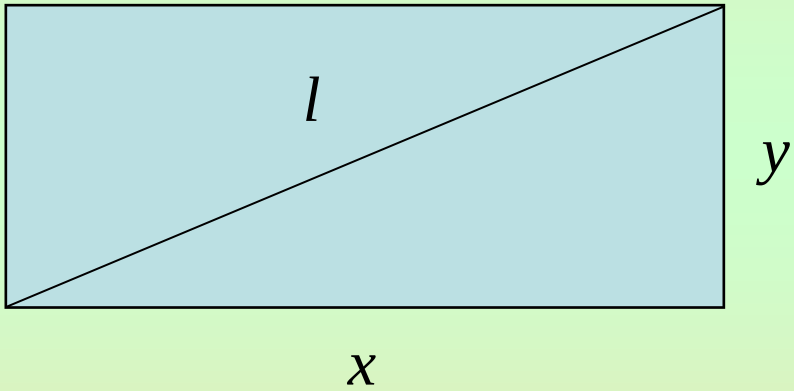
Por lo tanto, la velocidad de cambio de la temperatura es $\dfrac{dT}{dt} = -0.24$ grados kelvin/min. Esto es, la temperatura disminuye 0.24 grados kelvin cada minuto.

Ejercicios 7.1.1

2. Sea ℓ la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes x & y respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de $\frac{1}{2}$ m/s y si y disminuye con una rapidez de $\frac{1}{4}$ m/s:

   a. ¿A qué razón está cambiando la longitud de la diagonal cuando $x = 3$ m & $y = 4$ m?

   b. ¿La diagonal está aumentando o disminuyendo en ese instante?



$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= +\frac{1}{2}\ \text{m/s} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{4}\ \text{m/s} \end{aligned}}$$

$a)\quad \left.\dfrac{dl}{dt}\right|_{x=3,y=4} = ?$

$b)\quad \dfrac{dl}{dt} > 0 \quad \text{o} \quad \dfrac{dl}{dt} < 0$

$$\boxed{l^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad 2l\frac{dl}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dl}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

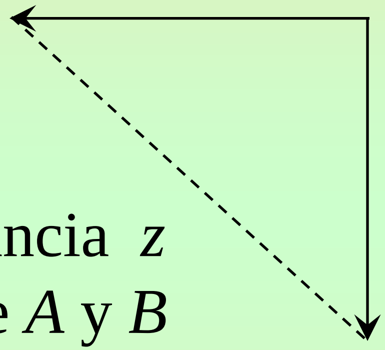
$$a) \quad \left.\frac{dl}{dt}\right|_{x=3,y=4} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3\;\frac{1}{2}\;+4\;-\frac{1}{4}}{\sqrt{9+16}} = \frac{\frac{3}{2}-1}{5} = \frac{1}{10}\ \text{m/s}$$

$$b) \quad \text{de } a) \quad \frac{dl}{dt} = \frac{1}{10} > 0 \ \text{ i.e. la diagonal aumenta}$$

Ejercicios 7.1.1

4. Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto con velocidad constante. Uno viaja hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia al oeste a 25 km/h ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles 2 h más tarde?

A oeste, x



B sur, y

distancia z
entre A y B

$$v_A = \frac{dx}{dt} = 25 \text{ km/h}$$
$$v_B = \frac{dy}{dt} = 60 \text{ km/h}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$s(t) = vt$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = ?$$

$$\boxed{z^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \boxed{\frac{x(t)v_A + y(t)v_B}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{v_A^2 t + v_B^2 t}{\sqrt{v_A^2 t^2 + v_B^2 t^2}} = \frac{v_A^2 + v_B^2}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \sqrt{25^2 + 60^2} = \sqrt{625 + 3600} = \sqrt{4225} = 65$$

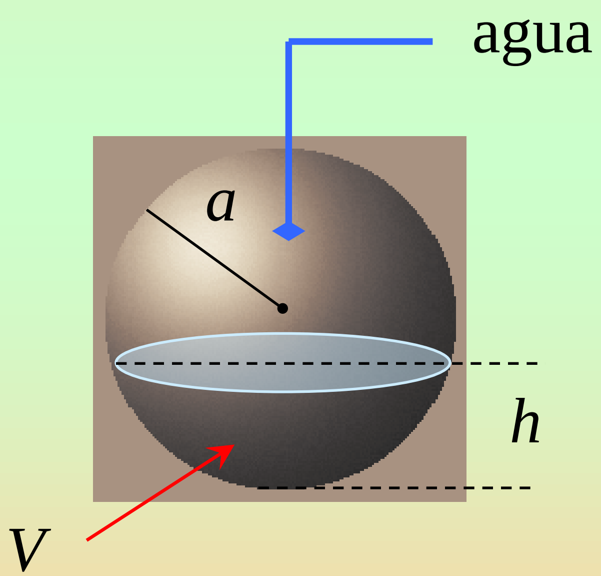
en particular, $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = 65 \text{ km/h}$

Ejercicios 7.1.1

7. Cuando un tanque esférico de radio a contiene líquido con una profundidad h, el volumen de este líquido está dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h).$$

Suponga ahora que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando de agua a razón de $\frac{20}{3}$ ℓ/s. Calcule la razón de cambio del nivel de agua cuando $h = 1.25$ m ($1\,\ell = 1\,\mathrm{dm}^3$).



$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h)}$$

$$a = 5\text{ m} \quad ; \quad \frac{dV}{dt} = \frac{20}{3}\text{ l/s} \quad ; \quad h = 1.25\text{ m}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1.25} = ?$$

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\pi h^2(3a-h)=\pi\left(ah^2-\frac{h^3}{3}\right)}$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\pi\left(ah^2-\frac{h^3}{3}\right)=\pi\left(2ah\frac{dh}{dt}-h^2\frac{dh}{dt}\right)$$

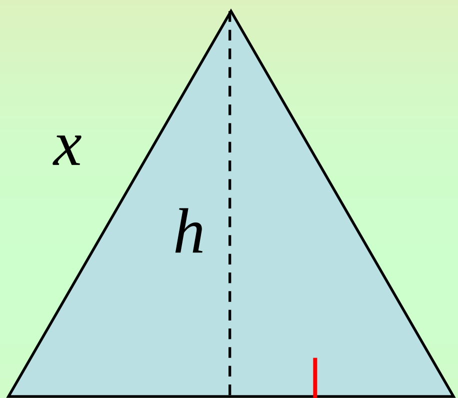
$$\Rightarrow\quad \frac{dV}{dt}=\pi h\;\;2a-h\;\;\frac{dh}{dt} \qquad\qquad \Rightarrow\quad \frac{dh}{dt}=\frac{\frac{dV}{dt}}{\pi h\;\;2a-h}$$

$$\Rightarrow\quad \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1.25}=\frac{20/3\quad \mathrm{ltr/s}}{1.25\pi\;\;2\times 5-1.25\quad \mathrm{m}^2}=\frac{0.02/3\quad \mathrm{m^3/s}}{1.25\pi\;\;8.75\quad \mathrm{m}^2}$$

$$=\frac{0.02\quad \mathrm{m}}{32.8125\pi\;\;\mathrm{s}}\approx 0.002\,\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{s}}$$

Ejercicios 7.1.1

10. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿Cuál es la razón de crecimiento del área en el instante en que el valor de ésta es $\sqrt{75}$ cm^2?



$y = x/2$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}}$$

$$y = \frac{x}{2} \quad ; \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = x^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{A=\sqrt{75}} = ?$$

$$A = 2\left(\frac{1}{2}yh\right) = \frac{x}{2}\frac{\sqrt{3}x}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2}$$

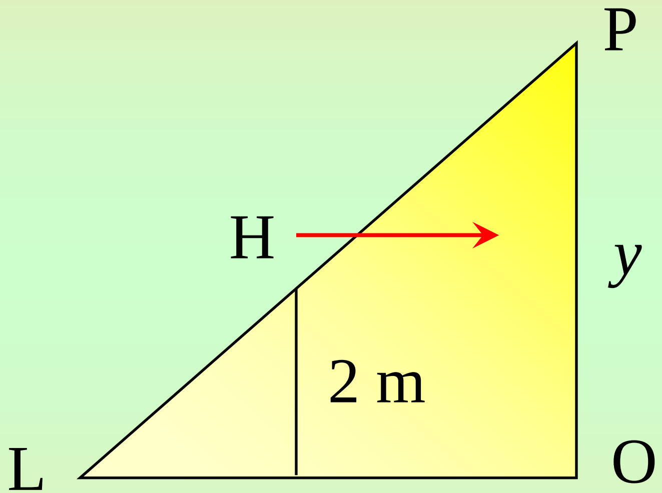
si $\quad A = \sqrt{75} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{75} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ de donde $\quad x^2 = 4\sqrt{\frac{75}{3}} = 20$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x\frac{dx}{dt}}$$

así $\quad \left.\frac{dA}{dt}\right|_{A=\sqrt{75}} = \left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}2\sqrt{5}(2) = 2\sqrt{15} \approx 7.75 \ \frac{\text{cm}^2}{\text{h}}$

Ejercicios 7.1.1

14. Una lámpara proyectora situada sobre el piso ilumina una pared que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de alto camina desde la lámpara hacia la pared a una velocidad de 1.6 m/s ¿con qué rapidez decrece su sombra proyectada sobre la pared cuando se encuentra a 4 m de ésta?



$$\underbrace{(s-x) \quad x}$$

$$(s-x)+x = 12 \text{ m}$$

por triángulos semejantes

$$\frac{y}{s} = \frac{2}{s-x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2s}{s-x}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = -1.6 \text{ m/s}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=4} = ?$$

$$\frac{y}{s} = \frac{2}{s-x} \quad \Rightarrow \quad y(s-x) = 2s \quad \Rightarrow \quad \boxed{sy - xy = 2s}$$

$$s\frac{dy}{dt} - \left[x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{s-x}\frac{dx}{dt} = \frac{2s}{(s-x)^2}\frac{dx}{dt}$$

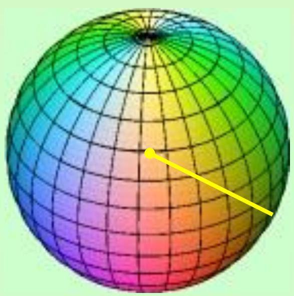
$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=4} = \frac{2(12)}{(12-4)^2}(-1.6) = -\frac{24}{64}\left(\frac{8}{5}\right) = -\frac{3}{5} = -0.6 \ \text{ m/s}$$

Ejercicios 7.1.1

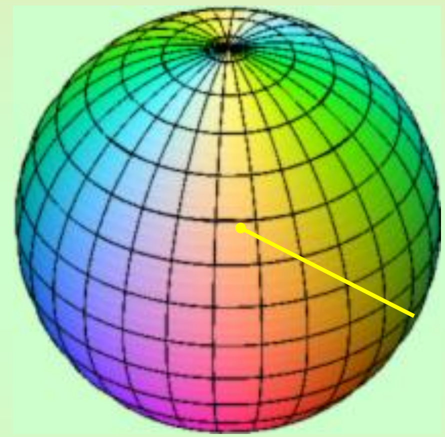
15. El radio de una esfera se incrementa a razón de 2 cm/s.

   a. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio mide $r = 5$ cm?

   b. ¿Cuál es la medida del radio cuando la razón de cambio del volumen es 512 cm³/s?



$$\boxed{\frac{dr}{dt} = 2\ \text{cm/s}}$$



$r = 5\ \text{cm}$

$$a)\quad \left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=5} = ?$$

$$b)\quad \text{si}\quad \frac{dV}{dt} = 512\ \text{cm}^3/\text{s} \quad \Rightarrow \quad r = ?$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3r^2)\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

$$a) \quad \left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=5} = 4\pi(5^2)(2) = 200\pi \approx 628.32 \ \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$\text{como} \quad \boxed{\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi\frac{dr}{dt}} = \frac{512}{8\pi} = \frac{64}{\pi}\ \text{cm}^2$$

$$b) \quad r = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \approx 4.51 \ \text{cm}$$

Planteamiento general del *problema de razones de cambio relacionadas*:

Dada una función g de z, a su vez función del tiempo, como función ψ de x e y, también funciones del tiempo y que son las variables relacionadas con z, se requiere determinar la *rapidez de variación de z*. Como hipótesis se conoce, en cierto instante de tiempo, los valores de x e y, así como sus respectivas velocidades instantáneas.

Matemáticamente, dada

$$g(z) = f(x, y) \quad ; \quad z = \psi(x, y) \quad ; \quad x, y, z \ \text{ funciones de } \ t$$

o equivalentemente

$$g(z(t)) = f(x(t), y(t)) \quad ; \quad z(t) = \psi(x(t), y(t))$$

hallar $z'(t)$

$$g(z) = f(x,y) \quad ; \quad z = \psi(x,y) \quad ; \quad x,y,z \text{ funciones de } t$$

$$\frac{d}{dt}g(z) = \frac{d}{dt}f(x,y)$$

$$\frac{dg}{dz}\frac{dz}{dt} = \varphi\left(x,y,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\varphi\left(x,y,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)}{\left.\frac{dg}{dz}\right|_{z=\psi(x,y)}}}$$

notación de *Leibniz-Bernoulli*

“**cociente de diferenciales**”

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Jakob Bernoulli
(1654-1705)

Johann Bernoulli
(1667-1748)

$$\boxed{g(z(t)) = f(x(t), y(t)) \quad ; \quad z(t) = \psi(x(t), y(t))}$$

$$[g(z(t))]' = [f(x(t), y(t))]'$$

$$g'(z(t))z'(t) = \varphi(x(t), y(t), x'(t), y'(t))$$

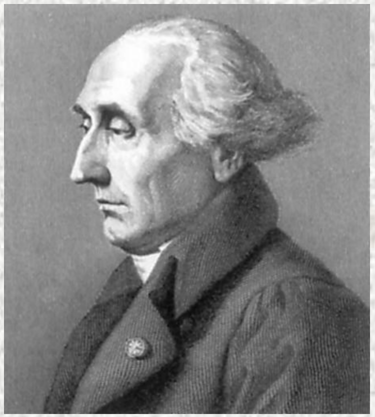
$$z'(t) = \frac{\varphi(x(t), y(t), x'(t), y'(t))}{g'(z(t))}$$

$$\boxed{z'(t) = \frac{\varphi(x(t), y(t), x'(t), y'(t))}{g'(\psi(x(t), y(t)))}}$$

notación de *Euler-Lagrange*

"**funcional prima**"

Leonhard Euler
(1707-1783)



Joseph Louis Lagrange
(1736-1813)

$$g(z) = f(x, y) \quad ; \quad z = \psi(x, y) \quad ; \quad x, y, z \ \text{funciones de} \ \ t$$

$$D_t g(z) = D_t f(x, y)$$

$$D_z g D_t z = \varphi(x, y, D_t x, D_t y)$$

$$\boxed{D_t z = \frac{\varphi(x, y, D_t x, D_t y)}{D_z g\big|_{z=\psi(x,y)}}}$$

notación de *Cauchy*

“operador diferencial”

Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

Ejercicios 7.1.1 *Razones de cambio relacionadas*

Problemas del texto sugeridos a resolver

1. $\approx 679 \dfrac{\text{m}^2}{\text{min}}$.

3. $2\pi r(t) h \dfrac{dr(t)}{dt}$.

5. ≈ 111.2411 km/h.

6.
   a. -750 millas/h;
   b. $\dfrac{1}{3}$ hora.

8. ≈ 433 millas/h.

9. ≈ 13.856406 cm^2/h.

11. $-\dfrac{1}{7} \dfrac{\text{pies}^3}{s}$.

12. 35.7 cm^3/min.

13. $\dfrac{10}{3}$ pie/s .

16. ≈ 0.0235 cm/s.

17. $\dfrac{20}{\pi}$ pies/min.

18. 6 000 millas/h.