

CAPÍTULO

10

Optimización

Problemas de optimización

Un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable. En otras palabras se trata de calcular o determinar el valor mínimo o el valor máximo de una función de una variable.

Se debe tener presente que la variable que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada como función de otra de las variables relacionadas en el problema.

En ocasiones es preciso considerar las restricciones que se tengan en el problema, ya que éstas generan igualdades entre las variables que permiten la obtención de la función de una variable que se quiere minimizar o maximizar.

Problemas de optimización

En este tipo de problemas se debe contestar las siguientes preguntas

- ¿Qué se solicita en el problema?

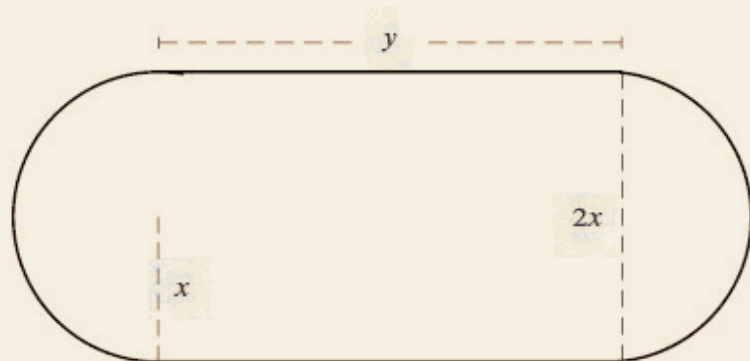
La respuesta nos lleva a definir la función que deberá ser minimizada o maximizada

- ¿Qué restricciones aparecen en el problema?

La respuesta dará origen a (al menos) una ecuación que será auxiliar para expresar la función deseada como una función de una variable.

Maximizar

Ejemplo 10.1.3 Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del terreno es de 50 m, encontrar las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima.



El área del terreno es $A = 2xy + \pi x^2$

El perímetro, $P = 50$ m, está dado por

$$P = 2y + 2\pi x, \text{ por lo que}$$

$$2y + 2\pi x = 50 \Rightarrow y = \frac{50 - 2\pi x}{2} = 25 - \pi x$$

Si sustituimos este valor en la fórmula del área, la tendremos expresada como función de una variable x

$$A(x) = 2x(25 - \pi x) + \pi x^2 = 50x - \pi x^2$$

Su punto crítico se obtiene cuando $A'(x) = 0$

$$A'(x) = (50x - \pi x^2)' = 50 - 2\pi x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}$$

Como $A''(x) = -2\pi < 0$, se trata en efecto de un máximo;

además $y = 25 - \pi \frac{25}{\pi} = 0$, es decir, el área máxima se obtiene cuando el terreno tiene la forma circular.

Éste fue un típico problema isoperimétrico, en el que se pide hallar una figura de área máxima teniendo el perímetro fijo, como se cuenta que se construyó la ciudad de Cartago sobre el máximo terreno que se pudiese abarcar con una cuerda hecha a partir de una piel de vaca.

$$A_{\max} = \pi \left(\frac{25}{\pi} \right)^2 = \frac{625}{\pi} = 198.94368 \text{ m}^2 ; 198.94 \text{ m}^2 \approx 200 \text{ m}^2$$

$$A = 2xy + \pi x^2 \quad ; \quad P = 2y + 2\pi x, P \in \mathbb{R}, P > 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{P}{2} - \pi x \quad \Rightarrow \quad A(x) = Px - \pi x^2$$

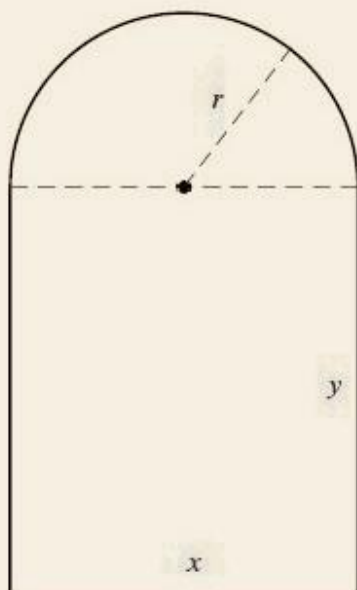
$$\Rightarrow A'(x) = P - 2\pi x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{P}{2\pi}$$

$$\Rightarrow A''(x) = -2\pi < 0 \quad \text{para cada } x$$

$$\Rightarrow x_{\max} = \frac{P}{2\pi}, y = 0 \quad ; \quad A_{\max} = \pi \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 = \frac{P^2}{4\pi}$$

Maximizar

Ejemplo 10.1.4 Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima, si su perímetro es de 10 m.



Si A es el área que deseamos que sea máxima y P es el perímetro de la ventana, entonces

$$A = xy + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$P = x + 2y + \pi r$$

Pero debido a que $r = \frac{x}{2}$ y $P = 10$

$$\begin{aligned} A &= xy + \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 & 10 &= x + 2y + \pi \left(\frac{x}{2}\right) \\ &= xy + \frac{\pi}{8}x^2 & &= x \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = 5 - \frac{2 + \pi}{4}x \Rightarrow A(x) = x \left(5 - \frac{2 + \pi}{4}x\right) + \frac{\pi}{8}x^2 = -\frac{\pi + 4}{8}x^2 + 5x$$

$A(x)$ es la función de la variable x que queremos maximizar

Derivando y calculando puntos críticos

$$A'(x) = -\frac{\pi + 4}{4}x + 5 \quad A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi + 4}{4}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{20}{\pi + 4}$$

Entonces, $A(x)$ tiene un punto crítico en $x_1 = \frac{20}{\pi + 4}$

$$\Rightarrow A''(x) = -\frac{\pi + 4}{4} \text{ para cada } x \Rightarrow A''(x_1) < 0$$

$\Rightarrow A(x)$ tiene un máximo local estricto en x_1

Entonces el área A de la ventana es máxima cuando $x = \frac{20}{\pi + 4} \text{ m}$
para la cual

$$y = 5 - \frac{\pi + 4}{4}x = \frac{10}{\pi + 4} \text{ m}$$

Vemos que $y = \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow A = xy + \frac{1}{8}\pi x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 = \frac{\pi + 4}{8}x^2$$

$$\Rightarrow A_{\max} = \frac{\pi + 4}{8}x_{\max}^2 = \left(\frac{\pi + 4}{8}\right)\left(\frac{20}{\pi + 4}\right)^2 = \frac{50}{\pi + 4} \approx 7 \text{ m}^2$$

$$A = xy + \frac{1}{8}\pi x^2 \quad ; \quad P = x\left(\frac{2+\pi}{2}\right) + 2y, P \in \mathbb{R}, P > 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{P}{2} - \left(\frac{2+\pi}{4}\right)x \Rightarrow A(x) = \frac{P}{2}x - \left(\frac{\pi+4}{8}\right)x^2$$

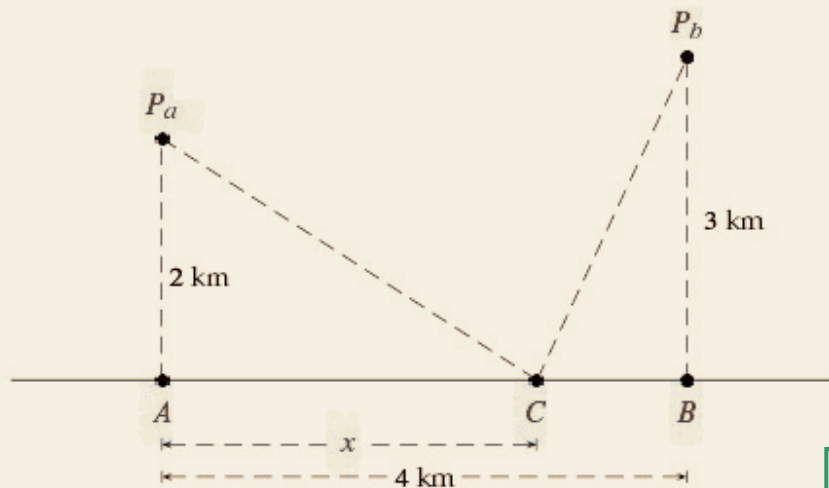
$$\Rightarrow A'(x) = \frac{P}{2} - \left(\frac{\pi+4}{4}\right)x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2P}{\pi+4}$$

$$\Rightarrow A''(x) = -\left(\frac{\pi+4}{4}\right) < 0 \quad \text{para cada } x$$

$$\Rightarrow x_{\max} = \frac{2P}{\pi+4}, y = \frac{P}{\pi+4} = \frac{1}{2}x_{\max} \quad ; \quad A_{\max} = \frac{P^2}{2(\pi+4)}$$

Minimizar

Ejemplo 10.1.7 Dos poblados P_a y P_b están a 2 km y 3 km, respectivamente, de los puntos más cercanos A y B sobre una línea de transmisión, los cuales están a 4 km uno del otro. Si los dos poblados se van a conectar con un cable a un mismo punto de la línea, ¿cuál debe ser la ubicación de dicho punto para utilizar el mínimo de cable?



Sea C el punto de conexión ubicado a x km del punto A y a $4 - x$ km del punto B .

Si l es la longitud del cable utilizado para conectar P_a y P_b con C , entonces

$$l = \overline{P_a C} + \overline{P_b C} = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(4 - x)^2 + 3^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow l = \sqrt{4} + \sqrt{25} = 7.0 \text{ km}$$

$$x = 4 \Rightarrow l = \sqrt{20} + \sqrt{9} \approx 7.5 \text{ km}$$

32

La función a minimizar es $l(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(4-x)^2 + 9}$

Derivando y obteniendo puntos críticos

$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2 + 9}}$$

$$l'(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{(4-x)^2 + 9} = (4-x)\sqrt{x^2 + 4}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad

$$x^2[(4-x)^2 + 9] = (4-x)^2(x^2 + 4) \Rightarrow 5x^2 + 32x - 64 = 0$$

Esta ecuación tiene por soluciones $x = \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4(5)(-64)}}{2(5)} = \frac{-32 \pm 48}{10}$

De donde se obtienen dos puntos críticos que son $x_1 = 1.6$ así como $x_2 = -8$

Claramente el valor $x_2 = -8 < 0$ es descartado y sólo consideramos $x_1 = 1.6$

Ya que $l''(x) = \frac{4}{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{9}{[(4 - x)^2 + 9]^{\frac{3}{2}}}$ entonces $l''(x) > 0$ para cada x

En particular $l''(1.6) > 0$, por lo que $l(x)$ es mínima cuando $x = 1.6$ km

Puesto que $0 \leq x \leq 4$, calculemos los números $l(0)$, $l(1.6)$ y $l(4)$

$$l(0) = \sqrt{0^2 + 4} + \sqrt{(4 - 0)^2 + 9} = 7$$

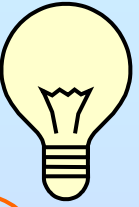
$$l(1.6) = \sqrt{(1.6)^2 + 4} + \sqrt{(4 - 1.6)^2 + 9} = \sqrt{6.56} + \sqrt{14.76} \approx 6.4$$

$$l(4) = \sqrt{4^2 + 4} + \sqrt{(4 - 4)^2 + 9} = \sqrt{20} + 3 \approx 7.5$$

Se ve que $l(x)$ es menor cuando $x = 1.6$ km, siendo la longitud mínima del cable igual a 6.4 km

¿Qué alternativas puede haber para generalizar este problema?

- 1) Siendo la distancia AB una constante se puede considerar el mismo problema con $AB = d$, siendo d un número positivo,
- 2) Siendo las distancias $P_a A$ y $P_b B$ constantes se puede considerar el mismo problema con $P_a A = a$ y $P_b B = b$, siendo a, b números positivos,
- 3) Considerando las alternativas 1) y 2) simultáneamente, en cuyo caso, deben plantearse las hipótesis necesarias.



$$l(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(d-x)^2 + b^2} \quad ; \quad a, b, d > 0 \text{ y } b > a$$

$$\Rightarrow l'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(d-x)^2 + b^2} = (d-x)\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2[(d-x)^2 + b^2] = (d-x)^2(x^2 + a^2)$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - a^2)x^2 + 2a^2dx - a^2d^2 = 0$$

$$\alpha = b^2 - a^2$$

$$\beta = 2a^2d$$

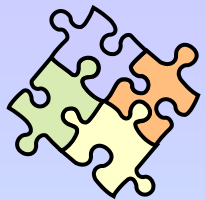
$$\gamma = -a^2d^2$$



$$\Leftrightarrow x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-ad(a \mp b)}{b^2 - a^2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{ad(b-a)}{b^2 - a^2} = \frac{ad}{b+a} \\ x_2 = \frac{-ad(b+a)}{b^2 - a^2} = \frac{-ad}{b-a} \end{array} \right.$$

Por hipótesis, $a, b, d > 0$ y $b > a \Rightarrow$ se descarta $x_2 < 0$; además, $x_1 > 0$

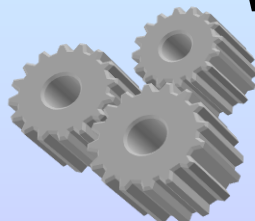
$$l'(x) = x(x^2 + a^2)^{-1/2} - (d-x)[(d-x)^2 + b^2]^{-1/2}$$



$$\Rightarrow l''(x) = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{[(d-x)^2 + b^2]^{3/2}} > 0 \quad \forall x \in (0, d)$$

En particular, $l''(x_1) > 0 \Rightarrow l(x)$ es mínima en $x = x_1$

$$\Rightarrow l(x_1) = \sqrt{\left(\frac{ad}{a+b}\right)^2 + a^2} + \sqrt{\left(d - \frac{ad}{a+b}\right)^2 + b^2}$$



$$l(x_1) = \sqrt{d^2 + (a+b)^2}$$

$$x=0 \Rightarrow l(0) = a + \sqrt{d^2 + b^2} \quad ; \quad x=d \Rightarrow l(d) = b + \sqrt{d^2 + a^2}$$

No es difícil demostrar que: $l(0) > l(x_1)$ y $l(d) > l(x_1)$

$$\Rightarrow l(x_1) = \min_{0 \leq x \leq d} l(x) \quad ; \quad \text{mínimo absoluto}$$



Trabajo de pizarrón:

$$\begin{aligned}l'(x) &= \frac{dl}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ (x^2 + a^2)^{1/2} + [(d-x)^2 + b^2]^{1/2} \right\} = \frac{d}{dx} (x^2 + a^2)^{1/2} + \frac{d}{dx} [(d-x)^2 + b^2]^{1/2} \\&= \frac{1}{2} (x^2 + a^2)^{(1/2)-1} \frac{d}{dx} (x^2 + a^2) + \frac{1}{2} [(d-x)^2 + b^2]^{(1/2)-1} \frac{d}{dx} [(d-x)^2 + b^2] \\&= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{2(d-x)^{2-1}(-1)}{2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} \quad \square\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& x^2[(d-x)^2 + b^2] = (d-x)^2(x^2 + a^2) \\ \Rightarrow & x^2(d-x)^2 + x^2b^2 = x^2(d-x)^2 + a^2(d-x)^2 \\ \Rightarrow & \cancel{x^2(d-x)^2} + x^2b^2 = \cancel{x^2(d-x)^2} + a^2(d^2 - 2dx + x^2) \\ \Rightarrow & x^2b^2 = a^2d^2 - 2a^2dx + a^2x^2 \\ \Rightarrow & b^2x^2 - a^2x^2 + 2a^2dx - a^2d^2 = 0 \\ \Rightarrow & (b^2 - a^2)x^2 + 2a^2dx - a^2d^2 = 0 \quad \square\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \alpha = b^2 - a^2 \quad ; \quad \beta = 2a^2d \quad ; \quad \gamma = -a^2d^2 \\
 \Rightarrow x &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-2a^2d \pm \sqrt{(2a^2d)^2 - 4(b^2 - a^2)(-a^2d^2)}}{2(b^2 - a^2)} \\
 &= \frac{-2a^2d \pm \sqrt{4a^4d^2 + 4a^2d^2(b^2 - a^2)}}{2(b^2 - a^2)} = \frac{-2a^2d \pm 2ad\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)}}{2(b^2 - a^2)} \\
 &= \frac{-2a^2d \pm 2ad\sqrt{\cancel{a^2} + b^2 - \cancel{a^2}}}{2(b^2 - a^2)} = \frac{-2a^2d \pm 2adb}{2(b^2 - a^2)} = \frac{-a^2d \pm adb}{b^2 - a^2} = \frac{-ad(a \mp b)}{b^2 - a^2} \quad \square
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-ad(a \mp b)}{b^2 - a^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-ad(a - b)}{(b + a)(b - a)} = \frac{ad \cancel{(b - a)}}{(b + a) \cancel{(b - a)}} = \frac{ad}{b + a} > 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{(> 0)(> 0)}{(> 0) + (> 0)} \\ x_2 = \frac{-ad(a + b)}{(b + a)(b - a)} = \frac{-ad \cancel{(b + a)}}{(\cancel{b + a})(b - a)} = \frac{-ad}{b - a} < 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{-(> 0)(> 0)}{(> 0)} \quad \square \end{cases}$$

$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = x(x^2 + a^2)^{-1/2} - (d-x)[(d-x)^2 + b^2]^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow l''(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ x(x^2 + a^2)^{-1/2} - (d-x)[(d-x)^2 + b^2]^{-1/2} \right\} \\ &= \frac{d}{dx} x(x^2 + a^2)^{-1/2} - \frac{d}{dx} (d-x)[(d-x)^2 + b^2]^{-1/2} \\ &= \left\{ x \frac{d}{dx} (x^2 + a^2)^{-1/2} + \frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} x \right\} - \\ &\quad \left\{ (d-x) \frac{d}{dx} [(d-x)^2 + b^2]^{-1/2} + \frac{1}{[(d-x)^2 + b^2]^{1/2}} \frac{d}{dx} (d-x) \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} x(x^2 + a^2)^{(-1/2)-1} \frac{d}{dx} (x^2 + a^2) + \frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right\} - \\ &\quad \left\{ -\frac{1}{2} (d-x)[(d-x)^2 + b^2]^{(-1/2)-1} \frac{d}{dx} [(d-x)^2 + b^2] + \frac{1}{[(d-x)^2 + b^2]^{1/2}} (-1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow l''(x) &= \left\{ -\frac{1}{2} x(x^2 + a^2)^{-3/2} (2x) + \frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right\} - \\
&\quad \left\{ -\frac{1}{2} (d-x)[(d-x)^2 + b^2]^{-3/2} [2(d-x)^{2-1} \frac{d}{dx}(d-x)] - \frac{1}{[(d-x)^2 + b^2]^{1/2}} \right\} \\
&= \left\{ \frac{-x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right\} - \left\{ \frac{-(d-x)^2(-1)}{[(d-x)^2 + b^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(d-x)^2 + b^2]^{1/2}} \right\} \\
&= \left\{ \frac{-x^2 + x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \right\} - \left\{ \frac{(d-x)^2 - [(d-x)^2 + b^2]}{[(d-x)^2 + b^2]^{3/2}} \right\} \\
&= \left\{ \frac{-\cancel{x^2} + \cancel{x^2} + a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \right\} - \left\{ \frac{\cancel{(d-x)^2} - \cancel{(d-x)^2} - b^2}{[(d-x)^2 + b^2]^{3/2}} \right\} = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{[(d-x)^2 + b^2]^{3/2}} \quad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l(x_1) &= \sqrt{x_1^2 + a^2} + \sqrt{(d - x_1)^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{ad}{a+b}\right)^2 + a^2} + \sqrt{\left(d - \frac{ad}{a+b}\right)^2 + b^2} \\
&= \sqrt{\frac{a^2 d^2}{(a+b)^2} + a^2} + \sqrt{\left(\frac{\cancel{ad} + bd - \cancel{ad}}{a+b}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{a^2 d^2 + a^2 (a+b)^2}{(a+b)^2}} + \sqrt{\frac{b^2 d^2}{(a+b)^2} + b^2} \\
&= \frac{a}{a+b} \sqrt{d^2 + (a+b)^2} + \sqrt{\frac{b^2 d^2}{(a+b)^2} + b^2} = \frac{a}{a+b} \sqrt{d^2 + (a+b)^2} + \sqrt{\frac{b^2 d^2 + b^2 (a+b)^2}{(a+b)^2}} \\
&= \frac{a}{a+b} \sqrt{d^2 + (a+b)^2} + \frac{b}{a+b} \sqrt{d^2 + (a+b)^2} = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) \sqrt{d^2 + (a+b)^2} \\
&= \sqrt{d^2 + (a+b)^2} \quad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l(x) &= \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(d - x)^2 + b^2} \\
\Rightarrow l(0) &= \sqrt{0^2 + a^2} + \sqrt{(d - 0)^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{d^2 + b^2} = a + \sqrt{d^2 + b^2} \\
\Rightarrow l(d) &= \sqrt{d^2 + a^2} + \sqrt{(d - d)^2 + b^2} = \sqrt{d^2 + a^2} + \sqrt{b^2} = b + \sqrt{d^2 + a^2} \quad \square
\end{aligned}$$

$$0 < l(0) < l(x_1) \Rightarrow l^2(0) = l(0)l(0) < l(x_1)l(0) < l(x_1)l(x_1) = l^2(x_1)$$

$$\begin{aligned} l^2(0) < l^2(x_1) &\Leftrightarrow \left(a + \sqrt{d^2 + b^2}\right)^2 < \left(\sqrt{d^2 + (a+b)^2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 2a\sqrt{d^2 + b^2} + (d^2 + b^2) < d^2 + (a+b)^2 = d^2 + a^2 + 2ab + b^2 \\ &\Leftrightarrow 2a\sqrt{d^2 + b^2} < 2ab \Leftrightarrow \sqrt{d^2 + b^2} < b \Leftrightarrow d^2 + b^2 < b^2 \\ &\Leftrightarrow ; d^2 < 0! \Rightarrow l(0) > l(x_1) \quad \square \end{aligned}$$

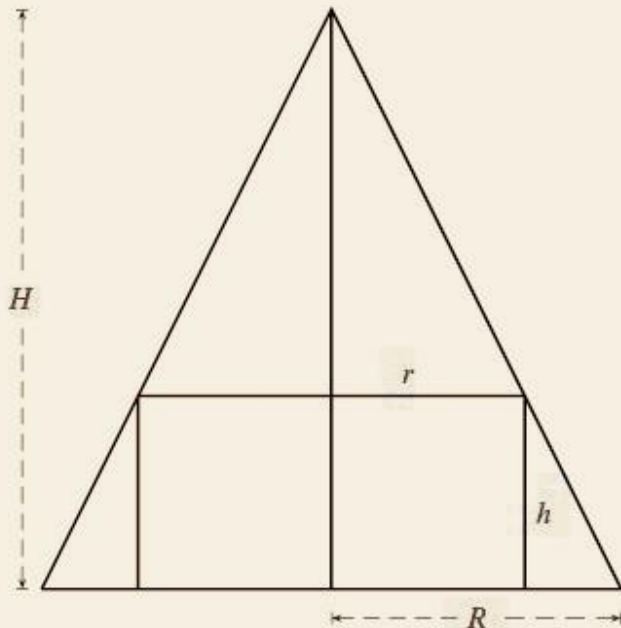
$$0 < l(d) < l(x_1) \Rightarrow l^2(d) = l(d)l(d) < l(x_1)l(d) < l(x_1)l(x_1) = l^2(x_1)$$

$$\begin{aligned} l^2(d) < l^2(x_1) &\Leftrightarrow \left(b + \sqrt{d^2 + a^2}\right)^2 < \left(\sqrt{d^2 + (a+b)^2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow b^2 + 2b\sqrt{d^2 + a^2} + (d^2 + a^2) < d^2 + (a+b)^2 = d^2 + a^2 + 2ab + b^2 \\ &\Leftrightarrow 2b\sqrt{d^2 + a^2} < 2ab \Leftrightarrow \sqrt{d^2 + a^2} < a \Leftrightarrow d^2 + a^2 < a^2 \\ &\Leftrightarrow ; d^2 < 0! \Rightarrow l(d) > l(x_1) \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 10.1.14 Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H .

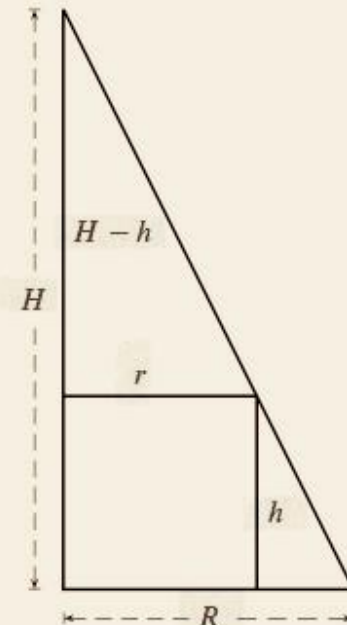
Consideramos que el cilindro tiene radio r y altura h

Maximizar



Una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje

El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$



Por semejanza se cumple la proporción

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H - h} \Rightarrow r = \frac{R}{H}(H - h)$$

sustituyendo

$$V = \pi r^2 h = \pi \left[\frac{R}{H}(H - h) \right]^2 h \Rightarrow \boxed{V(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2 h - 2Hh^2 + h^3)} \begin{cases} V(h = 0) = 0 \\ V(h = H) = 0 \end{cases}$$

función a maximizar

Derivamos para obtener los puntos críticos

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(3h^2 - 4Hh + H^2) \quad V'(h) = 0 \Rightarrow 3h^2 - 4Hh + H^2 = 0$$

Tenemos que

$$h = \frac{4H \pm \sqrt{(-4H)^2 - 4(3)H^2}}{2(3)} = \frac{4H \pm 2H}{6} \Rightarrow h_1 = H \quad y \quad h_2 = \frac{1}{3}H$$

$$V''(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6h - 4H) \quad V''(h_1) = \frac{\pi R^2}{H^2}2H > 0 \quad \text{mínimo local estricto}$$

$$V''(h_2) = -\frac{2\pi R^2}{H} < 0 \quad \text{máximo local estricto}$$

el volumen $V(h)$ es máximo cuando $\boxed{h = h_2 = \frac{1}{3}H \Rightarrow r_2 = \frac{R}{H}(H - \frac{1}{3}H) = \frac{2}{3}R}$

$$V_{max} = \frac{\pi R^2}{H^2} \left(H - \frac{1}{3}H \right)^2 \frac{1}{3}H = \frac{4}{27}\pi R^2 H$$

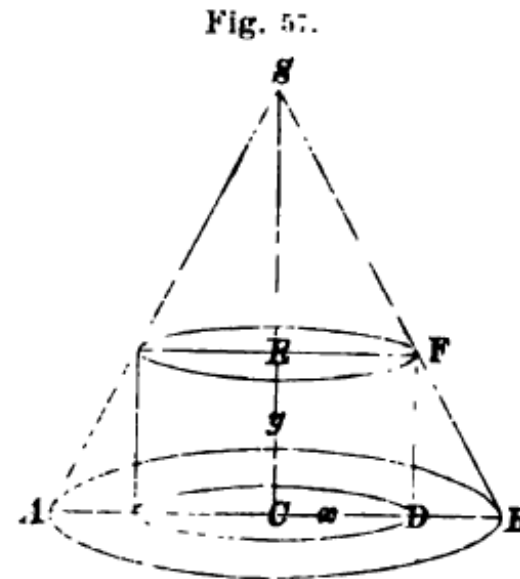
D. Aufgaben aus der Stereometrie.

Aufgabe 16. Man soll unter allen Cylindern, die sich in einen geraden Kegel einschreiben lassen, denjenigen bestimmen, welcher das grösste Volumen hat.

Auflösung. Die Höhe des gegebenen Kegels (Fig. 57) CS sei h , der Halbmesser CB der Grundfläche sei r , die Höhe CE des eingeschriebenen Cylinders sei y , und der Halbmesser CD seiner Grundfläche sei x . Dadurch findet man für das Volumen des Cylinders

$$(70.) \quad V = x^2 \pi y.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke SCB und FDB folgt
$$CS : CB = DF : DB,$$



oder

$$h : r = y : r - x,$$

folglich wird

$$(71.) \quad y = \frac{h}{r} (r - x) \quad \text{und} \quad V = \frac{h\pi}{r} x^2 (r - x).$$

Die Function, welche ein Maximum werden soll, ist daher
 (abgesehen von dem positiven constanten Factor $\frac{h\pi}{r}$)

$$(72.) \quad f(x) = x^2(r - x) = rx^2 - x^3.$$

Dies giebt

$$(73.) \quad f'(x) = 2rx - 3x^2 = x(2r - 3x), \quad f''(x) = 2r - 6x.$$

Die Ableitung $f'(x)$ verschwindet erstens für $x = 0$ und
 zweitens für $x = \frac{2r}{3}$. Nun ist

$$f''(0) = 2r > 0,$$

folglich erhält man für $x = 0$ ein Minimum. In der That, der entsprechende Cylinder ist zu einer geraden Linie zusammengeschumpft, und sein Volumen ist gleich Null. Dagegen wird

$$f''\left(\frac{2r}{3}\right) = -2r < 0,$$

folglich wird $f\left(\frac{2r}{3}\right)$ ein Maximum. Die Höhe y des zugehörigen Cylinders ist nach Gleichung (71.) gleich $\frac{h}{3}$, und das Volumen wird nach Gleichung (70.)

$$(74.) \quad V = \frac{4r^2 h \pi}{27}.$$

Da das Volumen des gegebenen Kegels gleich $\frac{r^2 h \pi}{3}$ ist, so ist das Volumen des grössten Cylinders, der sich in einen geraden Kreiskegel einschreiben lässt, gleich $\frac{4}{9}$ von dem Volumen des Kegels.

GRUNDRISS
der
Differential- und Integral-Rechnung.

I. Theil: Differential-Rechnung.

Von

Dr. Ludwig Kiepert,

Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover.

**Achte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage
des gleichnamigen Leitfadens von**

weil. Dr. Max Stegemann.

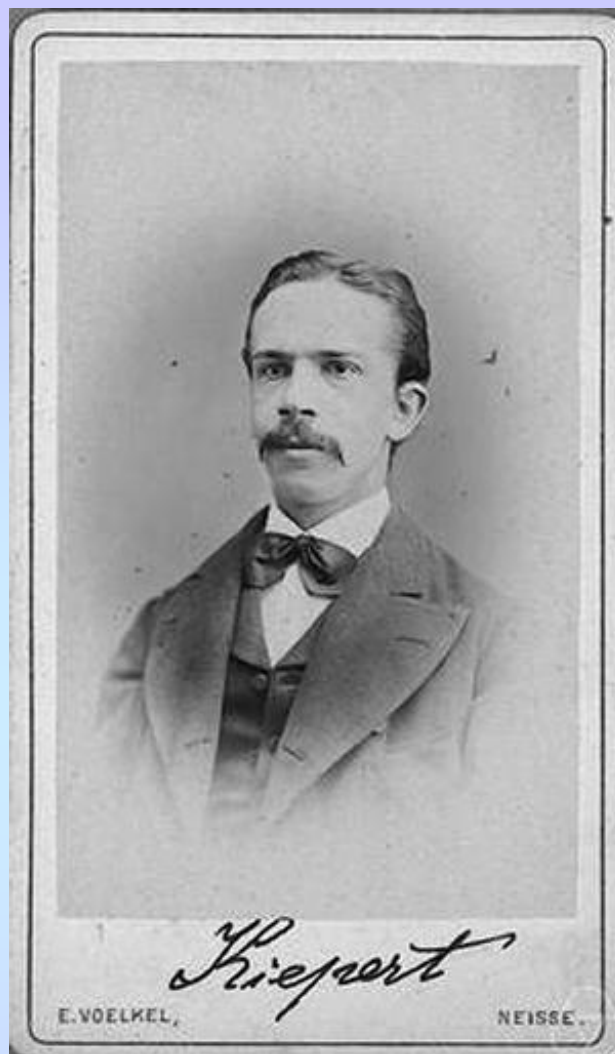
=

Mit 160 Figuren im Texte.



Hannover 1897.

Helwing'sche Verlagsbuchhandlung.



Ludwig Kiepert (1846 - 1934 ~ 88 años)

6. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

Sean x, y, z los tres números, entonces claramente lo que tenemos que maximizar es el producto xyz . Como aparecen tres variables, vamos a tratar de expresarlo en términos de una única variable, x por ejemplo. Para ello tenemos un par de condiciones adicionales:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 30; & (E1) & \quad \text{de } x + y + z = 30 \Rightarrow z = -x - y + 30 \quad (*) \\ x + 2y + 3z &= 60; & (E2) & \end{aligned}$$

Sustituimos z en (E2)

$$x + 2y + 3z = 60 \Rightarrow x + 2y + 3(-x - y + 30) = 60 \Rightarrow y = 30 - 2x$$

$$\text{Sustituyendo esta expresión en } (*) \text{ queda } z = -x - 30 + 2x + 30 \Rightarrow z = x$$

la función a maximizar es $xyz = x^2(30 - 2x) = 30x^2 - 2x^3$ esto es $f(x) = -2x^3 + 30x^2$

se puede buscar un máximo hallando los puntos críticos de la función f , ($f'(x) = 0$)

$$\Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 60x = -6x(x - 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = 10$$

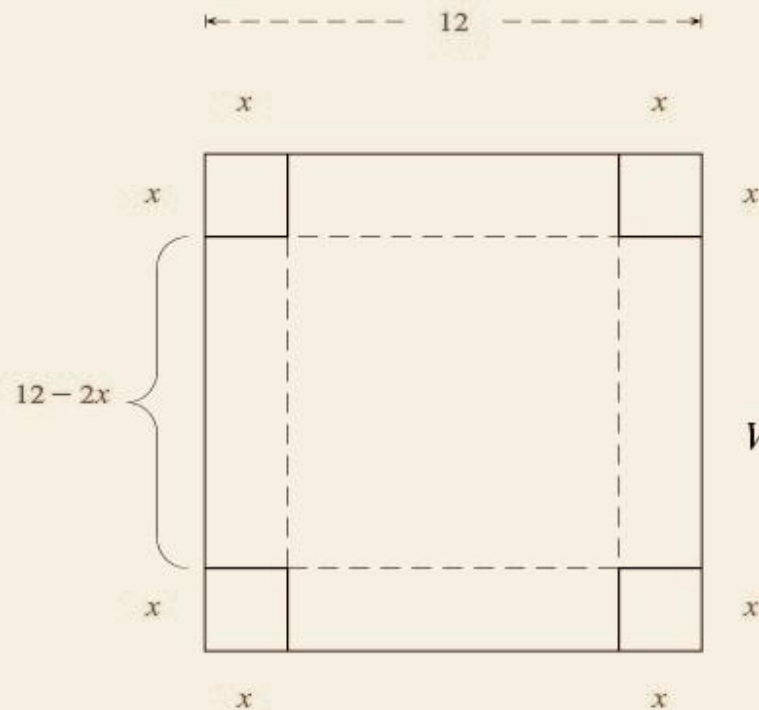
$$\Rightarrow f''(x) = -12x + 60 \Rightarrow f''(10) < 0 \quad \text{Por lo que en } x = 10 \text{ se tiene un máximo.}$$

Entonces $z = 10$ & $y = 30 - 20 = 10$, es decir: $x = y = z = 10$

$$\Rightarrow P_{\max} = xyz = 10^3 = 1000$$

Maximizar

13. Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.



Maximizar

El volumen, que nos piden es:

$$V(x) = (12 - 2x)^2 x = x(4x^2 - 48x + 144) \\ = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

Sus puntos críticos son:

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 8x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12(x - 2)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ x = 6. \end{cases}$$

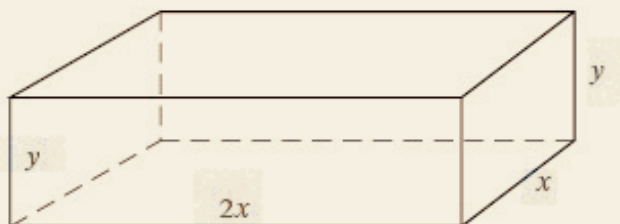
Podemos desechar $x = 6$, pues físicamente no tiene sentido. Para $x = 2$ cm el volumen es:

$$V(2) = 4(2)^3 - 48(2)^2 + 144(2) = 32 - 192 + 288 = 128 \text{ cm}^3$$

Como: $V''(x) = 24x - 96$ y $V''(2) = 48 - 96 < 0$ se trata de un máximo.

$$\Rightarrow V_{\max} = V(2) = 128 \text{ cm}^3$$

27. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3 . El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta 3 pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta 2 pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.



el volumen del recipiente es $V = 10 = 2x^2y$

Despejamos y de la restricción dada

$$y = \frac{10}{2x^2} = \frac{5}{x^2}$$

Considerando que se trata de una caja sin tapa, el costo de los materiales C es

$$C = 6x^2 + 4xy + 8xy = 6x^2 + 12xy$$

función que deseamos optimizar

$$C = 6x^2 + 12x \left(\frac{5}{x^2} \right) = 6x^2 + 60 \frac{1}{x}$$

Derivando, se obtiene

$$C' = 12x - 60 \frac{1}{x^2} = \frac{12x^3 - 60}{x^2}$$

Minimizar

$$C' = 0 \Rightarrow 12x^3 - 60 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{60}{12} \Rightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

La segunda derivada siempre es positiva para $x > 0$

$$C'' = 12 + 120 \frac{1}{x^3} > 0$$

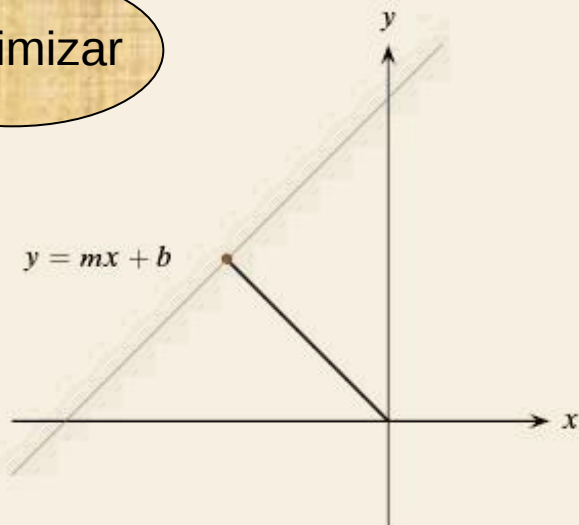
Hay un mínimo para $x_{min} = \sqrt[3]{5}$

$$y_{min} = \frac{5}{(\sqrt[3]{5})^2} = \sqrt[3]{5} = x_{min}$$

$$\Rightarrow x_{min} = y_{min} ; 1.71 ; C = 18(5)^{2/3} \approx 52.6 \$$$

29. Halle el punto de la recta $y = mx + b$ más cercano al origen.

Minimizar



Un punto arbitrario sobre la recta tiene las coordenadas $(x, mx + b)$

Distancia de un punto de la recta al origen

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (mx + b)^2}$$

el cuadrado de la función anterior
tiene los mismos puntos críticos.

$$D = d^2 \Rightarrow D = x^2 + (mx + b)^2$$

Derivando, se obtiene: $D' = 2x + 2(mx + b)m$

$$D' = 0 \Rightarrow 2x + 2(m^2x + bm) = 0 \Rightarrow x = -\frac{bm}{1 + m^2}$$

La segunda derivada $D'' = 2 + 2m^2 > 0$
siempre es positiva

Hay un mínimo para $x_{min} = -\frac{bm}{1 + m^2}$

$$\Rightarrow y_{min} = m\left(-\frac{bm}{1 + m^2}\right) + b = \frac{b}{1 + m^2}$$

observamos que $x_{min} = -my_{min}$

El punto más cercano al origen sobre la recta es

$$(x_{min}, y_{min}) = \left(-\frac{bm}{1 + m^2}, \frac{b}{1 + m^2}\right)$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{x_{min}^2 + y_{min}^2} = \frac{b}{\sqrt{1 + m^2}}$$

43. Los costos de la empresa Alfa están dados por la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ donde x representa miles de artículos vendidos. Se pronostica que los costos serán mínimos si se venden entre 1 700 y 1 800 artículos. ¿Es verdadero el pronóstico? Justifique su respuesta.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, pues $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Minimizar

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - \frac{2x^2}{3(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}}{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3(x^2 - 1) - 2x^2}{3(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^2 - 3}{3(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x \approx \pm 1.7320508$$

Se toma el valor positivo por tratarse de costos en una empresa. calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{6x(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}} - 4(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} 2x(x^2 - 3)}{9(x^2 - 1)^{\frac{8}{3}}} = \frac{6x(x^2 - 1) - 8x(x^2 - 3)}{9(x^2 - 1)^{\frac{7}{3}}} = \frac{-2x^3 + 18x}{9(x^2 - 1)^{\frac{7}{3}}}$$

Como $f''(\sqrt{3}) = \frac{-6 \times \sqrt{3} + 18 \times \sqrt{3}}{9 \times 2^{\frac{7}{3}}} > 0$ se trata de un mínimo

este mínimo se produce cuando se venden 1 732 artículos.

$$\Rightarrow f(1.7); 1.3750 \quad ; \quad f(1.732); 1.3747 \quad ; \quad f(1.8); 1.3757$$

Capítulo 10

Sección 10.1.1 : 4, 6, 9, 13, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 36, 43 (12 ejercicios)

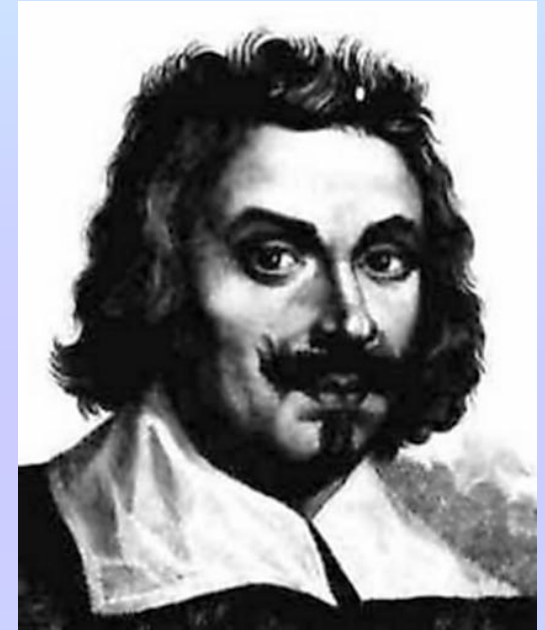
Matemáticos y físicos que contribuyeron
al desarrollo del cálculo diferencial e integral
durante el siglo XVII



René Descartes
(1596-1650 ~ 54 años)



Pierre Fermat
(1601-1665 ~ 64 años)



Evangelista Torricelli
(1608-1647 ~ 39 años)

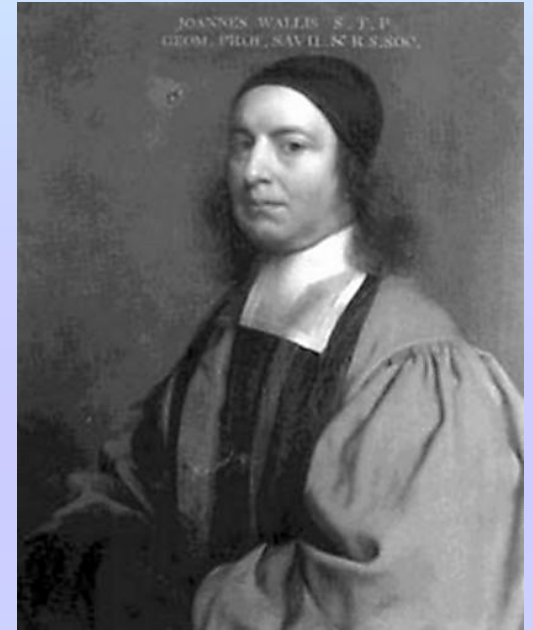
Matemáticos y físicos que contribuyeron
al desarrollo del cálculo diferencial e integral
durante el siglo XVII



Blaise Pascal
(1623 -1662 ~ 39 años)



Christian Huygens
(1629 -1695 ~ 66 años)



John Wallis
(1616 -1703 ~ 87 años)

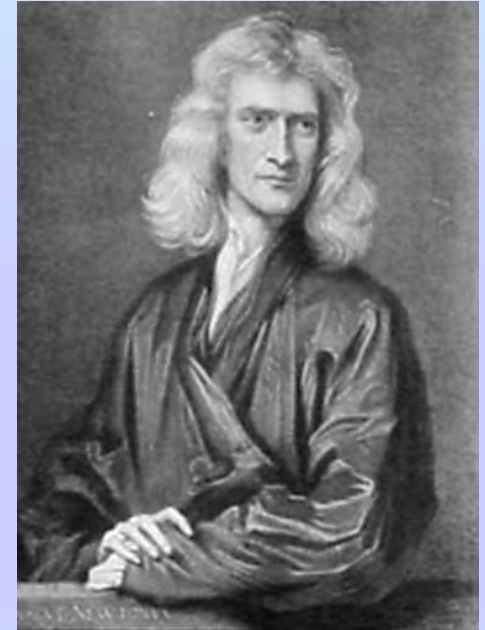
Matemáticos y físicos que contribuyeron
al desarrollo del cálculo diferencial e integral
durante los siglos XVII y XVIII



James Gregory
(1638 -1675 ~ 37 años)



Isaac Barrow
(1630 -1677 ~ 47 años)



Isaac Newton
(1642 -1727 ~ 85 años)

Matemáticos y físicos que contribuyeron
al desarrollo del cálculo diferencial e integral
durante los siglos XVII y XVIII



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 -1716 ~ 70 años)



Jakob Bernoulli
(1654 -1705 ~ 51 años)



Johann Bernoulli
(1667-1748 ~ 81 años)

I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS *).

Sit (fig. 111) axis AX , et curvae plures, ut VV , WW , YY , ZZ , quarum ordinatae ad axem normales, VX , WX , YX , ZX , quae vocentur respective v , w , y , x , et ipsa AX , abscissa ab axe, vocetur x . Tangentes sint VB , WC , YD , ZE , axi occurrentes respective in punctis B , C , D , E . Jam recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx , et recta, quae sit ad dx , ut v (vel w , vel y , vel z) est ad XB (vel XC , vel XD , vel XE) vocetur dv (vel dw , vel dy , vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w , vel y , vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $\overline{dax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuius ordinatae respondentis curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam Additio et Subtractio: si sit $z = y + w + x$ aequ. v, erit $dz = dy + dw + dx$ seu dv aequ. $dz = dy + dw + dx$. Multiplicatio: $d\overline{xv}$ aequ. $x dv + v dx$, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. $x dv + v dx$. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi.

Porro Divisio: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm v dy \mp y dv}{yy}$.

Quoad Signa hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro - z scribi - dz, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684. PRIMER ARTÍCULO DE LEIBNIZ SOBRE EL CÁLCULO (Como lo reimprimió C. I. Gerhardt, 1858).

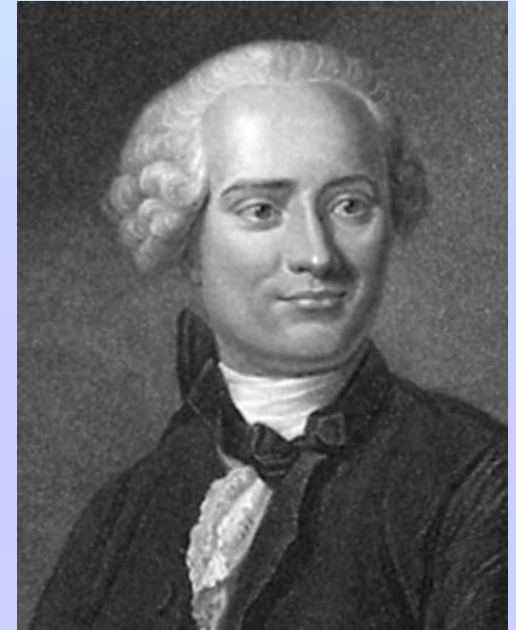
Matemáticos y físicos que contribuyeron
al desarrollo del cálculo diferencial e integral
durante el siglo XVIII



Colin Maclaurin
(1698 -1746 ~ 48 años)

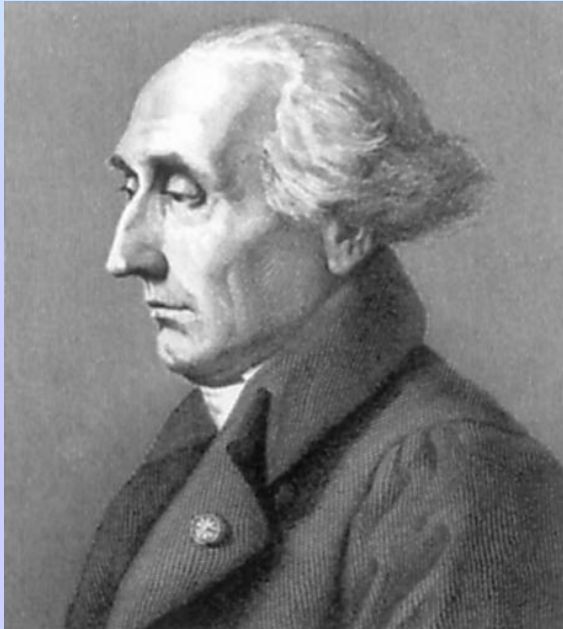


Leonhard Euler
(1707-1783 ~ 76 años)



Jean Le Rond d'Alambert
(1717-1783 ~ 66 años)

Matemáticos y físicos que contribuyeron
al desarrollo del cálculo diferencial e integral
durante los siglos XVIII y XIX



Joseph Louis Lagrange
(1736 -1813 ~ 77 años)

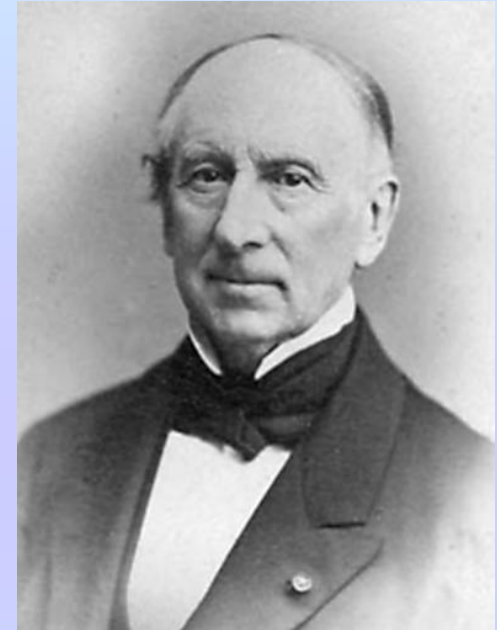


Pierre Simon de Laplace
(1749 -1827 ~ 78 años)

Matemáticos y físicos que contribuyeron
al desarrollo del cálculo diferencial e integral
durante los siglos XVIII y XIX



Karl Friedrich Gauss
(1777-1855 ~ 78 años)



Augustín Louis Cauchy
(1789 -1857 ~ 68 años)