

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 5: INTEGRACIÓN

- 1) Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ una partición regular del intervalo $[a, b]$. Demostrar que si f es continua y creciente en $[a, b]$, entonces $U_f(P) - L_f(P) = [f(b) - f(a)] \Delta x$.

Por ser f continua admite un valor mínimo m_i y un valor máximo M_i en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y por ser creciente estos valores ocurren respectivamente en x_{i-1} y x_i , para $i = 1, 2, 3$ es decir, $m_i = f(x_{i-1})$ y $M_i = f(x_i)$; además, por tratarse de una partición regular, $\Delta x = (b - a) / 3$

$$\Rightarrow U_f(P) = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x + M_3 \Delta x \quad \text{y} \quad L_f(P) = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x + m_3 \Delta x$$

$$\Rightarrow U_f(P) - L_f(P) = (M_1 - m_1) \Delta x + (M_2 - m_2) \Delta x + (M_3 - m_3) \Delta x$$

$$= [f(x_1) - f(x_0)] \Delta x + [f(x_2) - f(x_1)] \Delta x + [f(x_3) - f(x_2)] \Delta x$$

$$= [f(x_3) - f(x_0)] \Delta x = [f(b) - f(a)] \Delta x$$

- 2) Para la función $F(x)$ determinar $F'(-1)$ (valor de la derivada en $x = -1$)

$$F(x) = \int_1^x \cos \pi z \, dz$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x \cos \pi z \, dz = \cos \pi x \quad \Rightarrow \quad F'(-1) = \cos(-\pi) = \cos \pi = -1$$

- 3) Calcular la siguiente *integral definida*

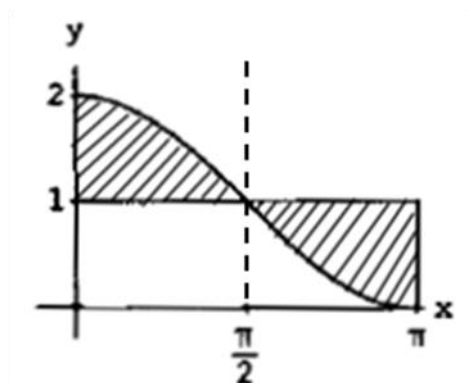
$$\int_0^a (a^2 \sqrt{x} - x^3) \, dx$$

$$\int_0^a (a^2 \sqrt{x} - x^3) \, dx = a^2 \int_0^a x^{1/2} \, dx - \int_0^a x^3 \, dx = a^2 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^a - \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^a$$

$$= \frac{2}{3} a^2 a^{3/2} - \frac{1}{4} a^4 = \frac{2}{3} a^3 \sqrt{a} - \frac{1}{4} a^4 = a^3 \left(\frac{2}{3} \sqrt{a} - \frac{1}{4} \right)$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 5: INTEGRACIÓN

- 4) Bosquejar la región limitada por las curvas $f(x) = 1$ y $g(x) = 1 + \cos x$ para $x \in [0, \pi]$ y hallar su *área*.



$$\begin{aligned}
 1 &= 1 + \cos x \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 \in [0, \pi] \\
 \Rightarrow A(\Omega) &= \int_0^{\pi/2} (1 + \cos x - 1) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} [1 - (1 + \cos x)] dx \\
 &= \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) - (\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}) \\
 &= (1 - 0) - (0 - 1) = 2 = 2(1 - 0) = 2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos x - 1) dx \quad (\text{simetría respecto a } x = \pi/2)
 \end{aligned}$$

- 5) Hallar $f(x)$ partiendo de que $f''(x) = 5 - 4x$, $f(1) = 1$ y $f(0) = -2$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \int f''(x) dx = \int (5 - 4x) dx = 5x - 2x^2 + C \\
 \Rightarrow f(x) &= \int f'(x) dx = \int (5x - 2x^2 + C) dx = \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + Cx + K \\
 \Rightarrow f(1) &= 1 = \frac{5}{2} - \frac{2}{3} + C + K \quad \text{y} \quad f(0) = -2 = 0 + K \quad \text{de donde,} \\
 K &= -2 \quad \text{y} \quad C = 3 - \frac{5}{2} + \frac{2}{3} = 3 - \frac{11}{6} = \frac{7}{6} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{6}x - 2
 \end{aligned}$$

- 6) Calcular la siguiente *integral indefinida*

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 + \tan x}} dx$$

$$\begin{aligned}
 u = 1 + \tan x &\Rightarrow du = \sec^2 x dx \Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 + \tan x}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2} du \\
 &= \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{1 + \tan x} + C
 \end{aligned}$$

- 7) Sea f una función continua, demostrar la igualdad y dar su significado

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$u = x - c \Rightarrow du = dx; \text{ si } x = a + c \Rightarrow u = (a + c) - c = a, \text{ análogamente,}$$

$$\text{si } x = b + c \Rightarrow u = (b + c) - c = b \Rightarrow \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx$$

i.e., la integral definida es invariante ante traslaciones de f .

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 5: INTEGRACIÓN

8) Calcular la *derivada* de la siguiente integral con límites variables

$$\int_{\tan x}^{2x} t\sqrt{1+t^2} dt$$

en general, $\frac{d}{dx} \int_u^v f(t) dt = f(v) \frac{dv}{dx} - f(u) \frac{du}{dx}$; si $u = \tan x$, $v = 2x$ y

$$\begin{aligned} f(t) = t\sqrt{1+t^2} &\Rightarrow \frac{d}{dx} \int_{\tan x}^{2x} t\sqrt{1+t^2} dt = v\sqrt{1+v^2} \frac{dv}{dx} - u\sqrt{1+u^2} \frac{du}{dx} \\ &= 2x\sqrt{1+4x^2} (2) - \tan x \sqrt{1+\tan^2 x} (\sec^2 x) = 4x\sqrt{1+4x^2} - \tan x |\sec x| \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\text{Nota: } \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \sec x = \pm \sqrt{1 + \tan^2 x} \Rightarrow |\sec x| = \sqrt{1 + \tan^2 x}$$

9) Si m es el valor mínimo de f en $[a, b]$ y M es su valor máximo, demostrar la siguiente *propiedad de la integral definida*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

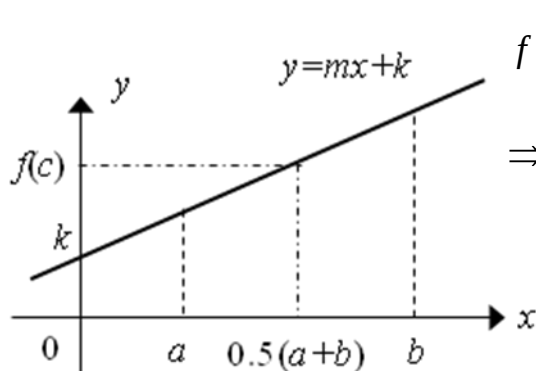
suponiendo que f es continua en $[a, b] \Rightarrow$ existe $\int_a^b f$ y se cumple

para toda partición P de $[a, b]$ que $L_f(P) \leq \int_a^b f \leq U_f(P)$; en particular, si

$P = \{a, b\} = \{x_0, x_1\} \Rightarrow \Delta x = b - a$ y, por hipótesis, f toma los valores

extremos m, M en $[a, b] \Rightarrow L_f(P) = m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a) = U_f(P)$

10) Hallar el *valor medio* de la función lineal $f(x) = mx + k$ en el intervalo $[a, b]$ y hallar en qué punto toma f este valor. Haga un bosquejo que represente geoméricamente el resultado (suponga $m, k, a, b > 0$).



$$\begin{aligned} f(c) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (mx + k) dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2} mx^2 + kx \right]_a^b \\ &\Rightarrow f(c) = \frac{(mb^2 + 2kb) - (ma^2 + 2ka)}{2(b-a)} = \frac{m(b^2 - a^2) + 2k(b-a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{m(b-a)(b+a) + 2k(b-a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{1}{2} m(a+b) + k \quad (\text{valor promedio}) \end{aligned}$$

y de $f(c) = \frac{1}{2} m(a+b) + k = mx + k$,

la abscisa es $x = \frac{1}{2}(a+b)$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 5: INTEGRACIÓN

10) Extra: por el 1er teorema del valor medio, $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$

$\Rightarrow f(c)(b-a) = \frac{1}{2}m(a+b) + k(b-a)$ es el área del rectángulo cuyo ancho es el valor promedio y su largo es la longitud del intervalo $[a, b]$ y

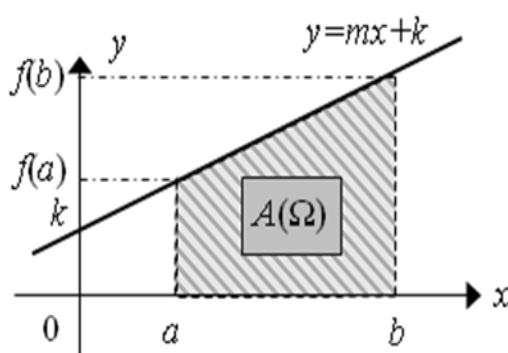
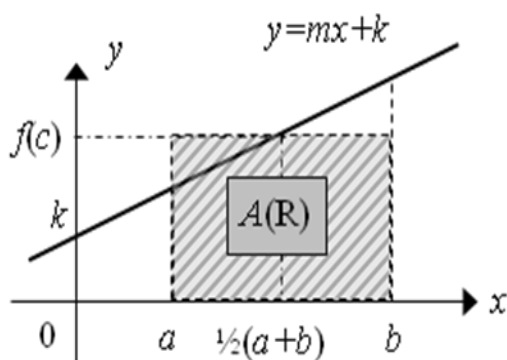
$$\int_a^b f(x) dx = \left[\frac{1}{2}mx^2 + kx \right]_a^b = \left(\frac{1}{2}mb^2 + kb \right) - \left(\frac{1}{2}ma^2 + ka \right) = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2) + k(b-a)$$

que es el área limitada por la recta $mx + k$, el eje x , y las rectas verticales

$x = a$ y $x = b$, que geométricamente corresponde a un trapecio Ω de altura

$(b-a)$, base menor $f(a) = ma + k$ y base mayor $f(b) = mb + k$ y cuya área es

$$A(\Omega) = (b-a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] = \frac{1}{2}(b-a)(ma + k + mb + k) = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2) + k(b-a)$$



$$\Rightarrow A(R) = f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx = (b-a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] = A(\Omega)$$