

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 5: INTEGRACIÓN

- 1) Sea $P = \{x_0, x_1, x_2\}$ una partición regular del intervalo $[a, b]$. Demostrar que si f es continua y decreciente en $[a, b]$, entonces $U_f(P) - L_f(P) = [f(a) - f(b)] \Delta x$.

Por ser f continua admite un valor mínimo m_i y un valor máximo M_i en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y por ser decreciente estos valores ocurren respectivamente en x_i y x_{i-1} , para $i = 1, 2$ es decir, $m_i = f(x_i)$ y $M_i = f(x_{i-1})$; además, por tratarse de una partición regular, $\Delta x = (b - a) / 2$

$$\Rightarrow U_f(P) = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x \quad \text{y} \quad L_f(P) = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U_f(P) - L_f(P) &= (M_1 - m_1) \Delta x + (M_2 - m_2) \Delta x \\ &= [f(x_0) - f(x_1)] \Delta x + [f(x_1) - f(x_2)] \Delta x \\ &= [f(x_0) - f(x_2)] \Delta x = [f(a) - f(b)] \Delta x \end{aligned}$$

- 2) Para la función $F(x)$ determinar $F'(1/2)$ (valor de la derivada en $x = 0.5$)

$$F(x) = \int_x^1 z \sqrt{z^2 + 1} dz$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_x^1 z \sqrt{1 + z^2} dz = \frac{d}{dx} \left[- \int_1^x z \sqrt{1 + z^2} dz \right] = -x \sqrt{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow F'(1/2) = -\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{5}}{4}$$

- 3) Calcular la siguiente *integral definida*

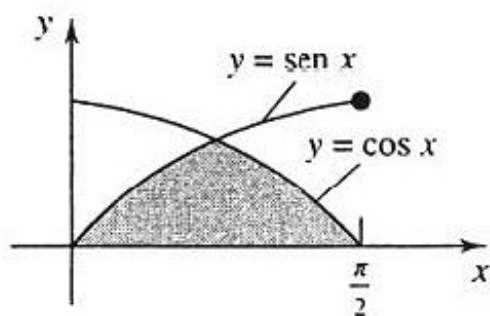
$$\int_0^b (\sqrt{b} - \sqrt{x})^2 dx$$

$$\int_0^b (\sqrt{b} - \sqrt{x})^2 dx = \int_0^b (b - 2\sqrt{b}\sqrt{x} + x) dx = b \int_0^b dx - 2\sqrt{b} \int_0^b \sqrt{x} dx + \int_0^b x dx$$

$$= b \cdot x \Big|_0^b - 2\sqrt{b} \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} \right]_0^b + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = b^2 - \frac{4}{3}b^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{6}b^2$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 5: INTEGRACIÓN

- 4) Bosquejar la región limitada por el eje x y las curvas $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ para $x \in [0, \pi/2]$ y hallar su área.



$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \pi/4 \in [0, \pi/2]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(\Omega) &= \int_0^{\pi/4} \sin x \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \, dx \\ &= -\cos x \Big|_0^{\pi/4} + \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= [-\cos \frac{\pi}{4} - (-\cos 0)] + [\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4}] \\ &= (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

- 5) Hallar $f(x)$ partiendo de que $f''(x) = 2x - 3$, $f(2) = -1$ y $f(0) = 3$.

$$f'(x) = \int f''(x) \, dx = \int (2x - 3) \, dx = x^2 - 3x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) \, dx = \int (x^2 - 3x + C) \, dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + Cx + K$$

$$\Rightarrow f(2) = -1 = \frac{8}{3} - 6 + 2C + K \quad \text{y} \quad f(0) = 3 = 0 + K \quad \text{de donde,}$$

$$K = 3 \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{2}(5 - \frac{8}{3} - 3) = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 3$$

- 6) Calcular la siguiente *integral indefinida*

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} \, dx$$

$$u = 1 + \cos x \Rightarrow -du = \sin x \, dx \Rightarrow \int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} \, dx = -\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\int u^{-1/2} \, du$$

$$= -\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{1 + \cos x} + C$$

- 7) Sea f una función continua, para $c \neq 0$ demostrar que

$$\frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x/c) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

$$u = \frac{x}{c} \Rightarrow c \, du = dx; \quad x = ac \Rightarrow u = \frac{ac}{c} = a \quad \text{ya que } c \neq 0,$$

$$\text{análogamente, } x = bc \Rightarrow u = \frac{bc}{c} = b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x/c) \, dx = \frac{1}{c} \int_a^b f(u) c \, du = \int_a^b f(u) \, du = \int_a^b f(x) \, dx$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 5: INTEGRACIÓN

8) Calcular la *derivada* de la siguiente integral con límites variables

$$\int_{x^2}^x \frac{dt}{t}$$

en general, $\frac{d}{dx} \int_u^v f(t) dt = f(v) \frac{dv}{dx} - f(u) \frac{du}{dx}$; si $u = x^2, v = x, f(t) = \frac{1}{t}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^x \frac{dt}{t} \right) = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} (1) - \frac{1}{x^2} 2x = \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = -\frac{1}{x}$$

9) Calcular la siguiente *integral definida*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - x^2 + \cos x) dx$$

$$f(-x) = 1 - (-x)^2 + \cos(-x) = 1 - x^2 + \cos x = f(x) \Rightarrow f \text{ es par}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - x^2 + \cos x) dx$$

$$= 2 \left[x - \frac{1}{3} x^3 + \sin x \right]_0^{\pi/2} = 2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{8} + \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = \pi - \frac{1}{12} \pi^3 + 2$$

10) Determinar el *valor promedio* de la función $f(x) = 4 - x^2$; $x \in [-2, 2]$ y hallar las abscisas donde ocurre este valor.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{1}{4} \left[4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-2}^2$$

$$\Rightarrow f(c) = \frac{1}{4} \left[\left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right] = \frac{16}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \quad (\text{valor promedio})$$

y de $f(c) = \frac{8}{3} = 4 - c^2$ se obtienen las abscisas $c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$