CAPÍTULO

9

Gráfica de una función

Bosquejo de la gráfica de una función

1. Hallar su dominio y sus raíces
2. Decidir si es par o impar, o bien ninguna de las dos cosas
3. Determinar sus intervalos de continuidad
4. Determinar sus discontinuidades y clasificarlas
5. Hallar sus asíntotas horizontales y verticales

Bosquejo de la gráfica de una función

6. Calcular su derivada y averiguar dónde existe. Hallar sus puntos críticos. Averiguar si tiene tangentes verticales

7. Resolver las desigualdades $f'(x) > 0$ & $f'(x) < 0$. Determinar sus intervalos de monotonía

8. Hallar sus máximos y mínimos locales

9. Hallar su segunda derivada y sus raíces. Resolver las desigualdades $f''(x) > 0$ & $f''(x) < 0$, discernir dónde es cóncava y dónde es convexa la función. Hallar sus puntos de inflexión. Evaluar la función y la primera derivada en los puntos de inflexión

10. Si es preciso: tabular algunos puntos y algunas pendientes adicionales

Ejemplo 9.1.1 *Bosquejar la gráfica de la función* $\boxed{f(x) = 3x^5 - 5x^3}$

1. Dominio: por ser f una función polinomial su dominio es $D_f = \mathbb{R}$

   Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3x^5 - 5x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(3x^2 - 5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ \text{o bien} \\ 3x^2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ x^2 = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ o bien} \\ x = \sqrt{\dfrac{5}{3}} \text{ o bien} \\ x = -\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{cases}$$

   Entonces f tiene 3 raíces: $r_1 = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}$, $r_2 = 0$ & $r_3 = \sqrt{\dfrac{5}{3}} \approx 1.29$

2. Paridad:

$$f(-x) = 3(-x)^5 - 5(-x)^3 = 3(-x^5) - 5(-x^3) = -3x^5 + 5x^3 = -(3x^5 - 5x^3) = -f(x)$$

   La función f es impar. Por lo cual su gráfica resultará simétrica con respecto al origen

$$\boxed{f(x) = 3x^5 - 5x^3}$$

3. Intervalos de continuidad:

   Por ser f una función polinomial es continua en todo $\mathbb{R}$. Por lo mismo no tiene discontinuidades.

4. Asíntotas verticales: Por ser continua en todo $\mathbb{R}$, la función f no tiene asíntotas verticales

5. Asíntotas horizontales: no tiene, pues

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(3x^5 - 5x^3) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^5\left(3 - \frac{5}{x^2}\right)\right] = +\infty$$

   Además (por ser impar)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

   Comentario: el comportamiento de estos límites se conoce como ramas parábolicas de la función.

6. Derivabilidad: Por ser f una función polinomial, es derivable en todo $\mathbb{R}$. De hecho

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 \text{ existe para cada } x \in \mathbb{R} \;\; (f' \text{ es par})$$

$$\boxed{f(x) = 3x^5 - 5x^3}$$

7. Monotonía: por el ejemplo 8.1.4 sabemos que

- La función f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$
- La función f es decreciente en el intervalo $[-1, 1]$

8. Puntos críticos: por el ejemplo 8.2.4 sabemos que

- En $x = 0$ existe un punto crítico que no es ni máximo ni mínimo local
- La función f tiene un máximo local estricto en el punto $P(-1, 2)$
- La función f tiene un mínimo local estricto en el punto $Q(1, -2)$

$$\boxed{f(x) = 3x^5 - 5x^3}$$

9. Concavidades: por el ejemplo 8.3.3 sabemos que

- La función f es cóncava hacia arriba en los intervalos $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \approx (0.7071, +\infty)$
- La función f es cóncava hacia abajo en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- La función f tiene 3 puntos de inflexión, que son

$$I_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1.2374\right) \quad I_2(0,0) \quad I_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1.2374\right)$$

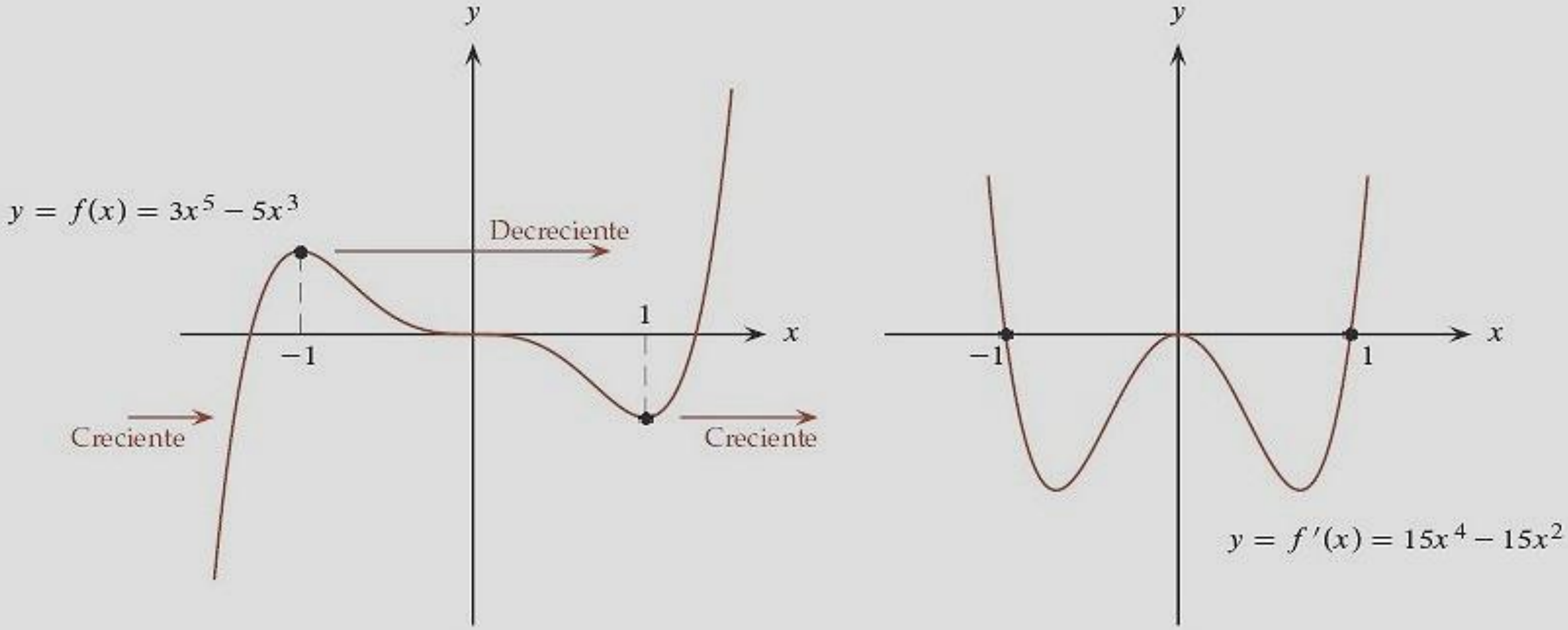
Corroboramos que siendo $I_2(0,0)$ un punto crítico y al mismo tiempo un punto de inflexión no es ni un máximo local ni un mínimo local

Ejemplo 8.1.4 *Sea la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

▼ Calculamos la derivada, $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x^2 > 1 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, |x| > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x > 1 \text{ o bien } x < -1 \Rightarrow f \text{ es creciente en } (-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x^2 < 1 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, |x| < 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, -1 < x < 1 \Rightarrow f \text{ es decreciente en } [-1, 1]$$

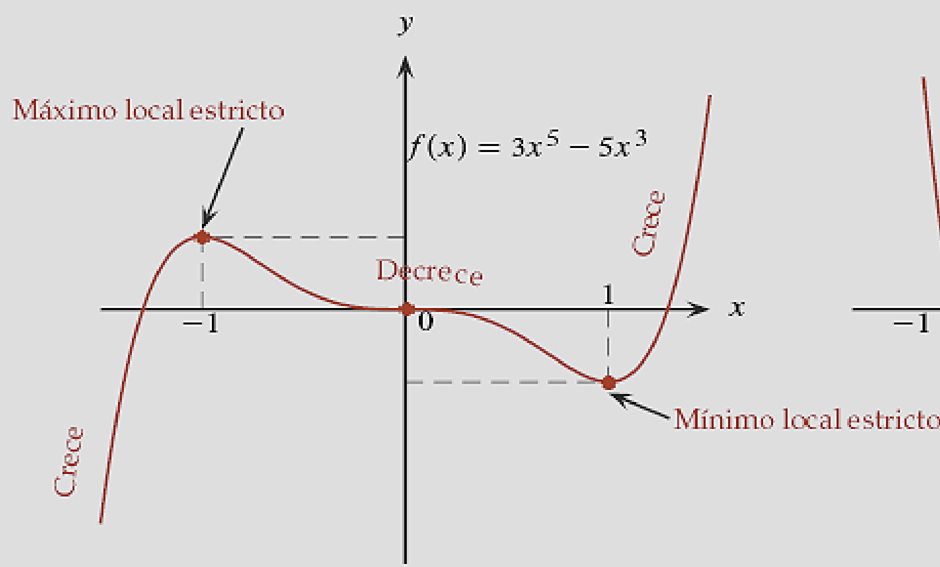


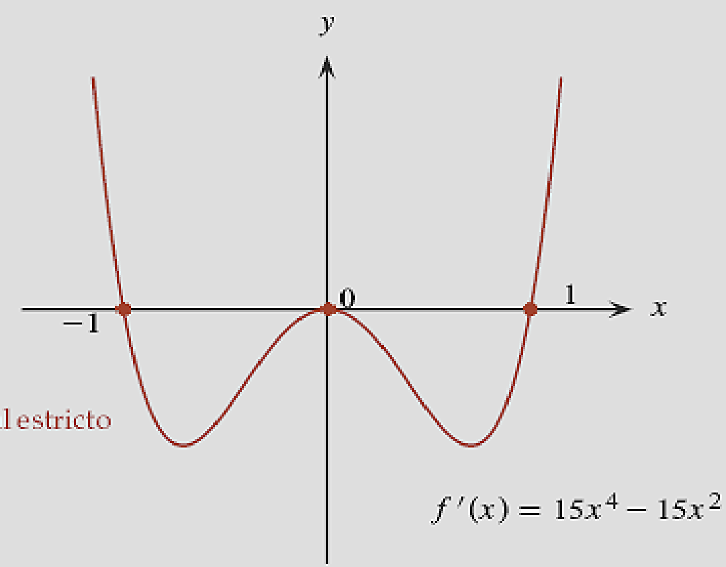
Ejemplo 8.2.4 *Obtener y clasificar los puntos críticos de la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2-1) = 15x^2(x+1)(x-1)$$
$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 15x^2(x+1)(x-1) = 0 \text{ esto se cumple si}$$

$x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ $\qquad$ $x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$ $\qquad$ $x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$

Esto implica que la función f tiene tres puntos críticos: en $x_1 = -1$, en $x_2 = 0$ y en $x_3 = 1$





El punto máximo local estricto está en $P[-1, f(-1)] = P(-1, 2)$
El punto mínimo local estricto está en $Q[1, f(1)] = Q(1, -2)$

Ejemplo 8.3.3 *Determinar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 15x^2 \Rightarrow f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow f''(x) > 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 1) > 0 \ \& \ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 1) < 0$$

Ahora bien $x(2x^2 - 1) = 0$. Esto ocurre cuando:

1. $x = 0$.
2. $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ Con los números $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = 0$ y con $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

generamos los intervalos $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

Como $f''(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ en cada uno de esos intervalos, tomamos un x fijo (valor de prueba) para determinar el signo de f''.

Para	*valor de prueba*	$f''(x)$ *es*	*entonces f es cóncava hacia*
$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = -1$	$-$	abajo o convexa
$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$	$x = -\frac{1}{2}$	$+$	arriba
$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = \frac{1}{2}$	$-$	abajo o convexa
$\frac{1}{\sqrt{2}} < x$	$x = 1$	$+$	arriba

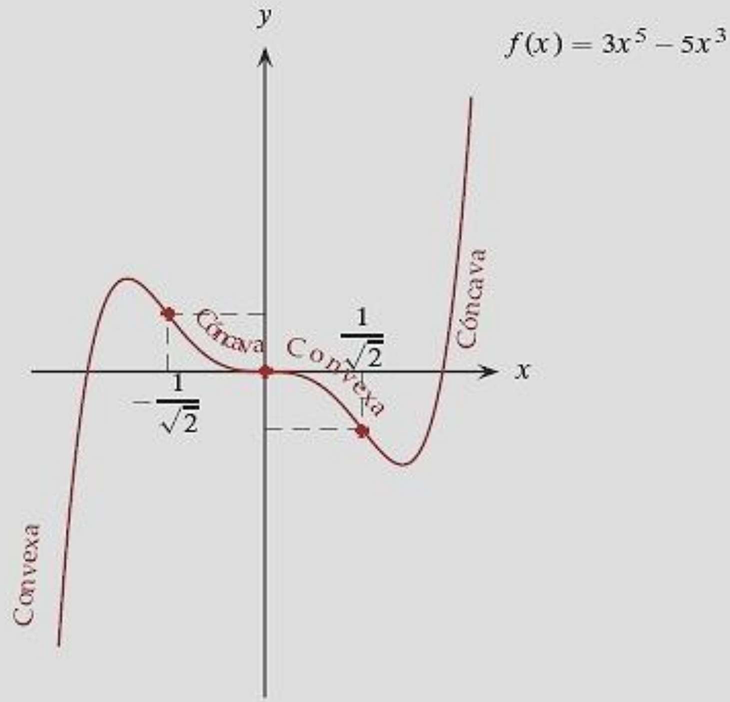
- $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ es cóncava hacia arriba en los intervalos: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
- $f(x)$ es cóncava hacia abajo o convexa en los intervalos: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- f tiene puntos de inflexión en:

$$P_1\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, f(-\frac{1}{\sqrt{2}})\right] = P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1.2374\right)\ ;\ P_2[0, f(0)] = P_2(0,0) \text{ y en}$$

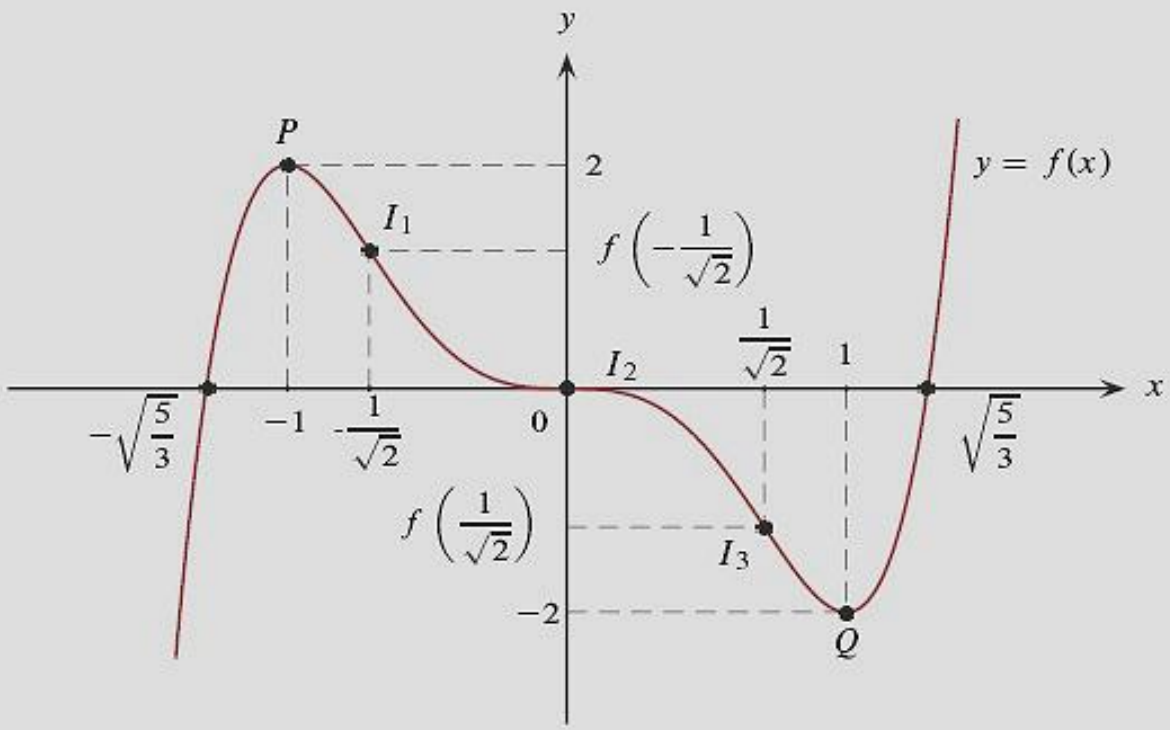
$$P_3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, f(\frac{1}{\sqrt{2}})\right] = P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1.2374\right)$$

- $f(x)$ impar.

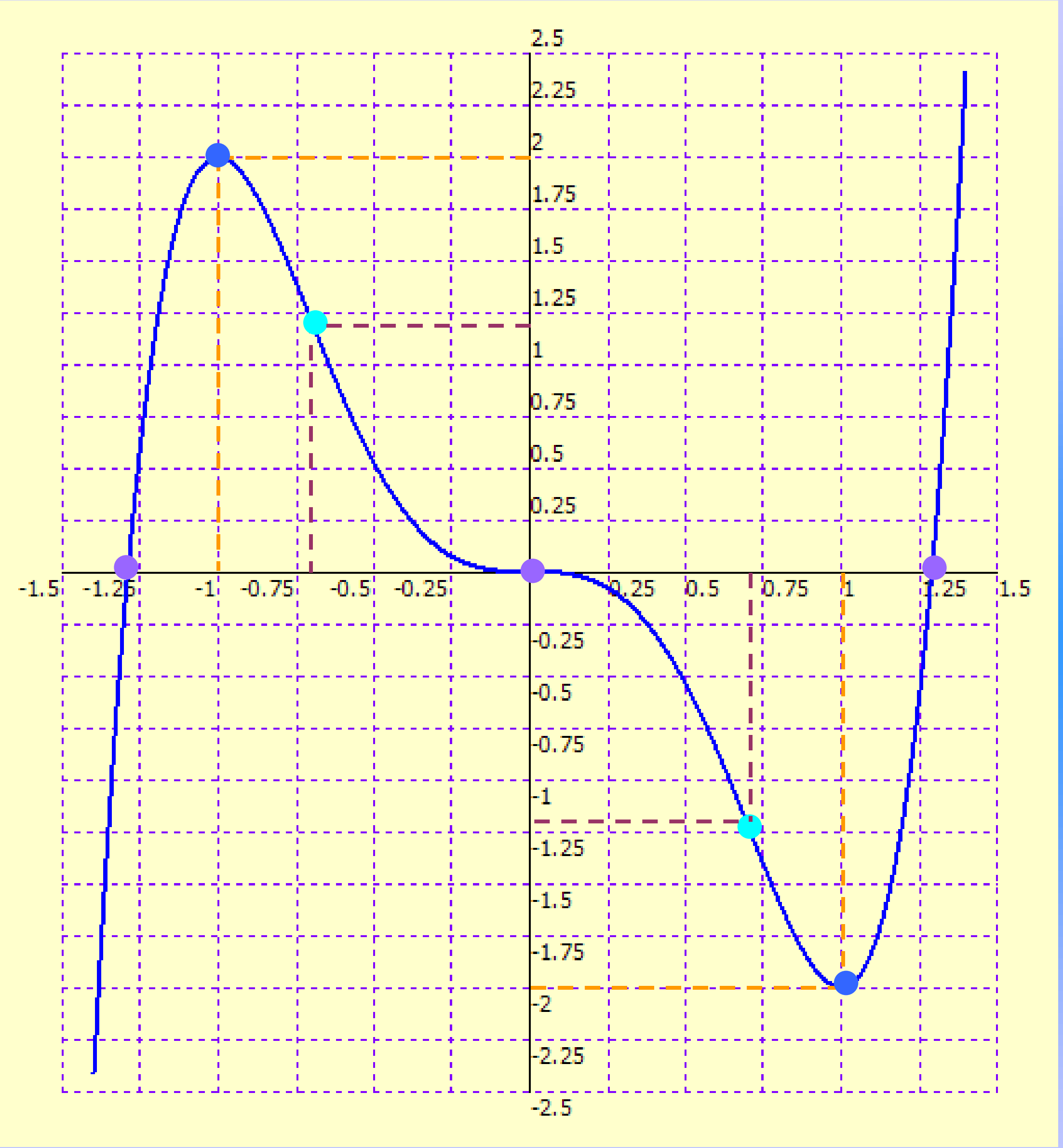


$$\boxed{f(x) = 3x^5 - 5x^3}$$

10. Bosquejo de la gráfica de $f(x)$:



$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$



2.5
2.25
2
1.75
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
-1.5
-1.25
-1
-0.75
-0.5
-0.25
0.25
0.5
0.75
1
1.25
1.5
-0.25
-0.5
-0.75
-1
-1.25
-1.5
-1.75
-2
-2.25
-2.5

Ejemplo 9.1.4 *Dada la función definida por* $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}}$, *determinar: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos locales; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, así como los puntos de inflexión. A partir del análisis anterior, hacer un esbozo de la gráfica de* f.

1. Dominio:

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \neq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 1 \} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

2. Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3. Paridad:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{x^2}{1-x^2} = f(x)$$

La función f es par por lo cual su gráfica es simétrica respecto al eje y

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}}$$

4. Intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades:

Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio.

Es decir, f es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$. Esto implica que f tiene discontinuidades en $x = -1$ y en $x = 1$

Veamos ahora $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

Cuando $x \to 1$ ocurre que: $x^2 \to 1$; $1 - x^2 \to 0$ & $\dfrac{x^2}{1 - x^2} \to -\infty$ o bien $+\infty$

Cuando $x \to -1$ ocurre que: $x^2 \to 1$; $1 - x^2 \to 0$ & $\dfrac{x^2}{1 - x^2} \to -\infty$ o bien $+\infty$

Entonces dado que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ o bien $+\infty$ & $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ o bien $+\infty$ las discontinuidades son esenciales e infinitas

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}}$$

5. Asíntotas verticales:

Precisamos los límites infinitos anteriores determinando los límites laterales.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$0 < x < 1 \;\Rightarrow\; 0 < x^2 < 1 \;\Rightarrow\; 1-x^2 > 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{1-x^2} > 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$x > 1 \;\Rightarrow\; x^2 > 1 \;\Rightarrow\; 1-x^2 < 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{1-x^2} < 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty$$

Luego, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Por ser f una función par, su gráfica es simétrica respecto al eje y. Utilizando este hecho se puede afirmar que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ y además que la recta $x = -1$ es también una asíntota vertical

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}}$$

6. Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

De nuevo, por simetría con respecto al eje y, se tiene que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

Por lo tanto f tiene una sola asíntota horizontal que es la recta $y = -1$

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}}$$

7. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = \frac{(1-x^2)2x - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Notando que siendo $x \neq \pm 1$ y que $(1-x^2)^2 > 0$, podemos asegurar que $f'(x) > 0$ para $x > 0$ y que $f'(x) < 0$ para $x < 0$. Entonces, f es estrictamente creciente en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$, y es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$

8. Máximos y mínimos locales:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

entonces en $x = 0$ se tiene un punto crítico

Debido a que f es decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$, por el criterio de la primera derivada se puede asegurar que f tiene en $x = 0$ un mínimo local estricto

Ya que $f(0) = \dfrac{0^2}{1-0^2} = \dfrac{0}{1} = 0$, las coordenadas del punto mínimo local son $[0, f(0)] = (0, 0)$

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}}$$

9. Intervalos de concavidad:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2x}{(1-x^2)^2}\right] =$$
$$= \frac{(1-x^2)^2 2 - 2x(2)(1-x^2)(-2x)}{[(1-x^2)^2]^2} = \frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

Notando que $2(3x^2+1) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, podemos asegurar que el signo de $f''(x)$ es el de $(1-x^2)^3$, que es el mismo de $1-x^2$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 > x^2 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Entonces, $f''(x) > 0$ en el intervalo $(-1, 1)$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x^2 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ o bien } x > 1$$

Luego, $f''(x) < 0$ en $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$

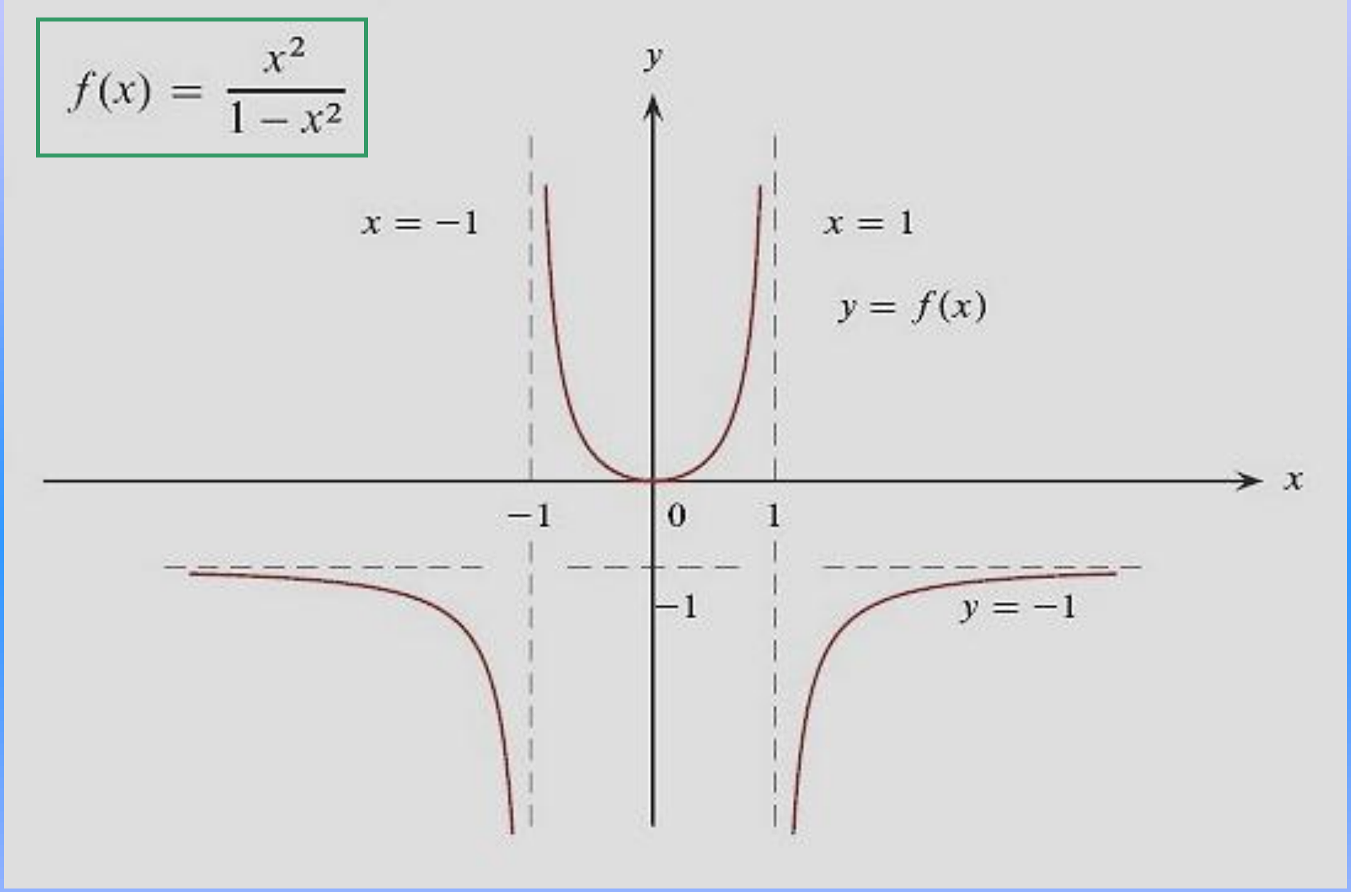
$$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}}$$

10. Puntos de inflexión:

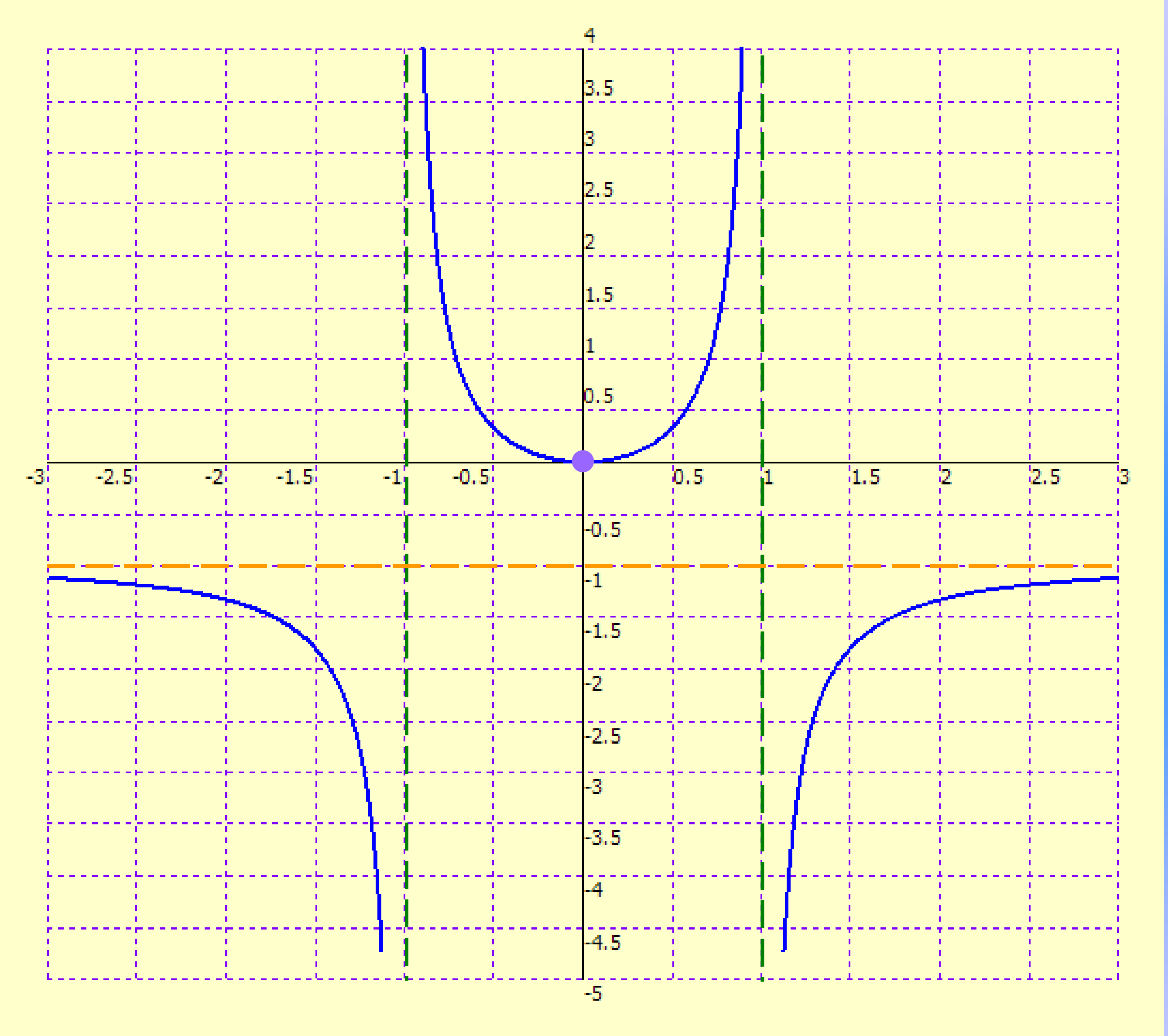
    Existen cambios de concavidad en $x = -1$ y en $x = 1$. Pero debido a que f no está definida en dichos puntos, f no tiene puntos de inflexión. Nótese que $f''(x)$ no tiene raíces

11. Un bosquejo de la gráfica de f es el siguiente:

    $R_f = (-\infty, -1) \bigcup [0, +\infty)$


$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$
y
x = −1
x = 1
y = f(x)
x
−1
0
1
−1
y = −1

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$$



Ejemplo 9.1.5 *Dada la función definida por* $\boxed{f(x) = (4-x)x^{1/3}}$, *obtener: dominio, raíces, paridad, intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.*

▼

1. Dominio: $D_f = \mathbb{R}$
2. Raíces: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (4-x)x^{\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; x = 4$
3. Paridad: f no es par ni impar pues $f(x) \neq \pm f(-x) = \pm(4+x)x^{\frac{1}{3}}$
4. Intervalos de continuidad: por ser producto de funciones continuas en $\mathbb{R}$, f es continua en $\mathbb{R}$ por lo que no tiene discontinuidades ni asíntotas verticales.
5. Asíntotas horizontales: tampoco tiene asíntotas horizontales pues $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

$$\boxed{f(x) = (4-x)x^{1/3}}$$

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Derivamos

$$f(x) = (4-x)x^{1/3} = 4x^{1/3} - x^{4/3}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3} - \frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^{2/3}} - x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{x^{2/3}}\right)$$

Primero resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$, para encontrar sus raíces

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{x^{2/3}}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1-x=0 \;\Leftrightarrow\; x=1$$

Luego excluimos $x = 0$ ya que $f'(0)$ no existe y así obtenemos los intervalos

$$(-\infty, 0),\ (0,1) \text{ y } (1,+\infty)$$

$$f(x) = (4-x)x^{1/3}$$

En el siguiente cuadro se puede apreciar el signo de $f'(x)$ para un valor de prueba dentro de un intervalo. Con esto obtenemos el signo de la primera derivada dentro de dicho intervalo y por lo tanto el tipo de monotonía ahí.

Intervalo	*Valor de prueba*	$f'(x)$	*f es estrictamente*
$-\infty < x < 0$	$x = -1$	$\frac{8}{3} > 0$	creciente
$0 < x < 1$	$x = \frac{1}{8}$	$\frac{14}{3} > 0$	creciente
$1 < x < +\infty$	$x = 8$	$-\frac{7}{3} < 0$	decreciente

Entonces, la función f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$

Esto es claro ya que el signo de $f'(x)$ es el de $(1-x)$ pues $\frac{4}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} > 0$ siempre

$$\boxed{f(x) = (4-x)x^{1/3}}$$

7. Puntos críticos y su clasificación:

Por el inciso anterior se sabe que: $f'(x) = 0$ en $x = 1$; que la función f es creciente en el intervalo $(0, 1)$ y que es decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$

Entonces, por el criterio de la primera derivada, la función f tiene en $x = 1$ un máximo local estricto. Las coordenadas de dicho punto son $[1, f(1)] = (1, 3)$

8. Intervalos de concavidad:

$$f''(x) = \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(x^{-2/3} - x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}x^{-5/3} - \frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{4}{9}\left(\frac{2}{x^{5/3}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right) = -\frac{4}{9}\left(\frac{2+x}{x^{5/3}}\right)$$

Primero resolvemos la igualdad $f''(x) = 0$ para determinar sus raíces

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{9}\left(\frac{x+2}{x^{5/3}}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\boxed{f(x) = (4-x)x^{1/3}}$$

Luego excluimos $x = 0$ ya que $f''(0)$ no existe y así obtenemos los intervalos

$$(-\infty, -2), (-2, 0) \text{ y } (0, +\infty)$$

Intervalo	*Valor de prueba*	$f''(x)$	*f es cóncava hacia*
$-\infty < x < -2$	$x = -8$	$-\frac{1}{12} < 0$	abajo
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$\frac{4}{9} > 0$	arriba
$0 < x < +\infty$	$x = 8$	$-\frac{5}{36} < 0$	abajo

Entonces, la función f es cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$ y es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-2, 0)$

$$\boxed{f(x) = (4-x)x^{1/3}}$$

9. Puntos de inflexión:

La función f tiene cambios de concavidad en $x=-2$ y en $x=0$; además es continua en dichos puntos. Por esto tiene puntos de inflexión en $x=-2$ y en $x=0$. Las coordenadas de dichos puntos de inflexión son $[-2, f(-2)] = (-2, 6\sqrt[3]{-2}) \approx (-2, -7.56)$ y $[0, f(0)] = (0,0)$

Es importante notar que en $x=0$ la función f es continua, no es derivable y tiene un punto de inflexión. De hecho tiene tangente vertical, pues:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{(4-h)h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{4-h}{h^{\frac{2}{3}}} = \text{“}\left(\frac{4}{0^+}\right)\text{”} = +\infty$$

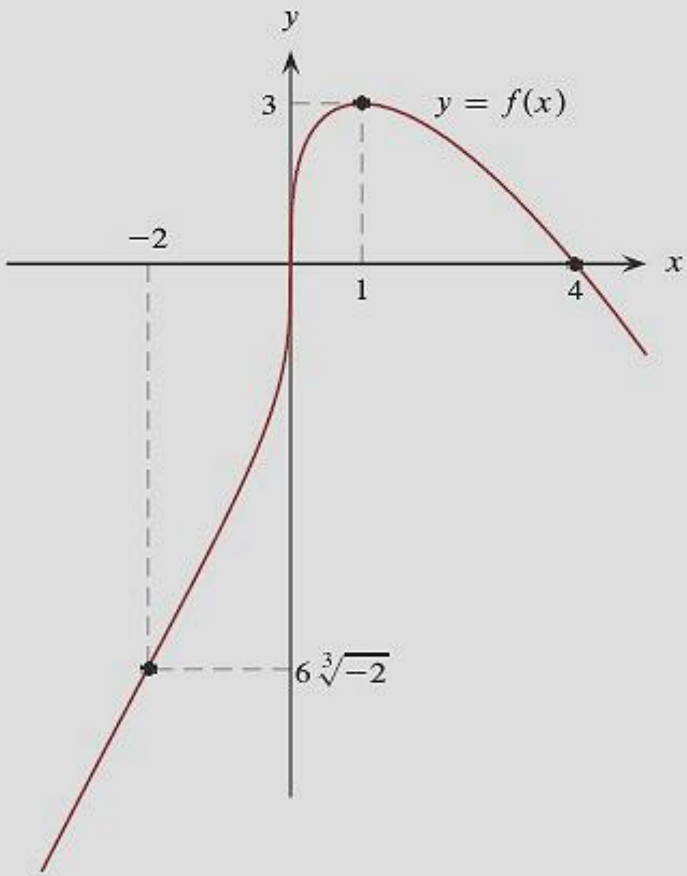
$h \to 0$

$$\boxed{f(x) = (4 - x)x^{1/3}}$$

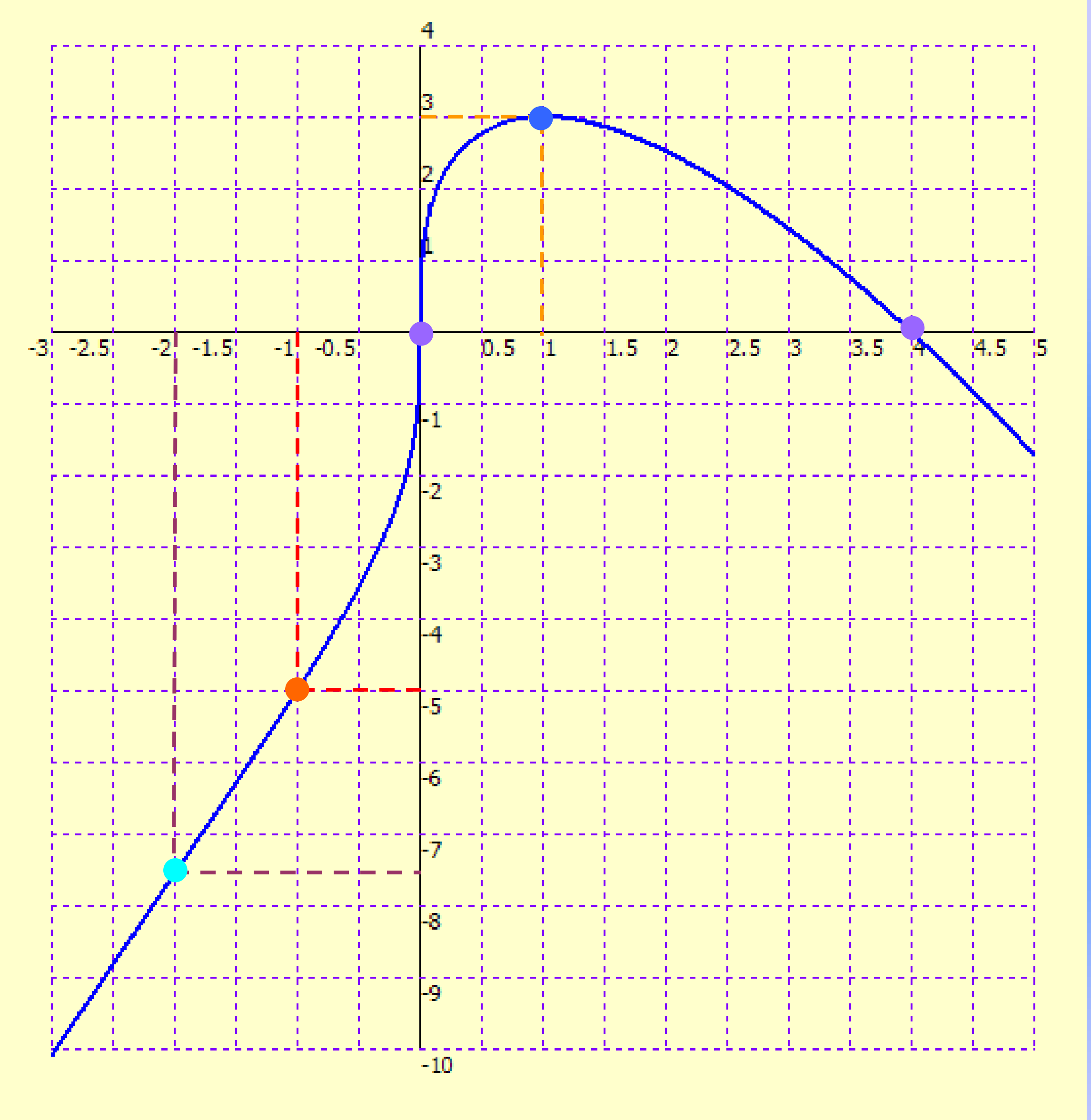
10. Un bosquejo de la gráfica es el siguiente:

El máximo local resulta ser el máximo absoluto y

$R_f = (-\infty, 3]$



$$f(x) = (4 - x)\sqrt[3]{x}$$



Ejercicios 9.1.1

Problemas del texto sugeridos a resolver

Gráfica de una función polinomial

3. Para la función $h(x) = x^4 - 8x^2 + 18$, encuentre:
   a. Los intervalos en los cuales h es creciente o bien decreciente.
   b. Los valores máximos y mínimos locales de h.
   c. Los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Los puntos de inflexión.
   d. Bosqueje la gráfica de esa función.

4. Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 1$
   a. Encontrar los intervalos de monotonía de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es creciente y aquellos donde es decreciente.
   b. Encontrar los intervalos de concavidad de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es cóncava hacia abajo y aquellos donde es cóncava hacia arriba.
   c. Hacer un bosquejo de la gráfica de la función.

6. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^4}{2} - x^2 + 3$.
   a. Determinar dominio, intervalos de continuidad y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (No determine las raíces de f.)
   b. Determine los puntos críticos y los intervalos de monotonía.
   c. Clasifique los puntos críticos (extremos) y determine los intervalos de concavidad.
   d. Obtenga los puntos de inflexión, la gráfica de f y el número de raíces de f. (No intente calcular las raíces de f.)

Ejercicios 9.1.2

Gráfica de una función racional

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$. Proporcione:

   a. El dominio de la función : D_f.
   b. Las raíces de la función.
   c. Los intervalos de monotonía.
   d. Los intervalos de concavidad.
   e. La gráfica de la función.

Problemas del texto sugeridos a resolver

10. Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, determine:

    a. Dominio, raíces y paridad.
    b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
    c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo y puntos de inflexión.
    d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
    e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
    f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
    g. Esbozo gráfico y rango.

13. Para la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x}$, determine:

    a. Dominio, raíces, paridad.
    b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
    c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión.
    d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
    e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
    f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
    g. Esbozo gráfico y rango.

Ejercicios 9.1.3

Problemas del texto sugeridos a resolver

Gráfica de una función con radicales

1. Sea $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}$, determinar D_f; intervalos de monotonía y de concavidad; máximos y mínimos locales, y puntos de inflexión. Usando esta información, dibujar un esbozo de la gráfica de la función $f(x)$.

4. Grafique la función $f(x) = x^{\frac{1}{5}}(x+3)$ señalando claramente:

   a. Dominio y raíces.
   b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   c. Máximos y mínimos relativos.
   d. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo.
   e. Puntos de inflexión.
   f. Máximos y mínimos absolutos (si los hubiese).
   g. Gráfica de la función.

La Sección 9.2 se deja para estudio

Interpretación de gráficas y símbolos

Con la finalidad de reafirmar la relación existente entre el contenido de un concepto, la notación simbólica utilizada para representarlo y la interpretación gráfica de dicho concepto, mediante ejemplos, trataremos de inducir al lector para que lleve a cabo actividades importantes como son las siguientes:

- A partir de la gráfica de una función f desconocida, obtener información sobre características relevantes de dicha función f
- A partir de condiciones impuestas mediante notación simbólica a una función, bosquejar una posible gráfica de dicha función
- A partir de la gráfica de f' o bien de f'', obtener información sobre algunas características de la función f

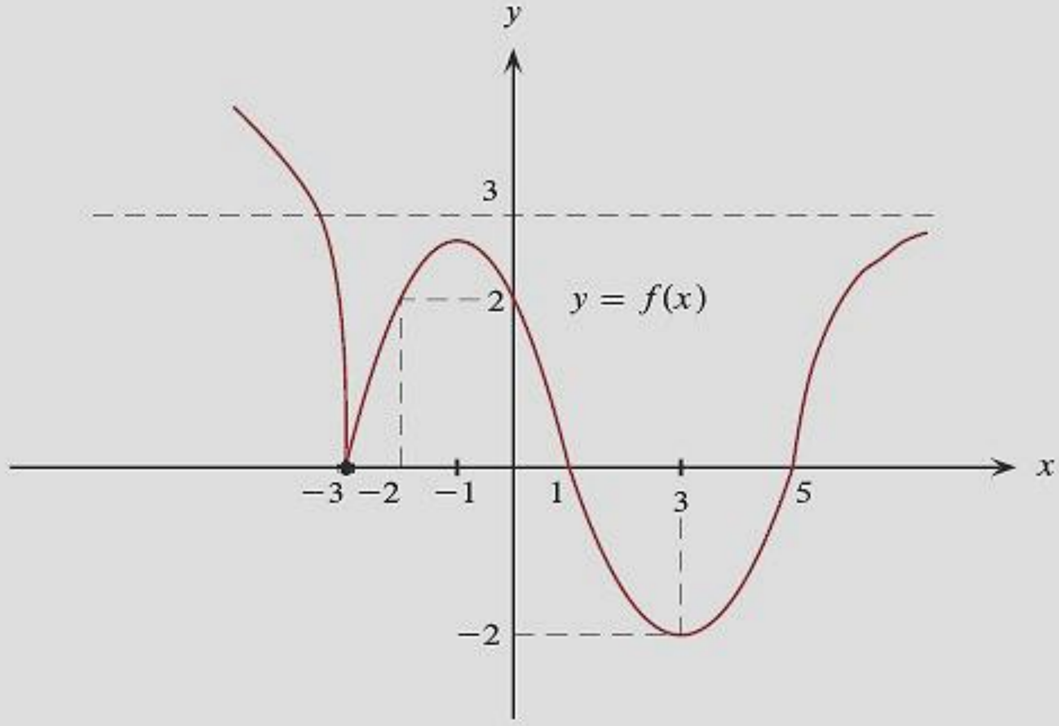
Para el éxito de estas actividades se debe tener claridad en los conceptos, en las notaciones simbólicas utilizadas para representarlos y en las interpretaciones gráficas asociadas a dichos conceptos.

Ejemplo 9.2.2 *Bosquejar la gráfica de una función continua $f(x)$ que satisfaga todas las condiciones siguientes:*

Problemas del texto sugeridos a resolver

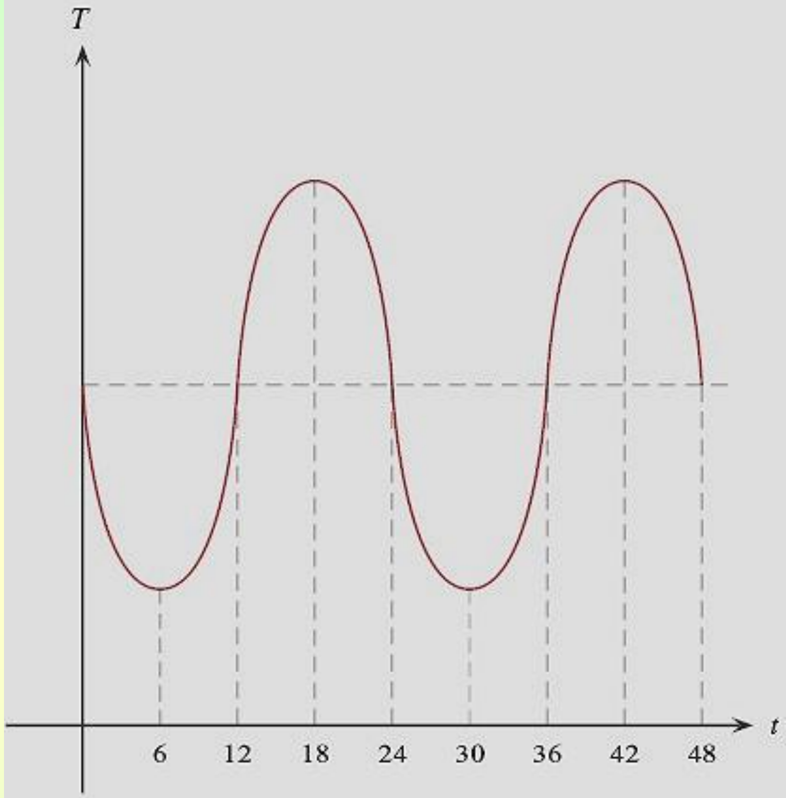
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$
3. $f(-3) = 0$
4. $f(-2) = 2$
5. $f(1) = 0$
6. $f(3) = -2$
7. $f(5) = 0$
8. $f'(-3)$ *no existe*
9. $f'(-1) = 0$
10. $f'(3) = 0$
11. $f'(x) < 0$ *si* $x \in (-\infty, -3) \bigcup (-1, 3)$
12. $f'(x) > 0$ *si* $x \in (-3, -1) \bigcup (3, +\infty)$
13. $f''(x) < 0$ *si* $x \in (-\infty, -3) \bigcup (-3, 1) \bigcup (5, +\infty)$
14. $f''(x) > 0$ *si* $x \in (1, 5)$

Una posible gráfica de la función $f(x)$:



Ejemplo 9.2.3 *En la figura siguiente se muestra la gráfica de la temperatura* T *como función del tiempo* t, *en un periodo de dos días de primavera en la ciudad de Monterrey, empezando desde las* 0 *horas del primer día. Conteste lo siguiente:*

1. *¿En qué intervalos de tiempo la razón de cambio* T *con respecto a* t *es positiva?*
2. *¿En qué intervalos de tiempo la temperatura está bajando?*
3. *¿En qué intervalos la gráfica es cóncava hacia arriba y en cuáles hacia abajo?*
4. *¿En qué valores de* t *se localizan los puntos de inflexión y cómo los interpreta en términos de la temperatura?*
5. *Finalmente, explique con palabras el comportamiento de la temperatura durante los dos días.*



1. $\dfrac{dT}{dt} > 0$ en los intervalos de tiempo $(6, 18)$ y $(30, 42)$
2. T decrece en los intervalos $(0, 6)$, $(18, 30)$ y $(42, 48)$
3. La gráfica de T es cóncava hacia arriba en los intervalos $(0, 12)$ y $(24, 36)$

   La gráfica de T es cóncava hacia abajo en los intervalos $(12, 24)$ y $(36, 48)$
4. Los puntos de inflexión están en $t = 12$, $t = 24$ y en $t = 36$

   $\dfrac{dT}{dt}$ pasa de crecer (12 y 36) a decrecer (24)
5. Durante el segundo día, la temperatura tiene el mismo comportamiento (iguales características) que durante el primer día. La temperatura mínima a las seis de la mañana y la máxima a las seis de la tarde.

Ejercicios 9.2.1

Problemas del texto sugeridos a resolver

Gráfica de una función sujeta a ciertas condiciones.

2. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumple los requisitos siguientes:

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$;

b. $\lim_{x \to -4} f(x) = 0$;

c. $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$;

d. $f'(x) > 0$ para $x < -2$;

e. $f''(x) > 0$ para $x < -2$;

f. $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$;

g. $f(0) = -3$;

h. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$;

i. $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 1$;

j. $f''(x) < 0$ para $-2 < x < 1$;

k. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$;

l. $f(3) = -1$;

m. $f'(3) = 0$;

n. $f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$;

o. $f'(x) > 0$ para $x > 3$;

p. $f''(x) > 0$ para $1 < x < 5$;

q. $f(5) = 0$;

r. $f''(x) < 0$ para $x > 5$;

s. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

5. Trace una posible gráfica para una función f continua en su dominio: $[-4, +\infty) - \{-3, 2\}$ y que satisfaga:

- $f(-4) = 2$;
- $f(1) = -1$;
- $\lim_{x \to -3} f(x) = 3$;
- $f'(-2) = 0$;
- $f'(-1) = 0$;
- $f'(1) = 0$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (-4, -2) - \{-3\}$;
- $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (-2, 1) - \{-1\}$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (1, 2)$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (2, \infty)$.

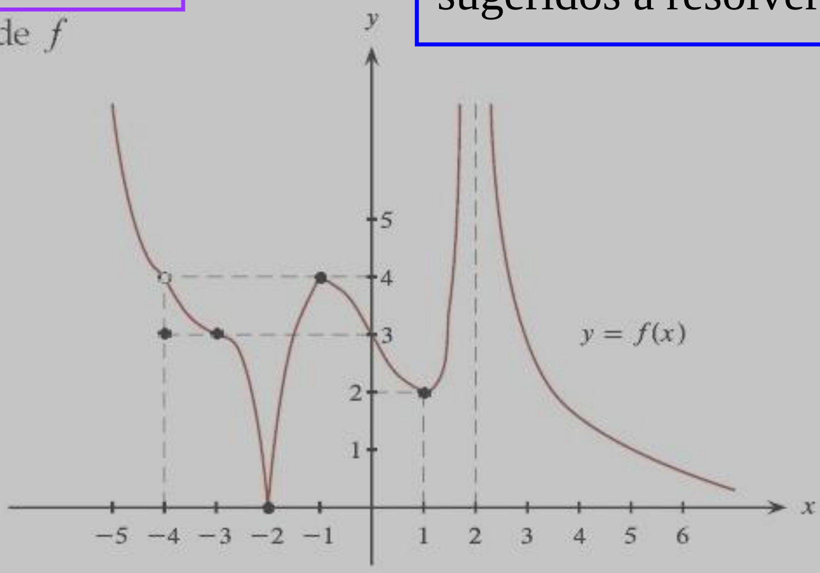
Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica y los máximos y mínimos locales y absolutos.

Ejercicios 9.2.2

Interpretar la gráfica de una función.

Problema del texto sugeridos a resolver

4. A partir de la gráfica de f



determine el conjunto de puntos del dominio de f que satisfacen:

a. $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$.

b. $f'' > 0$, $f''(x) < 0$, $f''(x) = 0$.

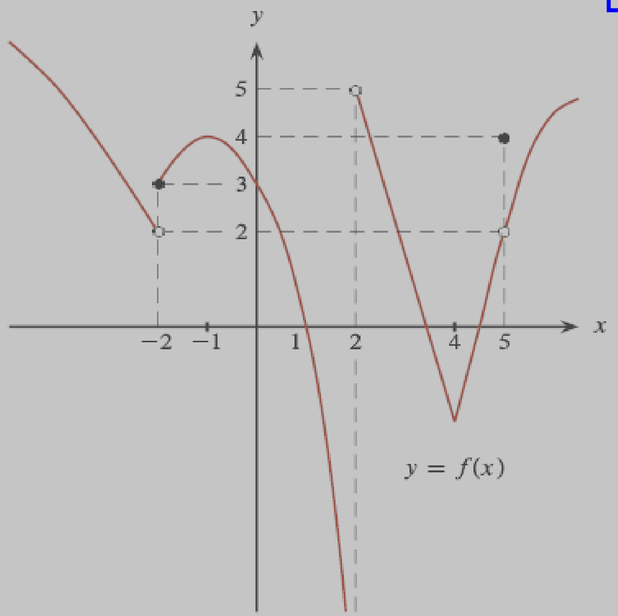
c. $f'(x)$ no existe.

Ejercicios 9.2.2

Interpretar la gráfica de una función.

Problema del texto sugeridos a resolver

6. Sea f la función que tiene la siguiente gráfica determine:



a. Los intervalos de continuidad y los siguientes valores

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \ \lim_{x\to a^+} f(x), \ \lim_{x\to a} f(x) \ \& \ f(a) \quad \text{para } a=-2,\ a=2,\ a=5.$$

b. La clasificación de discontinuidades. ¿En cuáles puntos y con qué valores se puede redefinir $f(x)$ para convertirla en una función continua en esos puntos?

c. Los intervalos donde $f' > 0$, $f'(x) < 0$ y los puntos donde $f' = 0$, o donde no existe la derivada.