CAPÍTULO

8

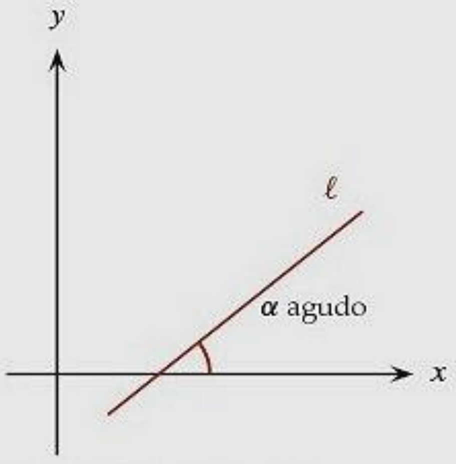
Aplicaciones de la derivada

Derivabilidad y monotonía

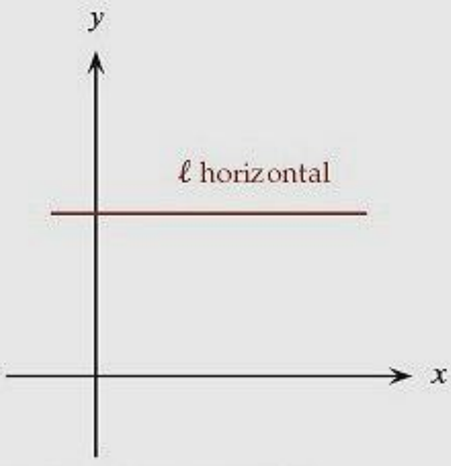
si f es una función derivable en x_0, entonces la derivada de f en x_0 es un número real fijo $f'(x_0)$, el cual puede ser $f'(x_0) > 0$ o bien $f'(x_0) < 0$, o bien $f'(x_0) = 0$

si f es una función derivable en x_0, entonces existe una única recta tangente t a la curva $y = f(x)$ en el punto $P[x_0, f(x_0)]$, la cual tiene pendiente $m_t = f'(x_0)$

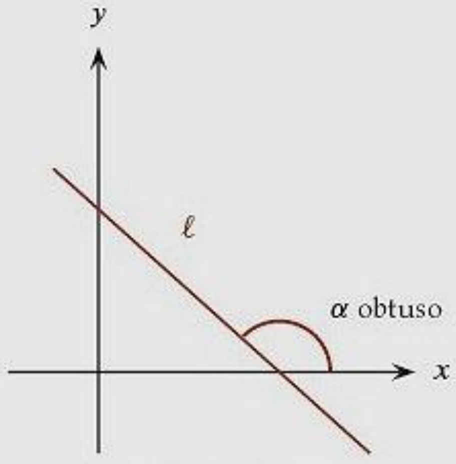
Recordemos ahora que, si l es una recta con ángulo de inclinación α y pendiente m, entonces $m = \tan\alpha$



$m > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 90°$



$m = 0$ si $\alpha = 0°$ o bien $\alpha = 180°$



$m < 0 \Leftrightarrow 90° < \alpha < 180°$

$$\boxed{f'(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; m_t > 0 \;\Rightarrow\; 0° < \alpha_t < 90° \; (\alpha_t \text{ es agudo })}$$

Además si $f'(x_0) > 0$, entonces $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0 \;\&\; \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, entonces existe $x_1 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_0$ tal que para cada $x \in [x_1, x_0)$ ocurre que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$; pero $x_1 \leq x < x_0 \Rightarrow x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$, por lo que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0)$$

para x suficientemente cerca de x_0

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow x < x_0 \;\&\; f(x) < f(x_0)}$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, entonces existe $x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_0 < x_2$ tal que para cada $x \in (x_0, x_2]$

ocurre que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$; pero $x_0 < x \leq x_2 \Rightarrow x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$, por lo que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0)$$

para x suficientemente cerca de x_0

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow x > x_0 \;\&\; f(x) > f(x_0)}$$

Resumiendo, si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$, entonces

existen x_1 & x_2 con $x_1 < x_0 < x_2$ tales que $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$

$$\boxed{f'(x_0) < 0 \ \Rightarrow \ m_t < 0 \ \Rightarrow \ 90^\circ < \alpha_t < 180^\circ \ (\alpha_t \text{ es obtuso})}$$

Si $f'(x_0) < 0$, entonces $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0 \ \& \ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, entonces existe $x_1 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_0$ tal que para cada $x \in [x_1, x_0)$ ocurre que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, pero $x_1 \leq x < x_0 \Rightarrow x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$, por lo que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0)$$

para x suficientemente cerca de x_0

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow x < x_0 \;\&\; f(x) > f(x_0)}$$

Si $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, entonces existe $x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_0 < x_2$, tal que para cada $x \in (x_0, x_2]$

ocurre que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, pero $x_0 < x \leq x_2 \Rightarrow x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$, por lo que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0)$$

para x suficientemente cerca de x_0

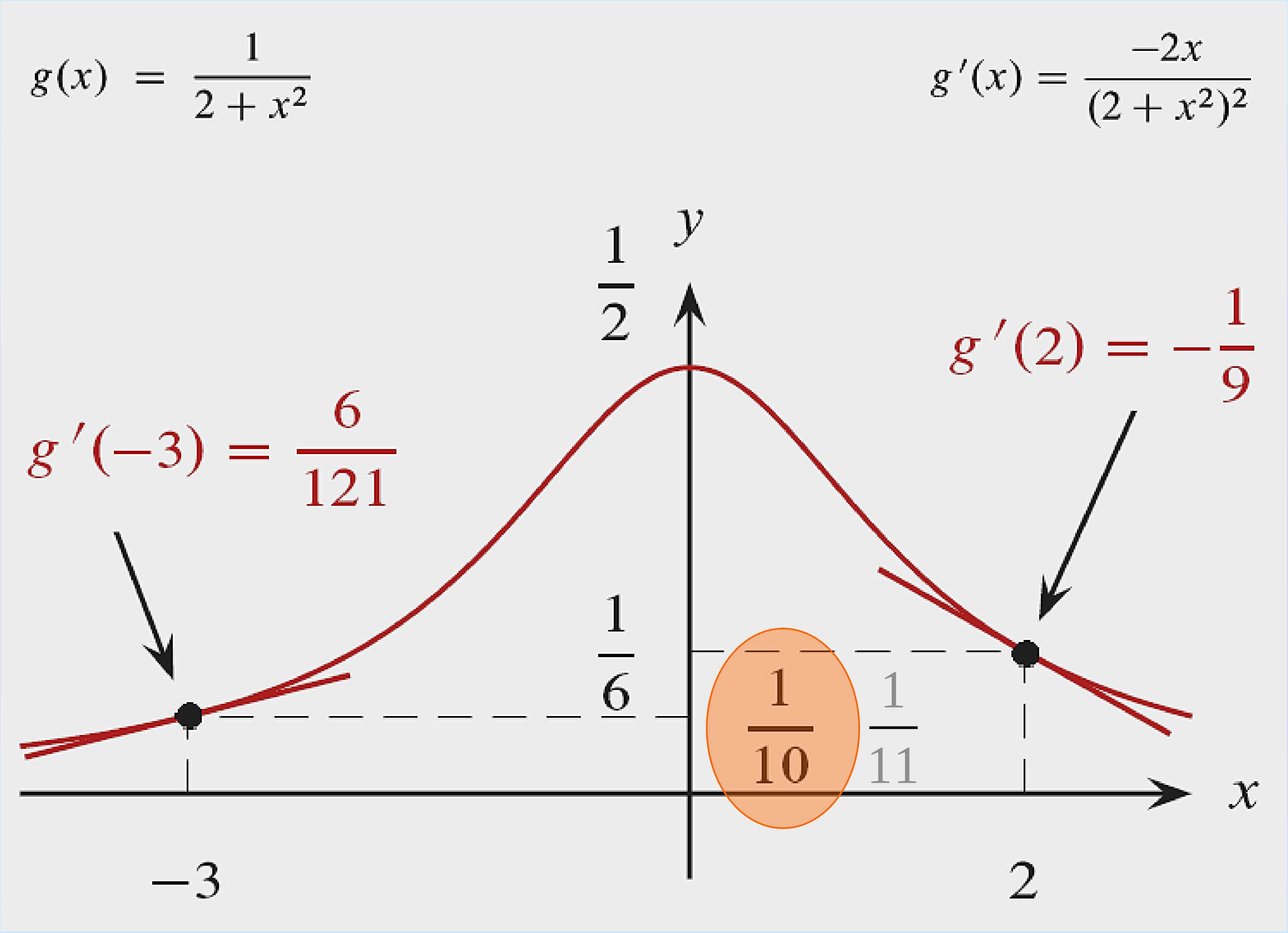
$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow x > x_0 \;\&\; f(x) < f(x_0)}$$

Resumiendo, si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0$, entonces

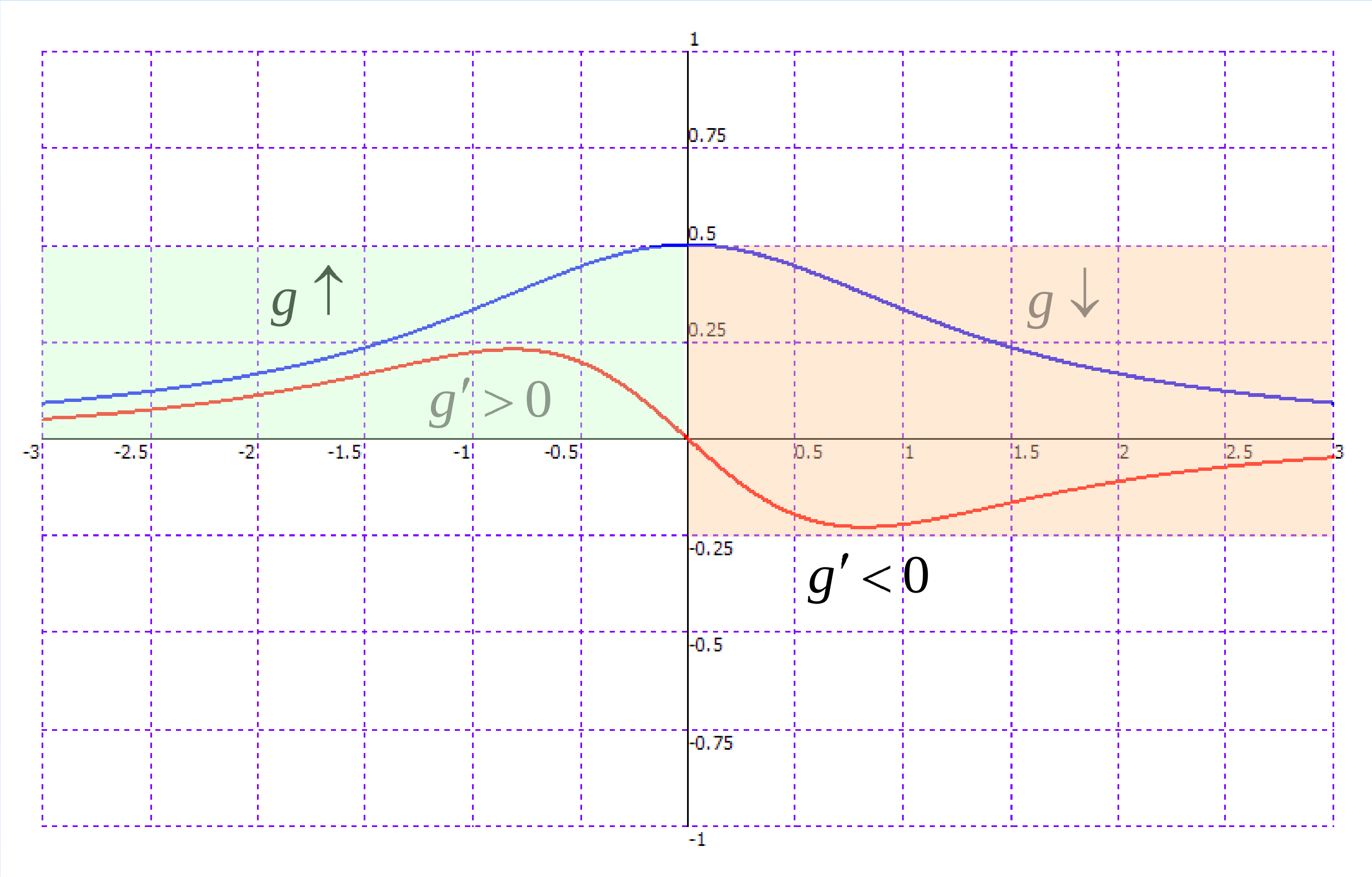
existen x_1 & x_2 con $x_1 < x_0 < x_2$ tales que $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$

Teorema. Sea una función derivable en el número x_0. Si $f'(x_0) \neq 0$, entonces existen números x_1 & x_2 alrededor de x_0 y suficientemente cerca de x_0 tales que:

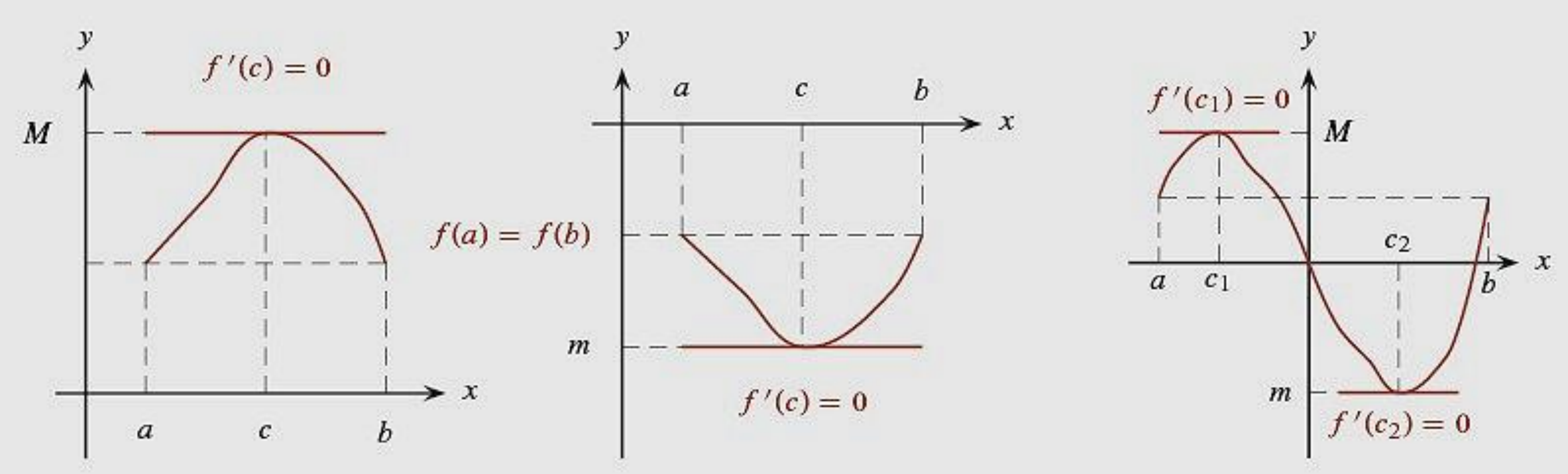
- Si $f'(x_0) > 0$, entonces $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$
- Si $f'(x_0) < 0$, entonces $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$



$g(x) = \frac{1}{2+x^2}$
$g'(x) = \frac{-2x}{(2+x^2)^2}$
y
$\frac{1}{2}$
$g'(2) = -\frac{1}{9}$
$g'(-3) = \frac{6}{121}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{11}$
x
-3
2



1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$g\uparrow$
$g\downarrow$
$g'>0$
$g'<0$



Teorema de Rolle.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

▼ Si $f(x) = f(a) = f(b)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces f es una función constante en todo $[a,b]$, por lo cual $f'(x) = 0$ para cada $x \in [a,b]$, en cuyo caso c es cualquier $x \in (a,b)$

Si f no es una función constante en $[a,b]$, entonces por ser continua f alcanza en $[a,b]$ sus valores mínimo $m = f(c)$ y máximo $M = f(d)$, donde al menos uno de ellos es diferente de $f(a) = f(b)$

Aquí se entiende que $f(c) = m \leq f(x) \leq M = f(d)$ para $x \in [a,b]$

Suponiendo que el mínimo $m = f(c)$ es dicho número, entonces $c \in (a,b)$. Por ser f derivable en (a,b), se puede asegurar la existencia del número $f'(c)$

Demostraremos que $f'(c) = 0$ por reducción al absurdo

Si $f'(c) \neq 0$, se podría asegurar por el teorema anterior la existencia de números x_1 & x_2 cerca de c tales que

- Si $f'(c) > 0$, entonces $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$
- Si $f'(c) < 0$, entonces $f(x_1) > f(c) > f(x_2)$

Por lo cual $f(c) = m$ no sería el mínimo de f en $[a, b]$

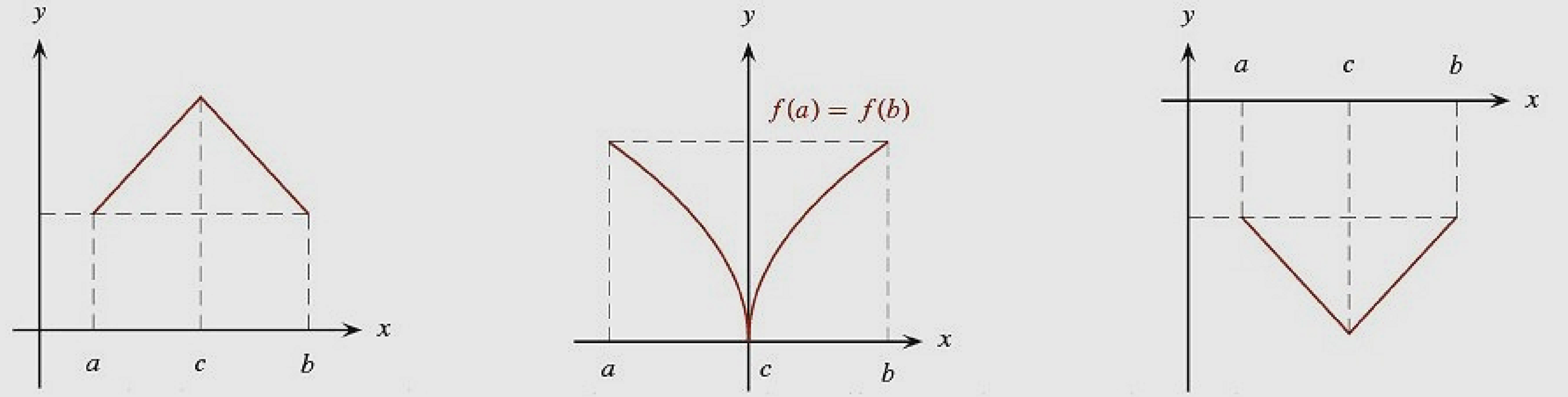
Entonces $f'(c) \neq 0$ no puede ser

Lo que asegura la existencia de al menos un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

Por lo tanto el teorema de Rolle asegura la existencia de al menos un punto $P[c, f(c)]$ en la curva $y = f(x)$ donde la recta tangente es horizontal [$f'(c) = 0$].

Es importante resaltar que la derivabilidad de la función f en todo el intervalo (a, b) es determinante para la existencia de dicha recta tangente horizontal.

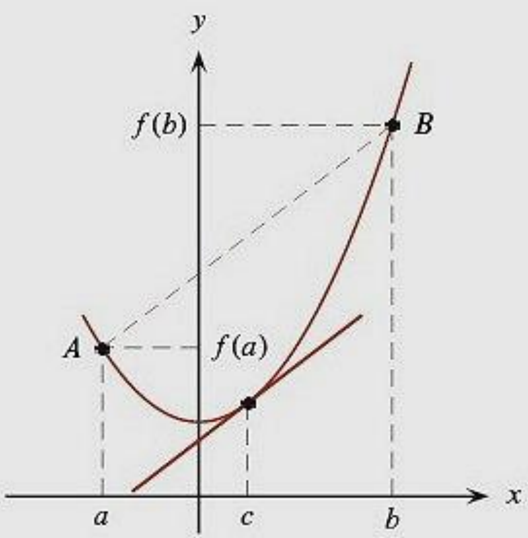
Basta con que f no sea derivable en algún punto del intervalo (a, b) para que pueda ocurrir una situación como las siguientes, en donde no se cumple el teorema de Rolle.

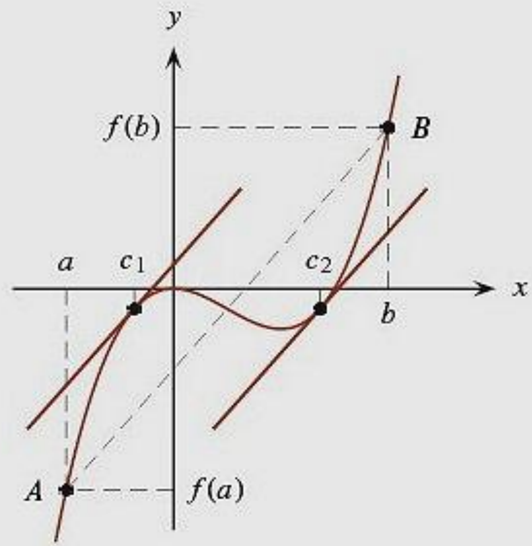


Teorema del Valor Medio. Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ o bien } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Geométricamente este teorema asegura la existencia de al menos un punto $P[c, f(c)]$ de la curva $y = f(x)$, donde su recta tangente tiene pendiente $f'(c)$ igual a la pendiente $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ de la recta secante a la curva que pasa por los puntos $A[a, f(a)]$ y $B[b, f(b)]$





- La ecuación de la recta secante $y = g(x)$ que pasa por los puntos $A[a, f(a)]$ y $B[b, f(b)]$ es

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Sea ϕ la función definida como la diferencia $f - g$

$$\phi(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Por ser f & g funciones continuas, también la función ϕ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
Por ser f & g funciones derivables, también la función ϕ es derivable en el intervalo abierto (a, b)

$$\phi'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por otra parte $\phi(a) = \phi(b)$, ya que

$$\phi(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$\phi(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

ϕ es una función que cumple con las condiciones del teorema de Rolle. Por lo tanto se asegura la existencia de al menos un número c tal que $\phi'(c) = 0$. Pero

$$\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\phi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Aplicamos a continuación este último teorema para el estudio de la monotonía de una función derivable en un intervalo.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b), y sean x_1, x_2 en $[a, b]$ tales que $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

Si $f'(x) > 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces (por el teorema del Valor Medio) para algún $c \in (x_1, x_2)$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

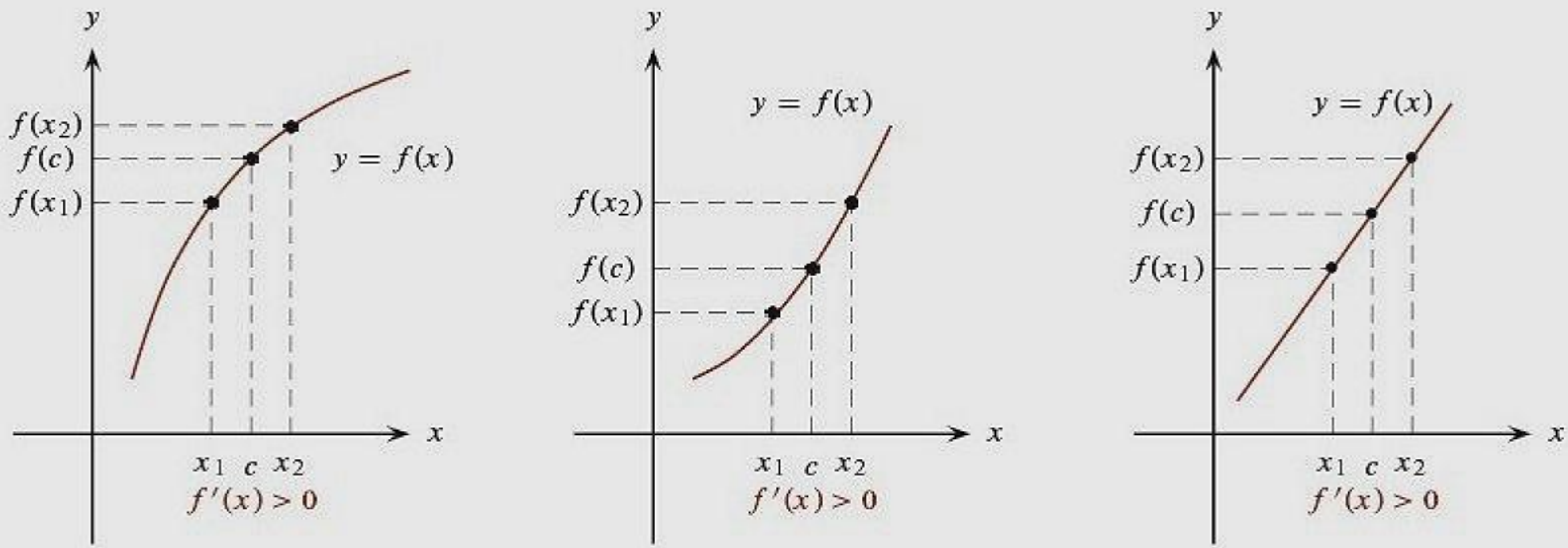
Pero $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, por lo cual

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Entonces $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f es una función estrictamente creciente en el intervalo $[a, b]$

Si $f'(x) > 0$, entonces la función f es estrictamente creciente



Aplicamos a continuación este último teorema para el estudio de la monotonía de una función derivable en un intervalo.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b), y sean x_1, x_2 en $[a,b]$ tales que $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

Si $f'(x) < 0$, para cada $x \in (a,b)$ entonces (por el teorema del Valor Medio) para algún $c \in (x_1, x_2)$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

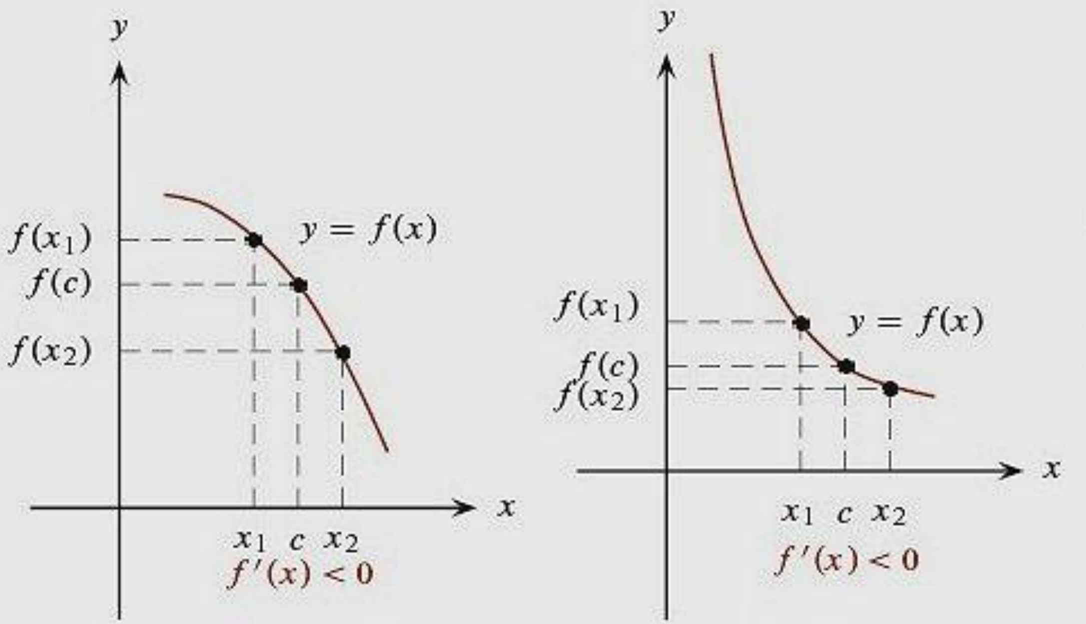
Pero $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, por lo cual

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Entonces $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

f es una función estrictamente decreciente en el intervalo $[a,b]$

Si $f'(x) < 0$, entonces la función f es estrictamente decreciente



Una función que es *creciente* o *decreciente* en un intervalo, se dice que es *monótona* en dicho intervalo. La *función f* o la *función derivada f '* tiene un número finito n de raíces si existen números x_i en (a,b) para los cuales $f(x_i) = 0$ o $f'(x_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$

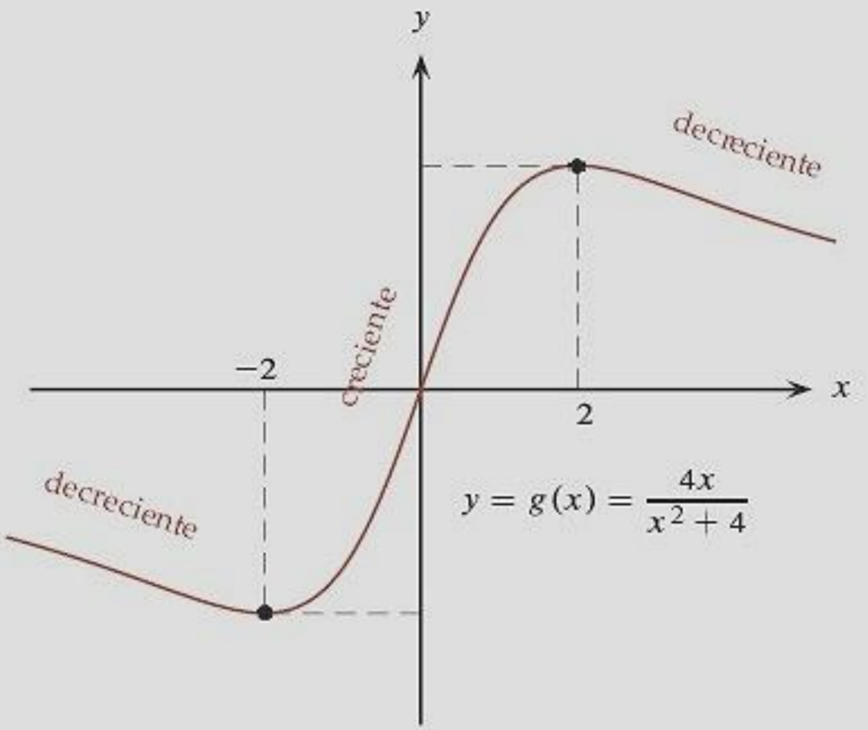
Si f está definida en un intervalo y f' es continua con un número finito de raíces entonces f es monótona por partes.

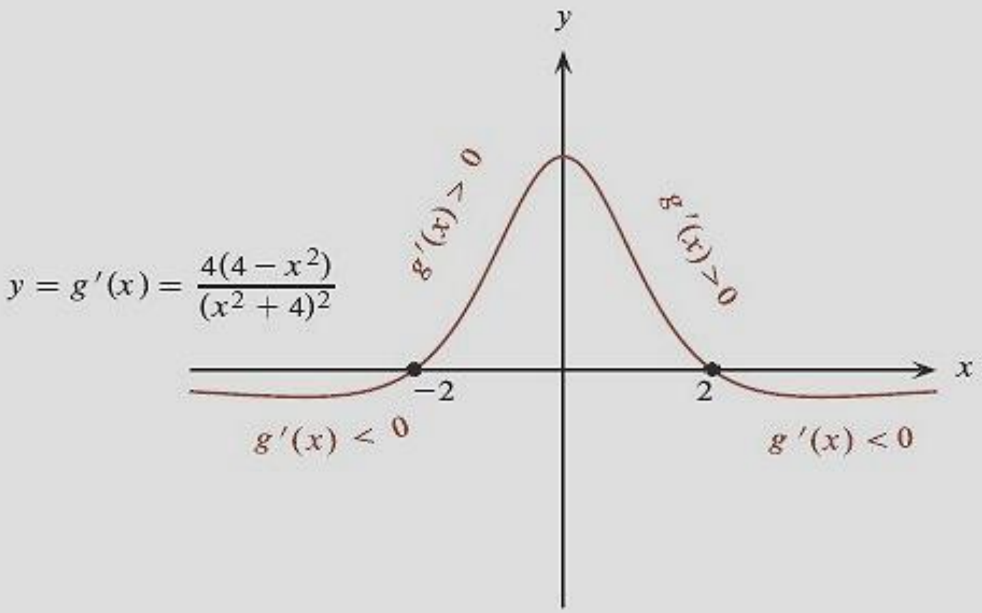
Las funciones polinomiales y las racionales son monótonas por partes

Ejemplo 8.1.2 *Dada la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

▼

$$g'(x) = \frac{(x^2+4)4 - 4x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$$





Puesto que $4 > 0$ y que $(x^2 + 4) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$

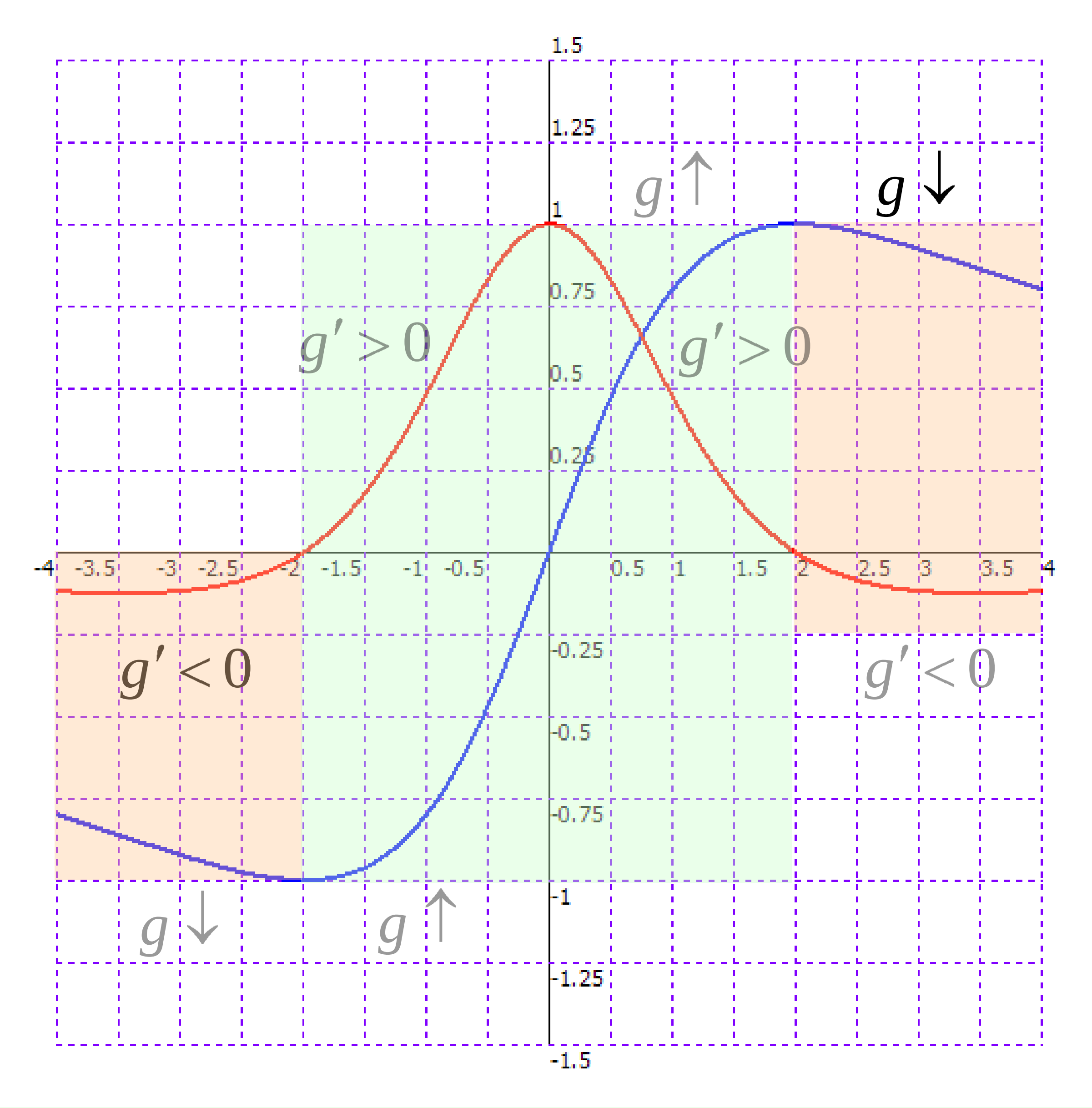
$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

$$\Leftrightarrow g \text{ es creciente en el intervalo } (-2, 2)$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ o bien } x > 2$$

$$\Leftrightarrow g \text{ es decreciente en } (-\infty, -2) \text{ y en } (2, +\infty)$$

Lo cual concuerda con que $g'(x)$ es par



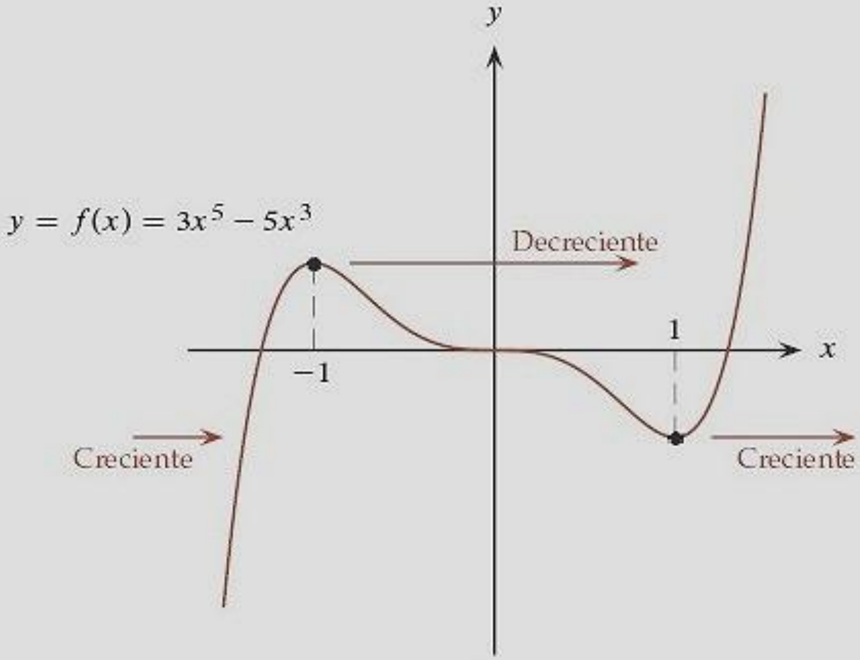
$g \uparrow$
$g \downarrow$
$g' > 0$
$g' > 0$
$g' < 0$
$g' < 0$
$g \downarrow$
$g \uparrow$

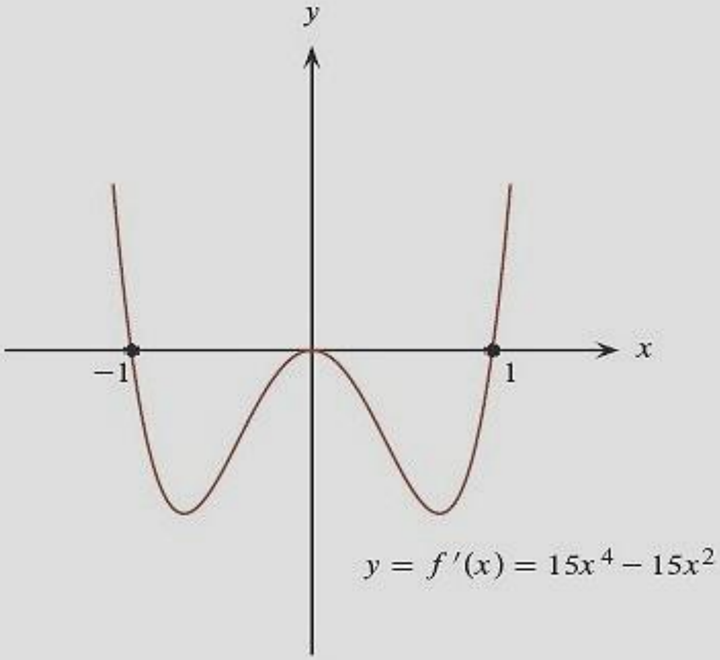
Ejemplo 8.1.4 *Sea la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

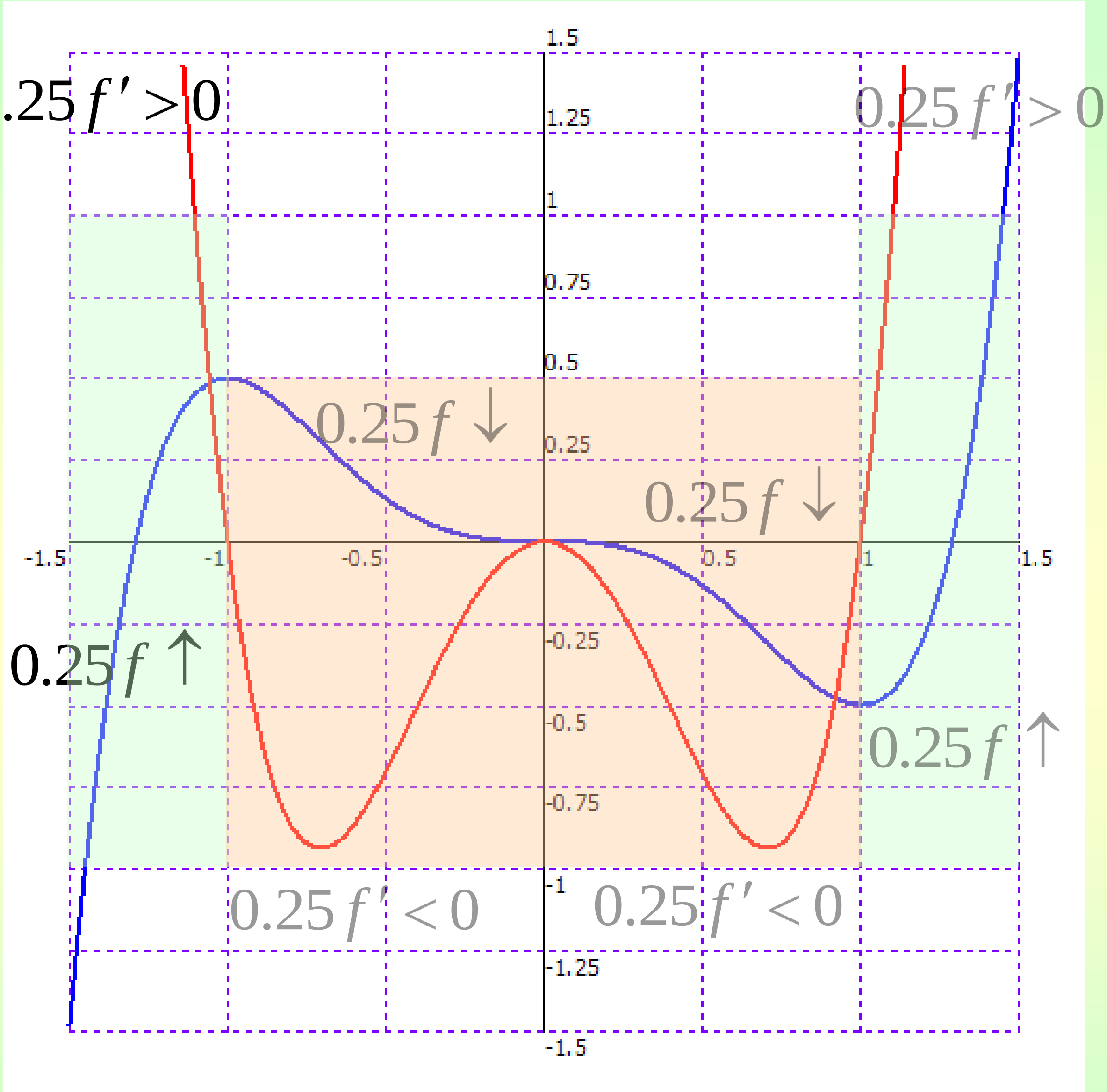
▼ Calculamos la derivada, $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x^2 > 1 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, |x| > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x > 1 \text{ o bien } x < -1 \Rightarrow f \text{ es creciente en } (-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x^2 < 1 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, |x| < 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, -1 < x < 1 \Rightarrow f \text{ es decreciente en } [-1, 1]$$



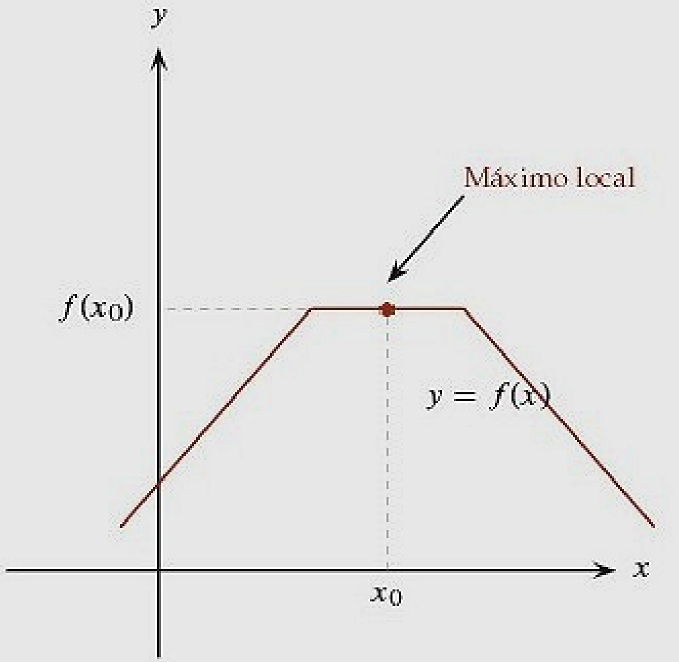


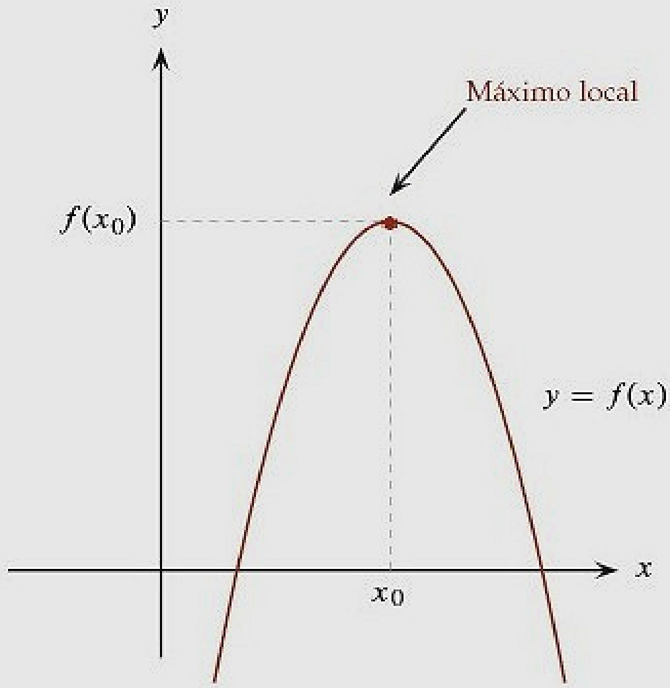


$0.25f' > 0$
$0.25f' > 0$
$0.25f \downarrow$
$0.25f \downarrow$
$0.25f \uparrow$
$0.25f \uparrow$
$0.25f' < 0$
$0.25f' < 0$
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
-1.25
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5

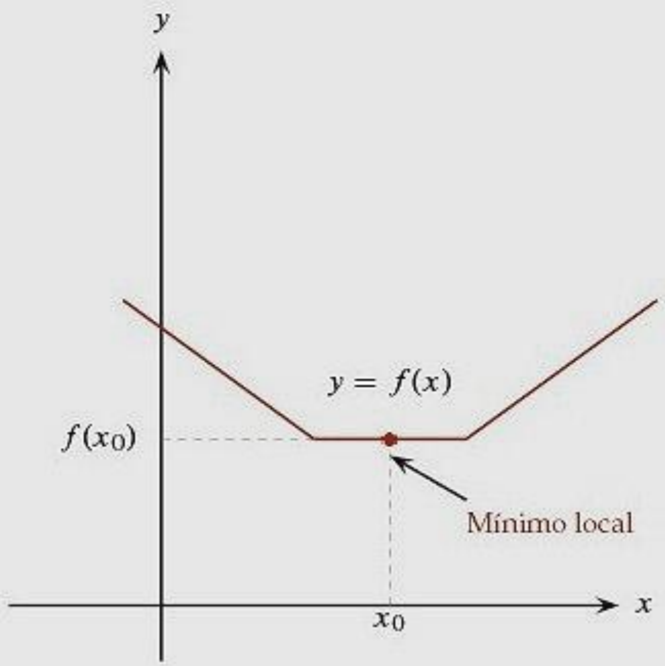
Máximos y mínimos locales

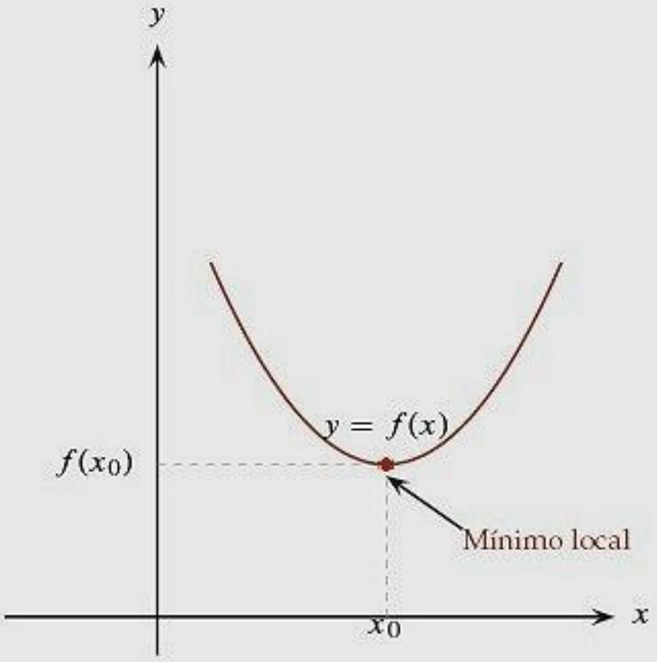
Si $f(x_0) \geq f(x)$ para cada x cerca de x_0, es decir, en un intervalo abierto que contenga a x_0 diremos que f alcanza un <u>máximo local</u> o un <u>máximo relativo</u> en x_0





Si $f(x_0) \leq f(x)$ para cada x cerca de x_0, es decir, en un intervalo abierto que contenga a x_0 diremos que f alcanza un <u>mínimo local</u> o un <u>mínimo relativo</u> en x_0

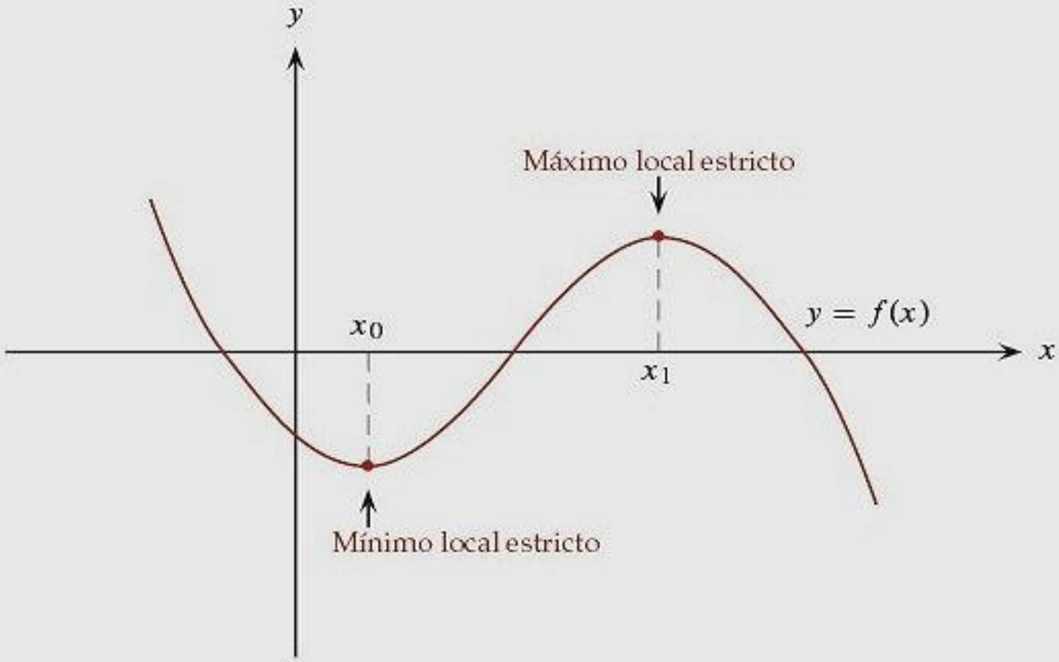




Si $f(x_0) > f(x)$ para cada x cerca de x_0, entonces el máximo local es estricto

Si $f(x_0) < f(x)$ para cada x cerca de x_0, entonces el mínimo local es estricto

A un máximo y a un mínimo local se les llaman valores extremos



Si f es continua en un intervalo que contiene a x_0 y si f' cambia de signo en x_0, es decir, si en un intervalo de la forma (x_1, x_0) f' tiene un signo y en (x_0, x_2) el otro, entonces en x_0 hay un valor extremo

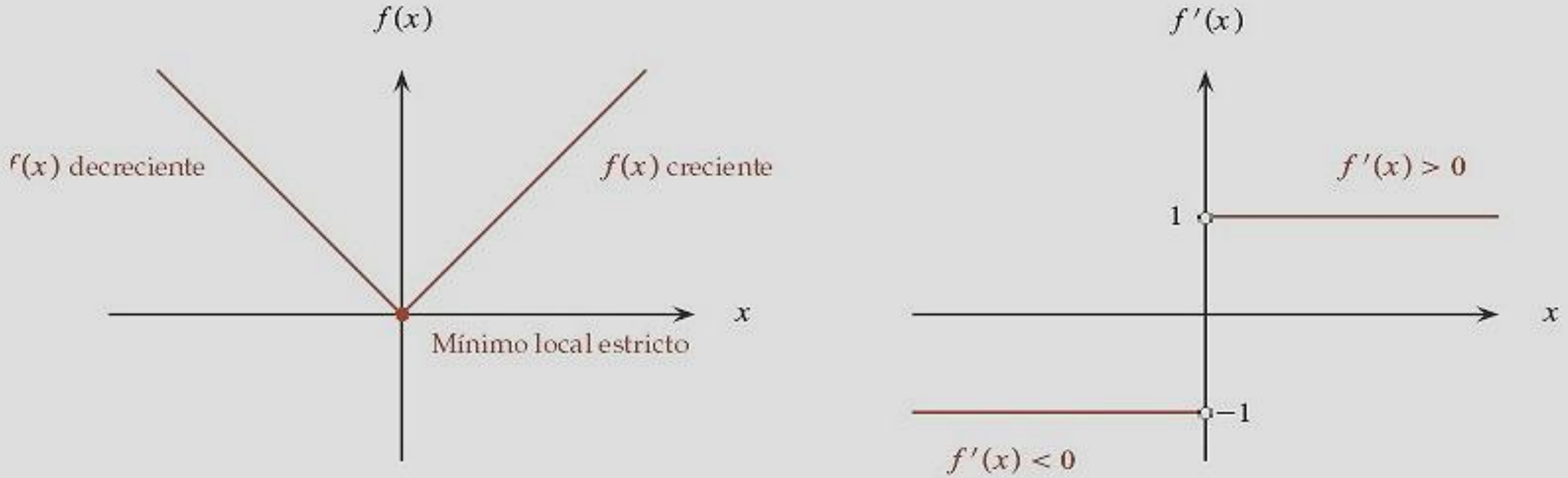
- Si f' pasa de positiva a negativa, hay un máximo local estricto. Es claro pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente
- Si f' pasa de negativa a positiva, hay un mínimo local estricto. Es claro pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente

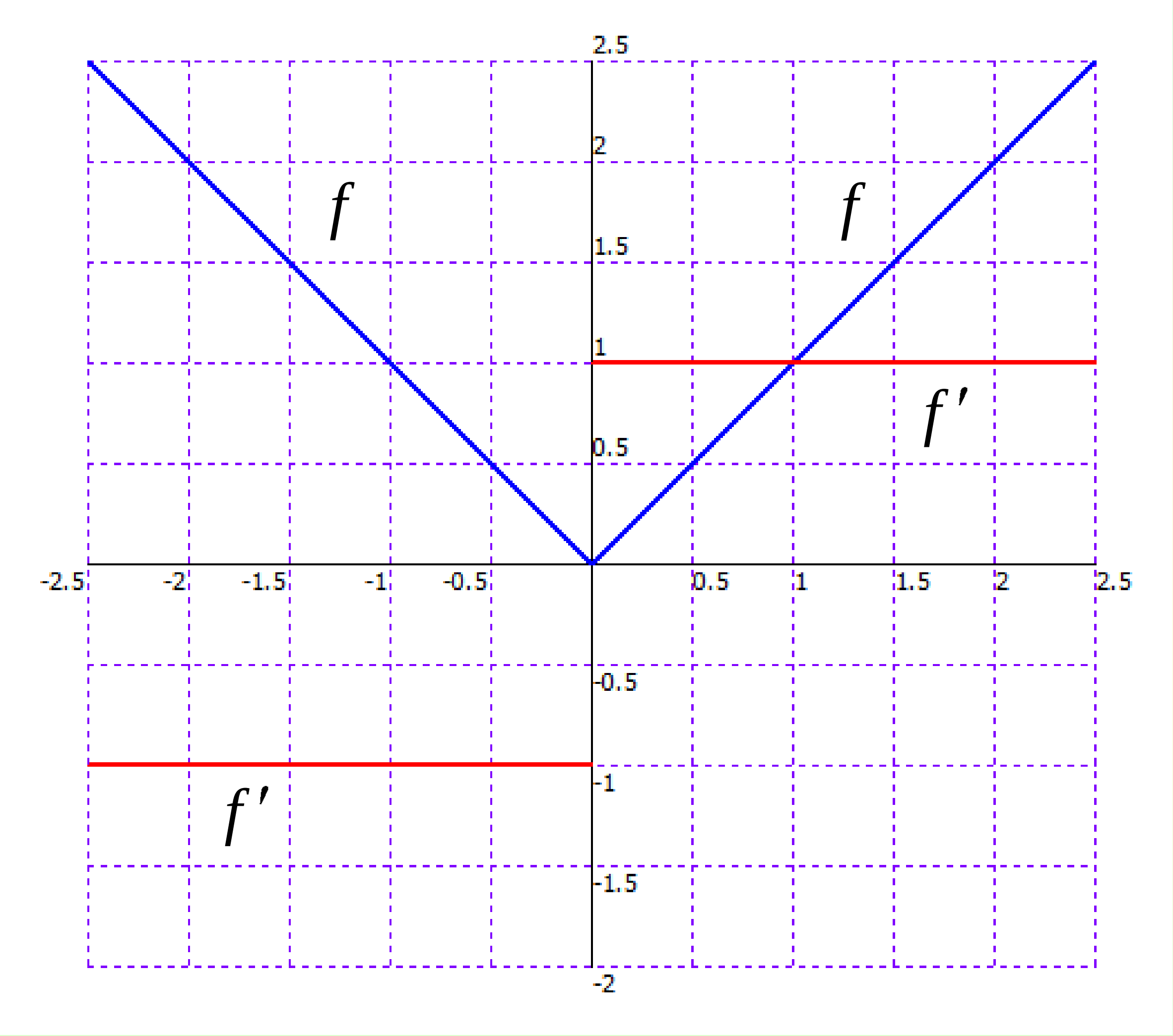
Si no cambia de signo la derivada, entonces la función no tiene valor extremo

Ejemplo 8.2.1 *La función $f(x) = |x|$ es continua en $\mathbb{R}$, pero no derivable en $x = 0$*

- También

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ 0 es un mínimo estricto}$$





2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
f
f
f '
f '

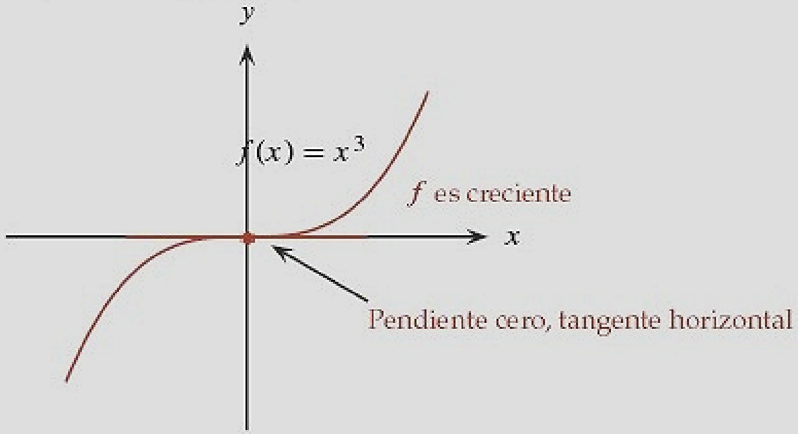
Por otro lado, es claro que (véase el teorema de Rolle)

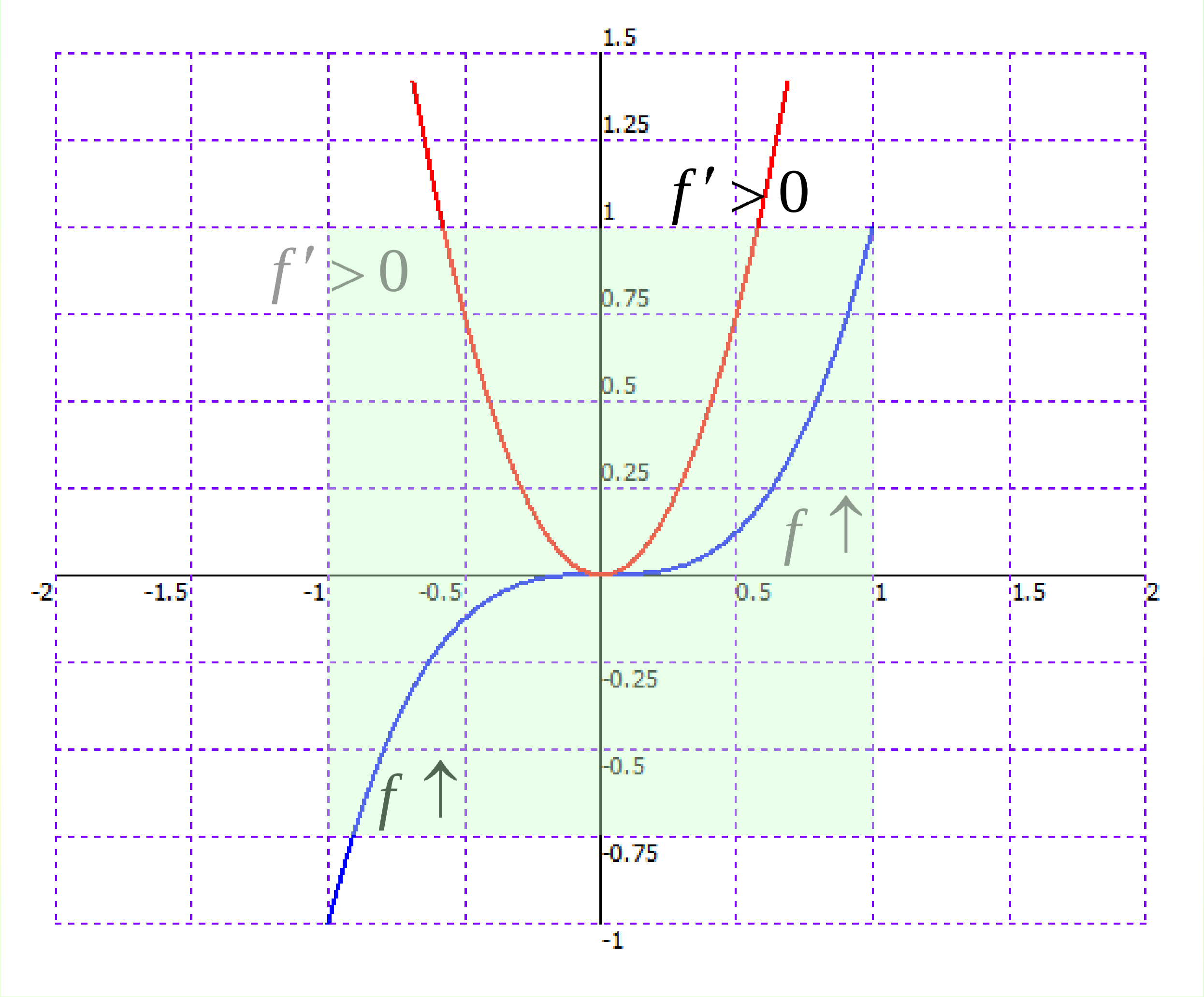
- Si f tiene un valor extremo en x_0 y es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$

El recíproco no es verdadero; veamos un contraejemplo: una función f derivable en x_0 con $f'(x_0) = 0$, pero tal que f no tiene un valor extremo en x_0

Ejemplo 8.2.2 *Sea* $f(x) = x^3$

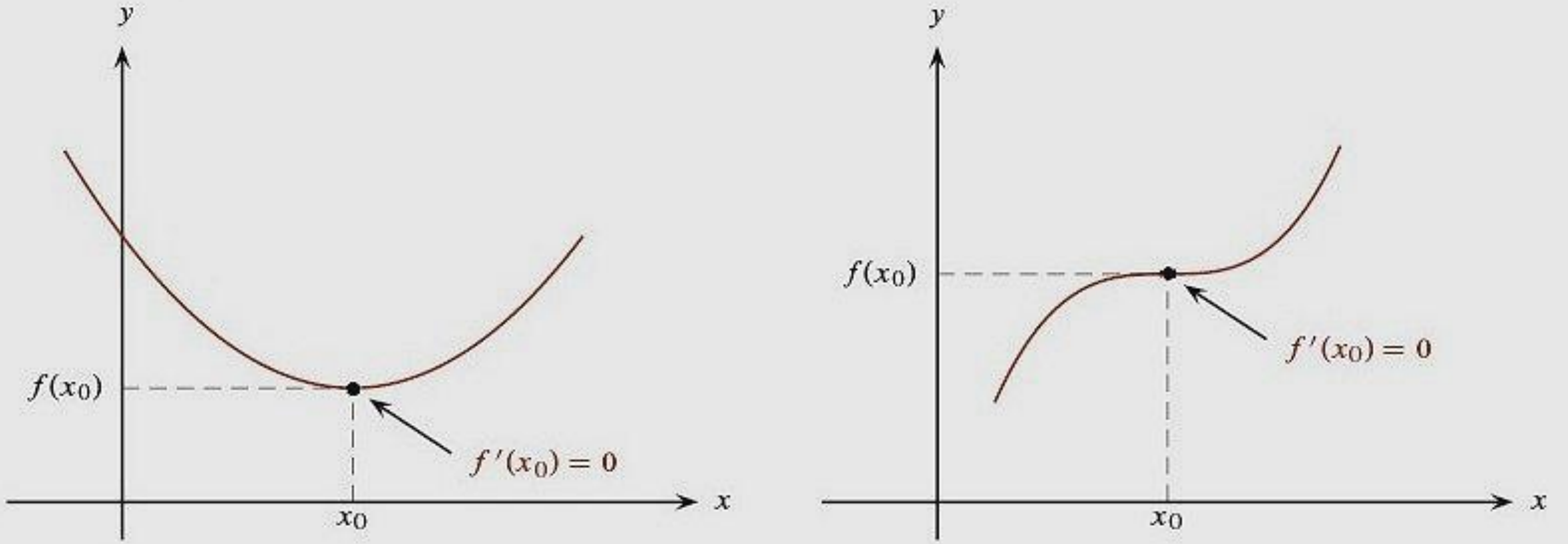
▼ La derivada de f es $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$; en 0 no hay valor extremo pues f es creciente
Entonces $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(0) = 0 < f(x_2)$; 0 no es ni máximo ni mínimo local





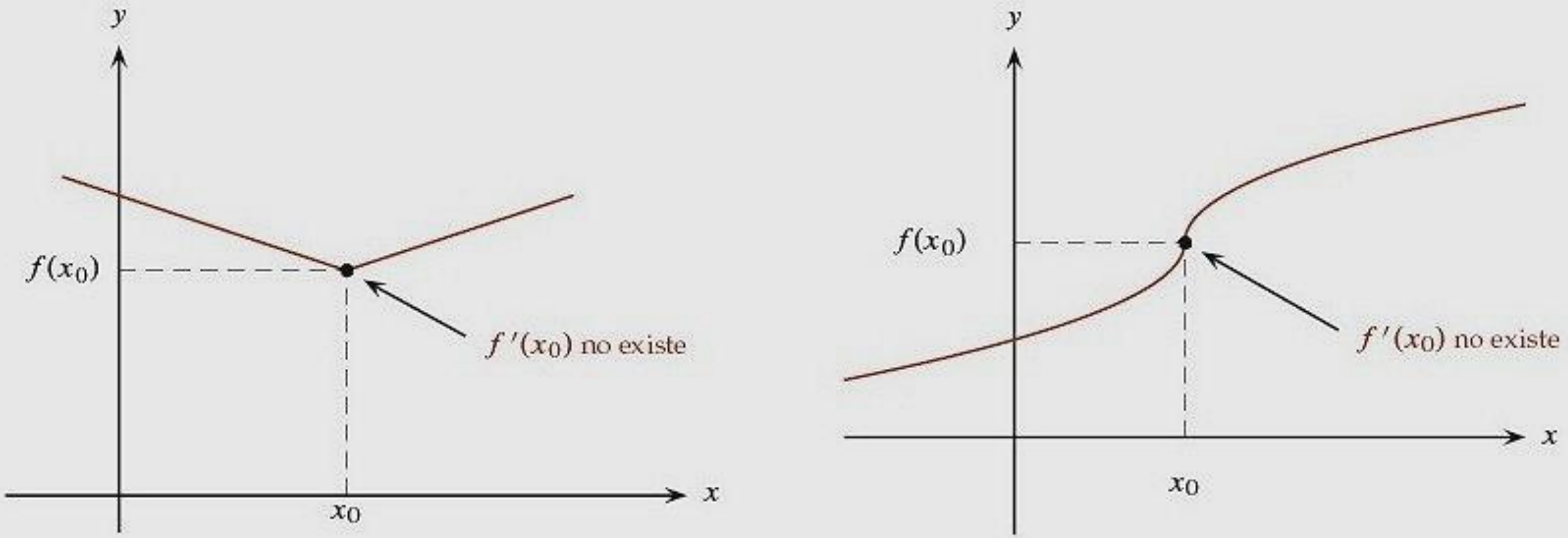
$f' > 0$
$f' > 0$
$f \uparrow$
$f \uparrow$
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2

Punto crítico. Una función f tiene un punto crítico en $x_0 \in D_f$ cuando $f'(x_0) = 0$



Geométricamente es claro que un punto crítico puede ser, o bien no puede ser, un máximo local o un mínimo local

Punto crítico. Una función f tiene un punto crítico en $x_0 \in D_f$ cuando $f'(x_0)$ no existe.



Geométricamente es claro que un punto crítico puede ser, o bien no puede ser, un máximo local o un mínimo local

Criterio de la primera derivada si f tiene en x_0 un punto crítico y además

Para $x < x_0$	*y para* $x_0 < x$	*entonces,* f *tiene en* x_0 *un*
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	máximo local estricto
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	miníno local estricto

mínimo

Ejemplo 8.2.3 *Obtener y clasificar los puntos críticos de la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

▼ $g'(x) = \dfrac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Esto implica que la función g tiene dos puntos críticos, uno en $x_1 = -2$ y otro en $x_2 = 2$
Para clasificarlos, utilizamos la información sobre crecimiento y decrecimiento de g

Para	f' *es*	f *es*	*entonces,* f *tiene*
$x < -2$	$-$	decreciente $\searrow$	
$x_1 = -2$	0		un mínimo local estrictro
$-2 < x < 2$	$+$	creciente $\nearrow$	
$x_2 = 2$	0		un máximo local estricto
$2 < x$	$-$	decreciente $\searrow$	

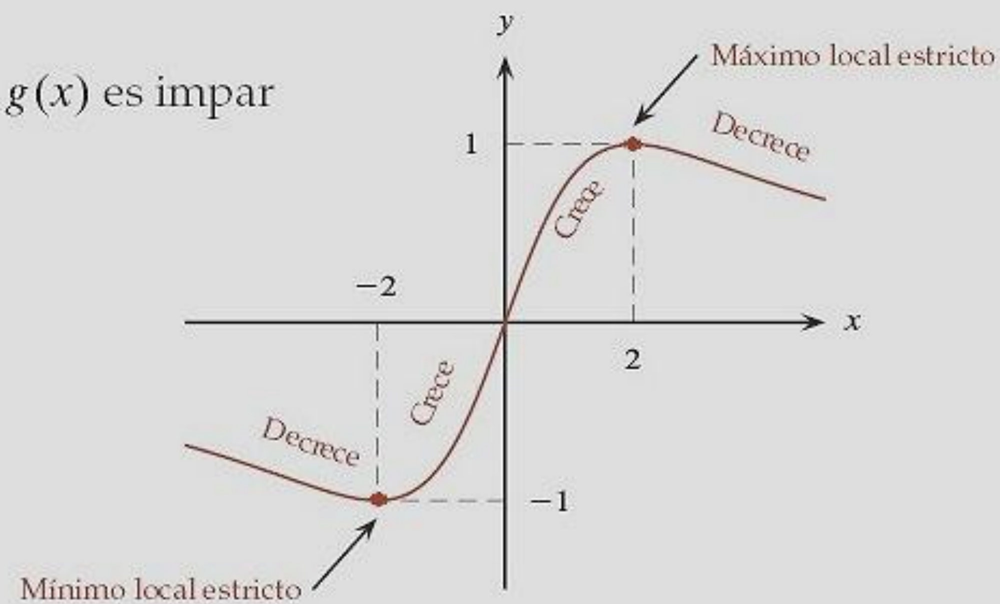
$g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ tiene

punto minímo local estricto en $x_1 = -2$ punto máximo local estricto en $x_2 = 2$

$$P[-2, g(-2)] = P\left(-2, \frac{-8}{4+4}\right)$$
$$= P(-2, -1)$$

$$Q[-2, f(2)] = Q\left(2, \frac{8}{4+4}\right)$$
$$= Q(2, 1)$$

$g(x)$ es impar



Ejemplo 8.2.6 *Dada la siguiente función:* $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$, *determine los intervalos de monotonía de* $f(x)$, *los puntos extremos y grafique esa función.*

▼ Como $f(x) = x + 1 + (x-2)^{-1}$, entonces (Observe que $x = 2 \notin D_f$)

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} < 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 > 1 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 > 1 \text{ o bien } x - 2 < -1 \Leftrightarrow x > 3, \text{ o bien } x < 1$$

f es creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$ y decreciente en $(1, 2)$ y en $(2, 3)$

puntos críticos

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o bien } x = 3$$

Como en $x = 1$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, en el punto $[1, f(1)] = \left(1, 1 + 1 + \frac{1}{1-2}\right) = (1, 1)$ la función tiene un máximo relativo

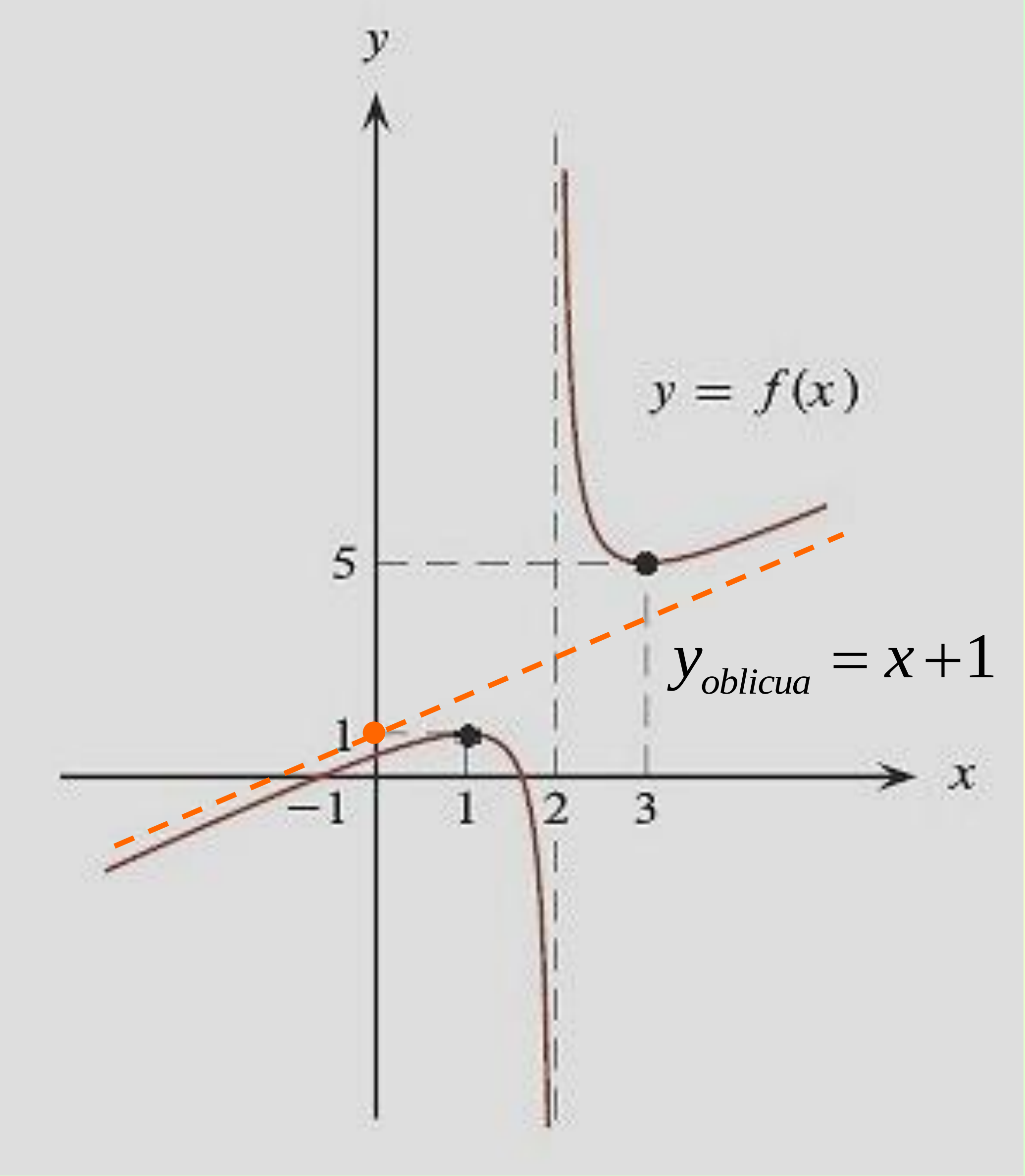
en $x = 3$, un mínimo relativo pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente

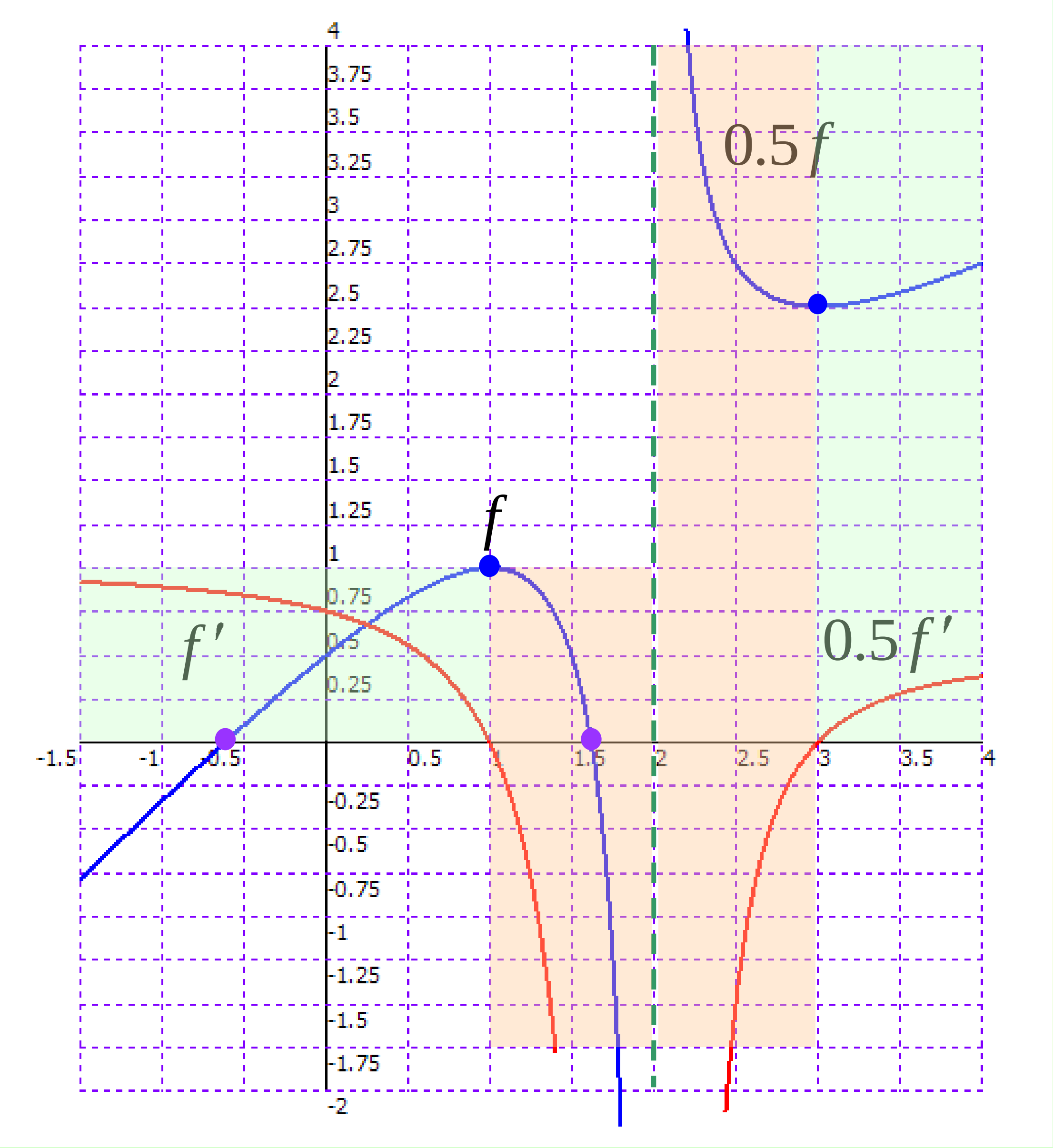
El mínimo es $f(3) = 3 + 1 + \frac{1}{3-2} = 5$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ y que } \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2} = \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 1}{x-2} = \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \approx \begin{cases} 1.6 \\ -0.6 \end{cases} \quad \text{son las raíces}$$


y
y = f(x)
5
1
−1
1
2
3
x
$y_{oblicua} = x + 1$



$0.5\,f$
f
f'
$0.5\,f'$

Si $f(x_0) \geq f(x)$ para cualquier $x \in D_f$ diremos que $f(x_0)$ es el <u>máximo absoluto</u> de la función f

Si $f(x_0) \leq f(x)$ para cualquier $x \in D_f$ diremos que $f(x_0)$ es el <u>mínimo absoluto</u> de la función f

sabemos que como $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, existen el máximo y el mínimo absolutos de f

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en (a, b), el máximo y el mínimo absolutos los toma la función en los extremos del intervalo o bien con el mayor de los máximos locales o con el menor de los mínimos locales respectivamente

Problemas del texto sugeridos a resolver

Ejercicios 8.1.1

Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

3. $h(x) = -2x^3 + 6x - 1$.

6. $h(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$.

8. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

9. $h(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x}$.

Problemas del texto sugeridos a resolver

Ejercicios 8.2.1

Utilizando el criterio de la primera derivada, determinar los máximos y mínimos locales o relativos de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

3. $h(x) = -2x^3 + 6x - 1$.

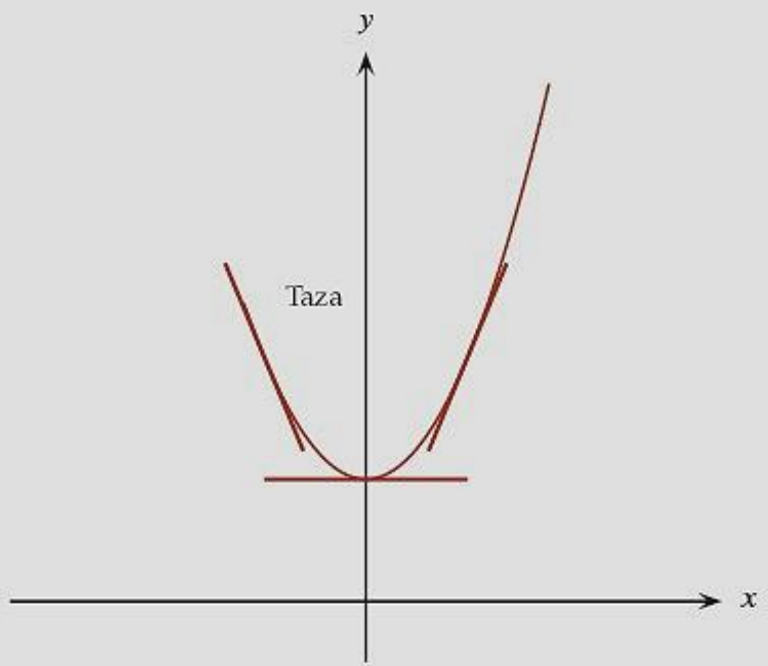
6. $h(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$.

8. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

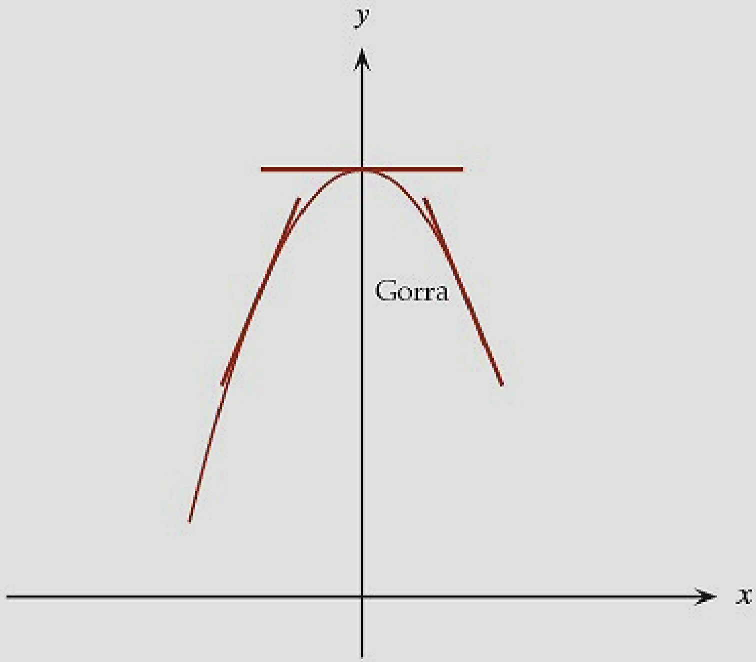
9. $h(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x}$.

Concavidad y convexidad

Observemos que $\boxed{f''(x) > 0 \text{ en un intervalo } \Rightarrow f'(x) \text{ es creciente en dicho intervalo,}}$ por lo tanto, al recorrer la gráfica de la función f de izquierda a derecha, debe presentar forma de taza. Ya que la inclinación de la tangente crece en sentido directo diremos que la función es <u>cóncava</u>. En este caso la gráfica está encima de sus tangentes y debajo de sus secantes.



Observemos que $\boxed{f''(x) < 0 \text{ en un intervalo } \Rightarrow f'(x) \text{ es decreciente en dicho intervalo}}$; entonces al recorrer la gráfica de la función f de izquierda a derecha, debe presentar forma de gorra. Ya que la inclinación de la tangente decrece en sentido directo diremos que la función es convexa. En este caso la gráfica está debajo de sus tangentes y encima de sus secantes.



La función (curva) $y = f(x)$ es cóncava en el intervalo I si $f''(x) > 0$ para cada $x \in I$

La función (curva) $y = f(x)$ es convexa en el intervalo I si $f''(x) < 0$ para cada $x \in I$

De aquí surge el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos locales

Si $f'(x_0) = 0$ y si $f''(x_0) > 0$, en x_0 hay un mínimo local

Si $f'(x_0) = 0$ y si $f''(x_0) < 0$, en x_0 hay un máximo local

Se llama punto de inflexión de f a un punto donde la segunda derivada de la función es cero y en el punto cambia de signo, esto es, la segunda derivada pasa de ser positiva antes del punto a ser negativa después del punto, o viceversa, siendo continua la funció en dicho punto. En ellos la función pasa de ser cóncava a convexa, o viceversa.

Si f es una función cóncava, entonces f es cóncava hacia arriba, $(f''(x) > 0)$

Si f es una función convexa, entonces f es cóncava hacia abajo, $(f''(x) < 0)$

Podemos decir que la curva (función) $y = f(x)$ en x_0 tiene un punto de inflexión si en x_0 hay un cambio de concavidad y si hay continuidad.

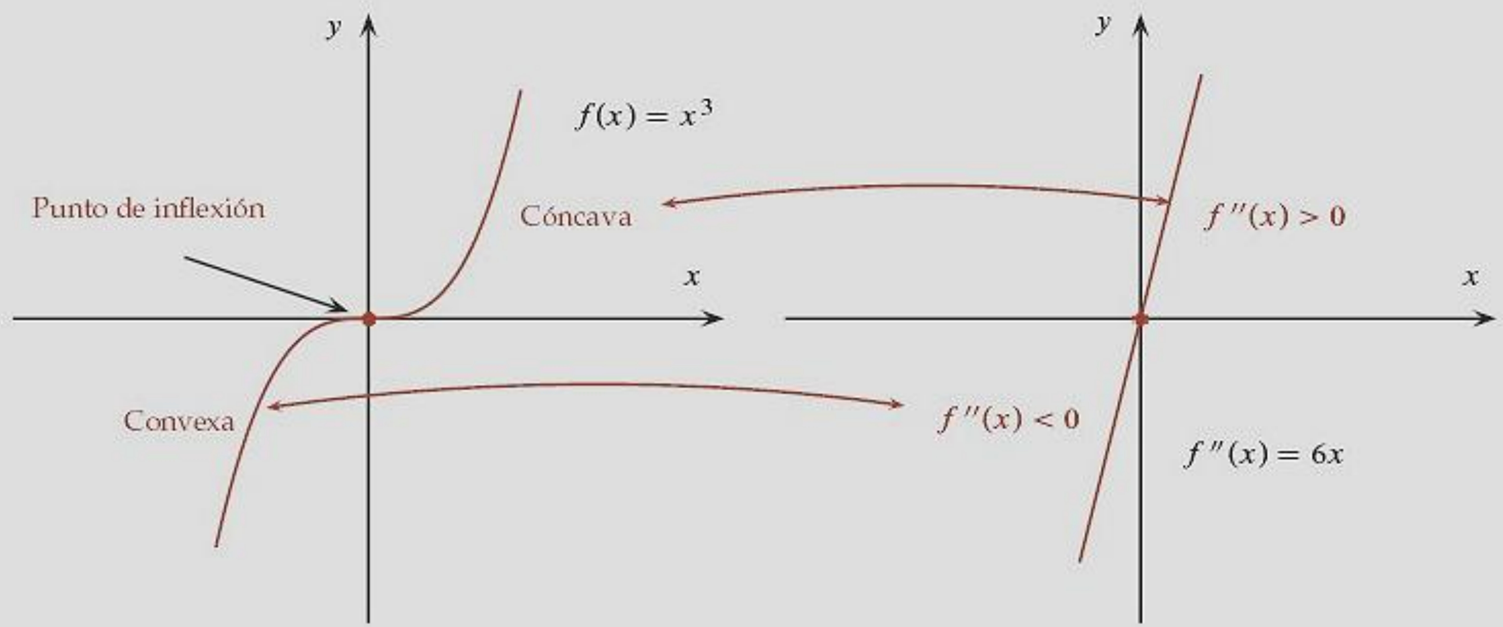
Ejemplo 8.3.1 *Para la función* $f(x) = x^3$

▼ Calculamos $f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x > 0$ si $x > 0$ luego f es cóncava en el intervalo $(0, +\infty)$

$f''(x) = 6x < 0$ si $x < 0$ luego f es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$

$f''(x) = 6x = 0$ si $x = 0$ luego f tiene un punto de inflexión en $x = 0$



Ejemplo 8.3.2 *Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

▼ $$g(x) = \frac{4x}{x^2+4} \;\Rightarrow\; g'(x) = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$$

$$\Rightarrow\; g''(x) = 4\frac{(x^2+4)^2(-2x)-(4-x^2)2(x^2+4)(2x)}{[(x^2+4)^2]^2}$$

$$\Rightarrow\; g''(x) = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$$

Ahora bien, debido a que $8 > 0$ y a que $(x^2+4)^3 > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$

$$g''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} > 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2-12) > 0$$

$$g''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} < 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2-12) < 0$$

Pero $x(x^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow x(x + \sqrt{12})(x - \sqrt{12}) = 0$. Esto se cumple si

$x = 0$ o bien

$x + \sqrt{12} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{12}$ o bien

$x - \sqrt{12} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{12}$

Con los números $x_1 = -\sqrt{12}$, $x_2 = 0$ & $x_3 = \sqrt{12}$

generamos los intervalos

$$\left(-\infty, -\sqrt{12}\right), \left(-\sqrt{12}, 0\right), \left(0, \sqrt{12}\right) \text{ y } \left(\sqrt{12}, = \infty\right)$$

Como $g''(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, en cada uno de esos intervalos tomaremos una x fija (valor de prueba) para determinar el signo de $g''(x)$.

Para	*valor de prueba*	$g''(x)$ *es*	*entonces g es cóncava*
$-\infty < x < -\sqrt{12}$	$x = -4$	$-$	hacia abajo o convexa
$-\sqrt{12} < x < 0$	$x = -1$	$+$	hacia arriba
$0 < x < \sqrt{12}$	$x = 1$	$-$	hacia abajo o convexa
$\sqrt{12} < x < +\infty$	$x = 4$	$+$	hacia arriba

la curva (función) $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en los intervalos: $\left(-\sqrt{12}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{12}, +\infty\right)$

la función (curva) $y = f(x)$ es cóncava hacia abajo o convexa en los intervalos: $\left(-\infty, -\sqrt{12}\right)$ y $\left(0, \sqrt{12}\right)$

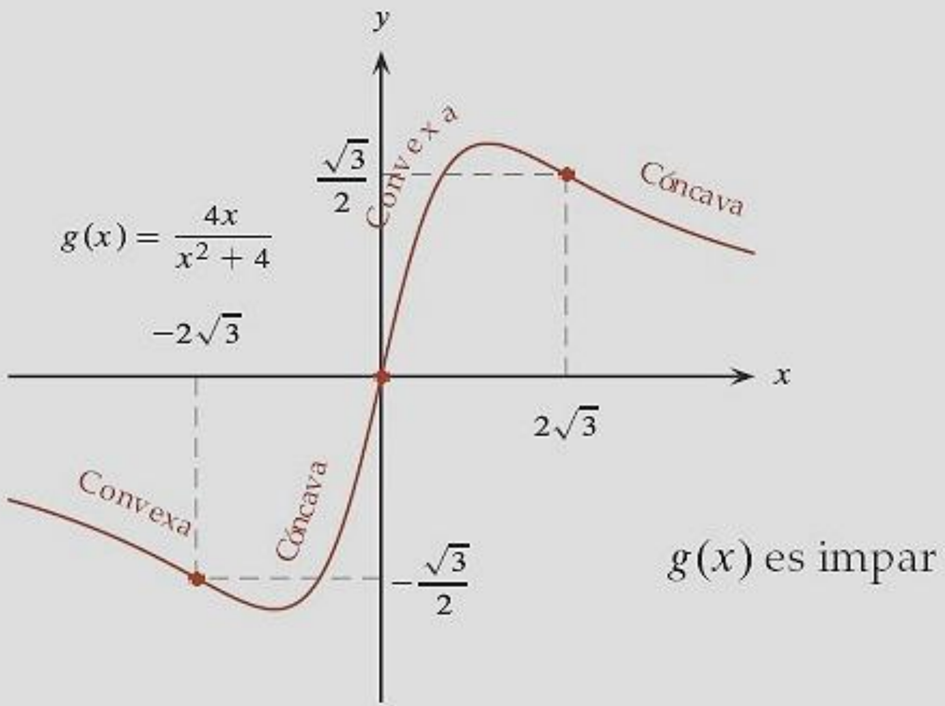
la curva (función) $y = f(x)$ tiene puntos de inflexión en

$$x_1 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3} \approx -3.464$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$P_1[x_1, f(x_1)] = P_1[-\sqrt{12}, f(-\sqrt{12})] = P_1\left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (-3.464, -0.866)$$

$$P_2[x_2, f(x_2)] = P_2[0, f(0))] = P_2(0, 0)$$

$$P_3[x_3, f(x_3)] = P_3[\sqrt{12}, f(\sqrt{12})] = P_3\left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (3.464, 0.866)$$



Ejemplo 8.3.4 *Sea la función*

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

diga en qué intervalos es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y determine los puntos de inflexión.

▼ Calculemos la segunda derivada de f

$$f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 2(1+x)x}{(1+x)^4} = \frac{1+x-2x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f''(x) = \frac{-(1+x)^3 - 3(1+x)^2(1-x)}{(1+x)^6} = \frac{-1-x-3+3x}{(1+x)^4} = \frac{2x-4}{(1+x)^4}$$

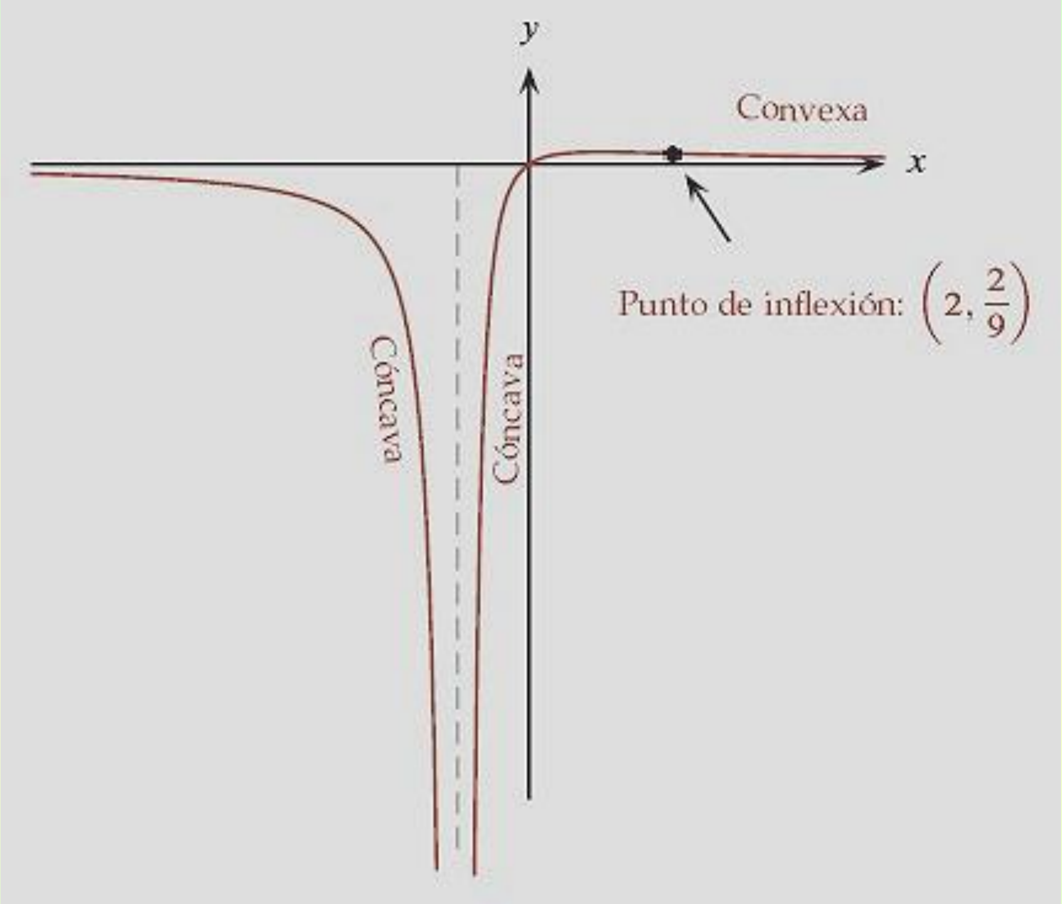
El signo de esta segunda derivada nos lo da el numerador $2x - 4$ pues el denominador es siempre positivo

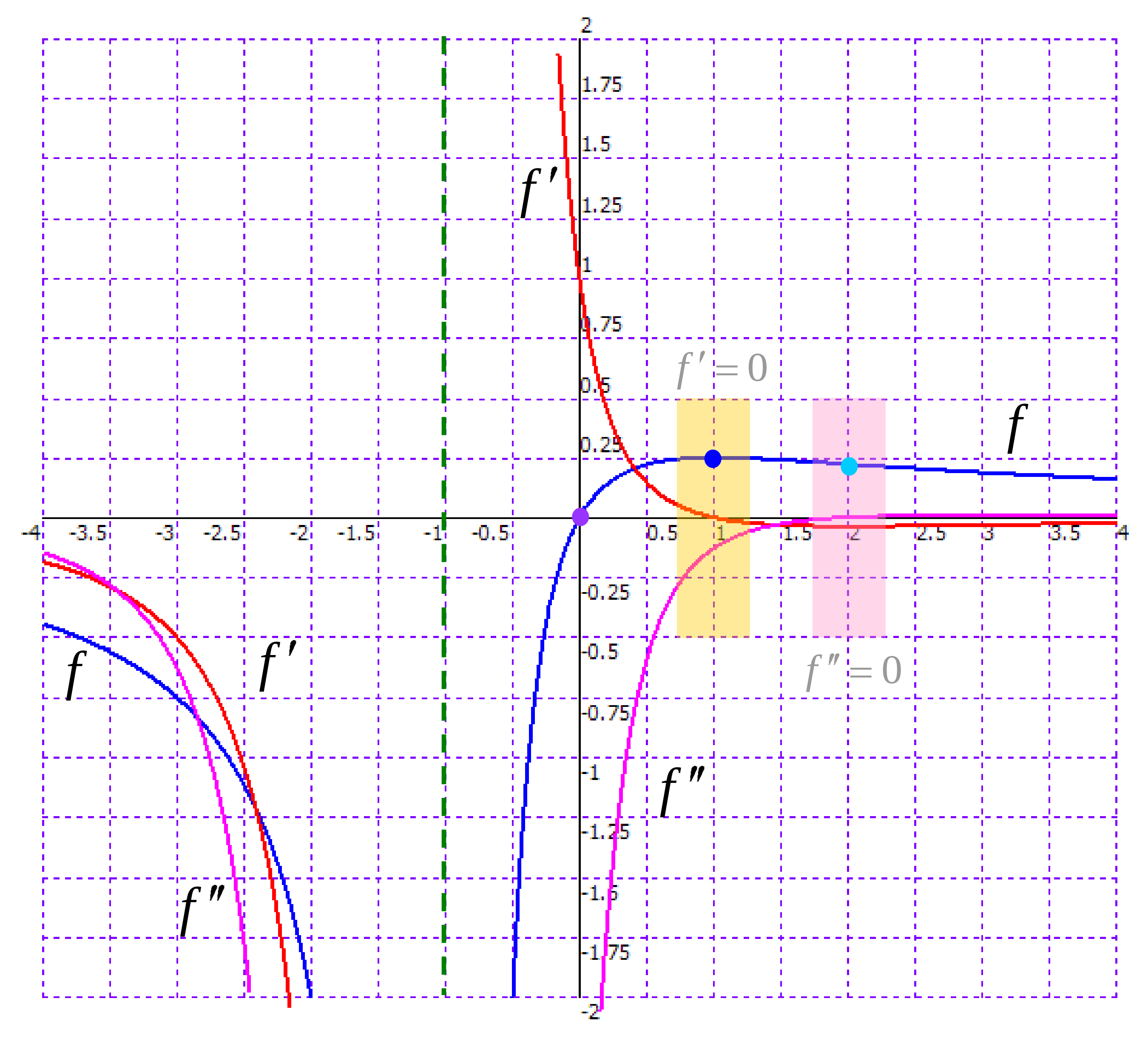
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{2} = 2$$

Entonces, la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, +\infty)$
Y cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, 2)$, pues $-1 \notin D_f$

Para $x = 2$ (raíz de f'') se tiene un punto de inflexión,
ya que ahí la gráfica de f cambia el sentido de la concavidad.

El punto de inflexión es $[2, f(2)] = \left(2, \frac{2}{9}\right)$


y
Convexa
x
Punto de inflexión: $\left(2, \frac{2}{9}\right)$
Cóncava
Cóncava


f'
$f' = 0$
f
f
f'
f''
f''
$f'' = 0$
2
1.75
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
-1.25
-1.5
-1.75
-2
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Problemas del texto sugeridos a resolver

Ejercicios 8.3.1

Determinar los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

1. $g(x) = 4 - 3x^2$.

4. $\phi(x) = x^6 - 3x^4$.

5. $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2 + 1}$.

7. $h(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$.

10. $g(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.

Problemas del texto sugeridos a resolver

Ejercicios 8.3.2

Utilizando el criterio de la segunda derivada, determinar los máximos y/o mínimos locales de las anteriores funciones.

1. $g(x) = 4 - 3x^2$.

4. $\phi(x) = x^6 - 3x^4$.

5. $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2 + 1}$.

7. $h(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$.

10. $g(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.