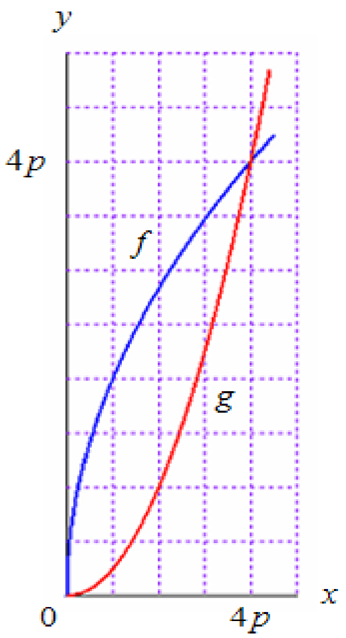
PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 6: APLICACIONES DE LA INTEGRAL

1) Graficar la región limitada por las parábolas $x^2 = 4py$ e $y^2 = 4px$, siendo p una constante positiva y hallar el área entre ellas.



$$y^2 = 4px \Rightarrow y = \sqrt{4px} \quad ; \quad x^2 = 4py \Rightarrow y = \frac{x^2}{4p} \Rightarrow \sqrt{4px} = \frac{x^2}{4p}$$

$$\Leftrightarrow 4px = \frac{x^4}{(4p)^2} \Leftrightarrow x^4 - (4p)^3 x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - (4p)^3) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = 4p \quad \Rightarrow$ ambas curvas se cortan en $(0,0)$ y $(4p,4p)$;

de la gráfica, $f(x) = \sqrt{4px} \geq \dfrac{x^2}{4p} = g(x) \;\therefore\; A = \displaystyle\int_0^{4p}\left(\sqrt{4px} - \frac{x^2}{4p}\right)dx$

$$\Rightarrow A = \sqrt{4p}\int_0^{4p}\sqrt{x}\,dx - \frac{1}{4p}\int_0^{4p} x^2 dx = \sqrt{4p}\,\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^{4p} - \frac{1}{4p}\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^{4p}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{3}(4p)^{1/2}(4p)^{3/2} - \frac{(4p)^3}{3(4p)} = \frac{2}{3}(4p)^2 - \frac{1}{3}(4p)^2 = \frac{1}{3}(4p)^2 = \frac{16}{3}p^2$$

2) Se corta una esfera de radio r por dos planos paralelos colocados en $x = a$ y en $x = b$ con a, b ε [-r, r]. Hallar el volumen de la porción de esfera comprendida entre ambos planos suponiendo que $a < b$.

Usando el método de los discos con $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \forall x \in [-r, r]$

que describe la semicircunferencia centrada en el origen de radio r y

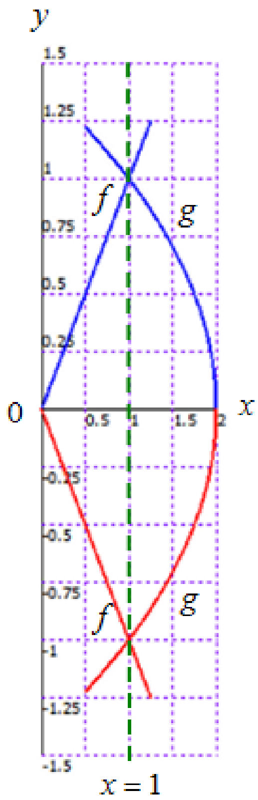
suponiendo que $-r \leq a < b \leq r \Rightarrow A = \pi \displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \pi \int_a^b {\sqrt{r^2 - x^2}}^{\,2}\,dx$

$$\Rightarrow A = \pi\int_a^b (r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2\int_a^b dx - \int_a^b x^2 dx\right] = \pi r^2 [x]_a^b - \frac{\pi}{3}\left[x^3\right]_a^b$$

$$\Rightarrow A = \pi r^2 (b-a) - \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3) = \frac{\pi(b-a)}{3}[3r^2 - (a^2 + ab + b^2)]$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 6: APLICACIONES DE LA INTEGRAL

3) Dibujar la región Ω limitada por $x = |y|$ y $x = 2 - y^2$. Usar el método de las capas para hallar el volumen del sólido engendrado al girar Ω alrededor del eje y.



$$x = |y| \quad \wedge \quad x = 2 - y^2 \Rightarrow |y| = 2 - y^2 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = 1$$

además si $y = 0 \Rightarrow x = 2$, y los puntos de intersección son

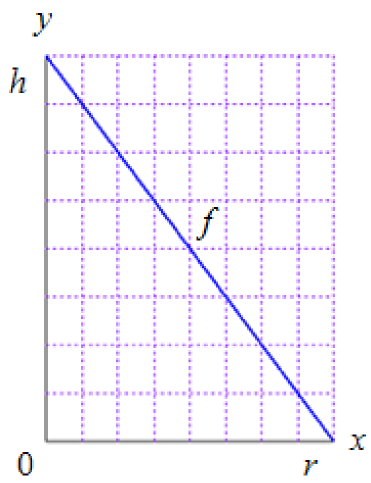
$(1,1),\ (1,-1)$ y $(2,0) \Rightarrow$ usando el método de las capas y sim. en eje x

$$V = 2\int_0^1 2\pi x f(x)\,dx + 2\int_1^2 2\pi x\, g(x)\,dx = 4\pi\int_0^1 x^2 dx + 4\pi\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx\ ;\ u = 2 - x$$

$$\Rightarrow V = \frac{4\pi}{3}\left[x^2\right]_0^1 - 4\pi\int_1^0 (2-u)\sqrt{u}\,du = \frac{4\pi}{3} + 8\pi\int_0^1 \sqrt{u}\,du - 4\pi\int_0^1 u\sqrt{u}\,du$$

$$\Rightarrow V = \frac{4\pi}{3} + 8\pi\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_0^1 - 4\pi\frac{2}{5}\left[u^{5/2}\right]_0^1 = \frac{20\pi}{3} - \frac{8\pi}{5} = \frac{(100-24)\pi}{15} = \frac{76}{15}\pi$$

4) Sean r y h números positivos. La región en el 1er cuadrante limitada por la recta $x/r + y/h = 1$ y los ejes coordenados se rota alrededor del eje y. Usar el método de las capas para obtener el volumen de un cono de radio r y altura h.



$\frac{x}{r} + \frac{y}{h} = 1 \therefore$ si $x = r \Rightarrow y = 0$ y si $y = h \Rightarrow x = 0$ así, la recta

$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x}{r}\right)$ corta los ejes coordenados en $(0,h)$ y $(r,0)$;

usando el método de las capas respecto al eje y

$$\Rightarrow V = \int_0^r 2\pi x\, f(x)\,dx = 2\pi h\int_0^r x\left(1 - \frac{x}{r}\right)dx = \frac{2\pi h}{r}\int_0^r (rx - x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow V = \frac{2\pi h}{r}\left[\frac{rx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{2\pi h}{r}\left[\frac{r^3}{2} - \frac{r^3}{3}\right] = \frac{2\pi h}{r}\frac{r^3}{6} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 6: APLICACIONES DE LA INTEGRAL

5) Dibujar la región Ω limitada por $y = x^2$ e $y = x^{1/3}$. Hallar el centroide de Ω así como el volumen engendrado por su rotación alrededor de cada eje coordenado.

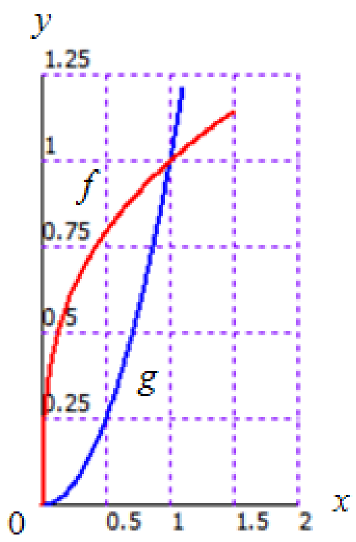
$y = x^2 \quad \wedge \quad y = x^{1/3} \Rightarrow x^2 = x^{1/3} \Leftrightarrow x^6 = x \Leftrightarrow x(x^5 - 1) = 0$
de donde las curvas se cortan en los ptos. $(0,0)$ y $(1,1)$; además,
$f(x) = x^{1/3} \geq x^2 = g(x) \quad \forall x \in [0,1]$ de modo que el área

entre ambas está dada por $A = \int_0^1 (x^{1/3} - x^2)\,dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

para el centroide, $\bar{x}A = \int_0^1 x[f(x) - g(x)]\,dx \quad \wedge \quad \bar{y}A = \frac{1}{2}\int_0^1 [f^2(x) - g^2(x)]\,dx$

$$\Rightarrow \bar{x}A = \int_0^1 x(x^{1/3} - x^2)\,dx = \int_0^1 (x^{4/3} - x^3)\,dx = \left[\frac{3}{7}x^{7/3} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{7} - \frac{1}{4} = \frac{5}{28} \quad \text{y}$$

$$\bar{y}A = \frac{1}{2}\int_0^1 [(x^{1/3})^2 - (x^2)^2]\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^{2/3} - x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$



las coordenadas del centroide están dadas por:

$$\bar{x}A = \frac{5}{28} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{A}\frac{5}{28} = \frac{12}{5}\frac{5}{28} = \frac{3}{7}$$

$$\bar{y}A = \frac{1}{5} \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{A}\frac{1}{5} = \frac{12}{5}\frac{1}{5} = \frac{12}{25}$$

finalmente, aplicando el Teorema de Pappus se obtienen los volumenes del sólido al rotar la región respectivamente con respecto a cada eje, i.e.,

$$V_x = 2\pi\bar{y}A = \frac{2}{5}\pi \quad \wedge \quad V_y = 2\pi\bar{x}A = \frac{10\pi}{28} = \frac{5}{14}\pi$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 6: APLICACIONES DE LA INTEGRAL

6) Hallar el centroide de la región acotada por: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\,,\ x=0\,,\ y=0\,.$

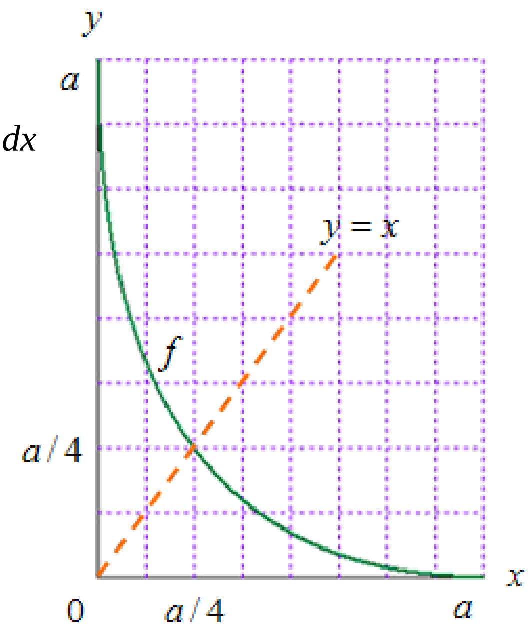
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \quad \wedge \quad x=0 \quad \wedge \quad y=0 \Rightarrow y=a,\ x=a$ de donde

la curva los ejes en los ptos. $(0,a)$ y $(a,0)$; además, p. ej., si $x=y$

$\Rightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{a} \Leftrightarrow x=a/4$ de modo que un pto. sobre la curva es $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$

$$\Rightarrow A=\int_0^a f(x)dx=\int_0^a(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2dx=\int_0^a(a-2\sqrt{a}\sqrt{x}+x)dx=\left[ax-\frac{4}{3}\sqrt{a}x^{3/2}+\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

$$\Rightarrow A=a^2-\frac{4}{3}\sqrt{a}a^{3/2}+\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2-\frac{4}{3}a^2=\frac{a^2}{6}$$



para el centroide, $\bar{x}A=\int_0^a x\,f(x)\,dx \quad \wedge \quad \bar{y}A=\frac{1}{2}\int_0^a f^2(x)\,dx$

$$\Rightarrow \bar{x}A=\int_0^a(ax-2\sqrt{a}x^{3/2}+x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{4\sqrt{a}}{5}x^{5/2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{2}-\frac{4a^3}{5}+\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{30}$$

siendo $y=x$ un eje de simetría que divide a la mitad la región y dado que el centroide pertenece al eje de simetría, entonces las coordenadas del centroide están dadas por:

$$\bar{x}A=\frac{a^3}{30}\Rightarrow \bar{x}=\frac{1}{A}\frac{a^3}{30}=\frac{6}{a^2}\frac{a^3}{30}=\frac{a}{5}\Rightarrow \bar{y}=\bar{x}=\frac{a}{5}$$

de otra forma, $\bar{y}A=\frac{1}{2}\int_0^a f^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4\,dx$

recordando que $(u-v)^4=u^4-4u^3v+6u^2v^2-4uv^3+v^4$; tomando $u=\sqrt{a}\wedge v=\sqrt{x}$

$$\Rightarrow \bar{y}A=\frac{1}{2}\int_0^a[(\sqrt{a})^4-4(\sqrt{a})^3\sqrt{x}+6(\sqrt{a})^2(\sqrt{x})^2-4\sqrt{a}(\sqrt{x})^3+(\sqrt{x})^4)\,dx$$

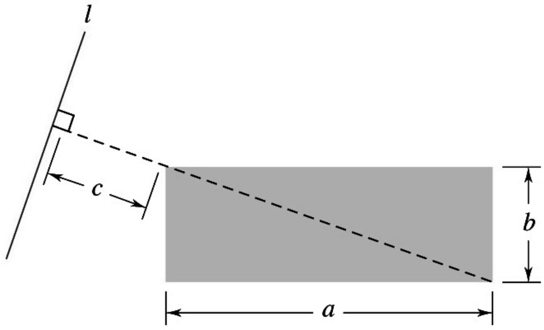
$$\Rightarrow \bar{y}A=\frac{1}{2}\int_0^a(a^2-4a^{3/2}x^{1/2}+6ax-4a^{1/2}x^{3/2}+x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow \bar{y}A=\frac{1}{2}\left[a^2x-\frac{8a^{3/2}}{3}x^{3/2}+3ax^2-\frac{8a^{1/2}}{5}x^{5/2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$\Rightarrow \bar{y}A=\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{8a^3}{3}+3a^3-\frac{8a^3}{5}+\frac{a^3}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5a^3}{3}-\frac{8a^3}{5}\right)=\frac{a^3}{30}$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 6: APLICACIONES DE LA INTEGRAL

7) Se gira el rectángulo (figura izquierda) alrededor de la línea indicada como *l*. Hallar el volúmen del sólido de revolución resultante.



Por ser el rectángulo una figura elemental, su centroide se halla en la intersección de sus diagonales $\therefore$ usando el teorema de Pitágoras la mitad de la diagonal indicada en la figura está dada por $d=\sqrt{(a/2)^2+(b/2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}/2$. Finalmente, aplicando el teorema de Pappus, $V_l=2\pi\bar{R}A$ donde la distancia de la recta de rotación l al centroide del rectángulo vale $\bar{R}=c+d=c+\sqrt{a^2+b^2}/2$ y como $A=ab \Rightarrow V_l=\pi ab(2\bar{R})$

$$\Rightarrow V_l=\pi ab(2c+\sqrt{a^2+b^2})$$

8) Hallar la longitud natural de un muelle metálico pesado, sabiendo que el trabajo realizado al alargarlo desde una longitud de 2 m hasta una longitud de 2.1 m es la mitad del trabajo realizado al alargarlo desde una longitud de 2.1 m hasta una longitud de 2.2 m.

Por la ley de Hooke, el resorte ejerce una fuerza de restauración dada por $F(x)=-kx$ donde k es una cte. positiva; para alargar o estirar el resorte se ejerce la misma fuerza pero contraria, i.e., $-F(x)=kx$; ahora, si L es la longitud natural del resorte y E representa su longitud después de estirarlo, entonces $E-L$ mide el estiramiento realizado, así, por hipótesis

$$W_1=\int_{2-L}^{2.1-L}kxdx=\frac{1}{2}\int_{2.1-L}^{2.2-L}kxdx=\frac{1}{2}W_2 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_{2-L}^{2.1-L}=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{2.1-L}^{2.2-L} \Leftrightarrow 2\left[x^2\right]_{2-L}^{2.1-L}=\left[x^2\right]_{2.1-L}^{2.2-L}$$

$$\Leftrightarrow 2(2.1-L)^2-2(2-L)^2=(2.2-L)^2-(2.1-L)^2 \Leftrightarrow 3(2.1-L)^2-2(2-L)^2=(2.2-L)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(0.1+2-L)^2-2(2-L)^2=(0.2+2-L)^2 \quad ;\text{ sea } \lambda=2-L$$

$$\Rightarrow 3(0.1+\lambda)^2-2\lambda^2=(0.2+\lambda)^2 \Leftrightarrow 3\left(\lambda^2+\frac{2}{10}\lambda+\frac{1}{100}\right)-2\lambda^2=\lambda^2+\frac{4}{10}\lambda+\frac{4}{100}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+\frac{6}{10}\lambda+\frac{3}{100}=\lambda^2+\frac{4}{10}\lambda+\frac{4}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{10}-\frac{4}{10}\right)\lambda=\frac{4-3}{100}=\frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{2}{10}\lambda=\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{1}{20}=0.05 \quad \therefore \quad L=2-\lambda=2-0.05=1.95$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 6: APLICACIONES DE LA INTEGRAL

9) Un objeto de masa m se mueve a lo largo del eje x. En $x = a$ su velocidad es v_a y en $x = b$, su velocidad es v_b. Utilizar la 2da ley de Newton del movimiento, $F = ma = m\, dv/dt$, para encontrar el trabajo W realizado para desplazar dicho objeto desde a hasta b.

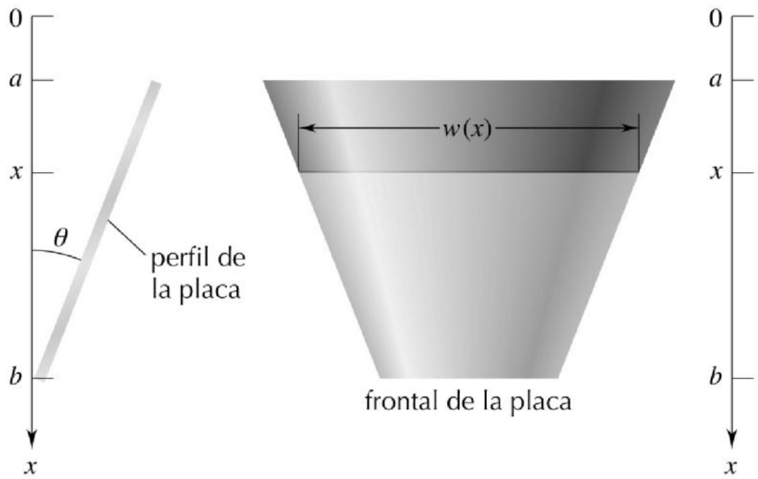
Por ser la 2da ley de Newton, $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$ y aplicando la regla de la cadena se tiene que

$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$; además, por hipótesis cuando $x = a \Rightarrow v = v_a$ y si $x = b \Rightarrow v = v_b$

$$\therefore\ W = \int_a^b F dx = \int_a^b mv\frac{dv}{dx}dx = m\int_{v_a}^{v_b} v dv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_a}^{v_b} = \frac{1}{2}m(v_b^2 - v_a^2)$$

10) Demostrar que si una placa está sumergida en un líquido formando un ángulo θ con la vertical tal que $0 < \theta < \pi/2$, entonces la fuerza sobre la placa viene dada por (usar sumas de Riemann), σ es el peso específico del líquido; x, $w(x)$, a y b se indican en la figura.

$$F = \int_a^b \sigma\, x\, w(x) \sec\theta\, dx$$



Según las figuras, la fuerza ejercida sobre la $i-$ésima franja de la placa sumergida e inclinada un ángulo $\theta \in (0, \pi/2)$ y de altura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, está dada por $F_i = \sigma x_i^* w(x_i^*) h_i$ siendo σ el peso específico del fluído, $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ la profundidad de la franja, $w(x_i^*)$ el ancho de la placa a la profundidad x_i^*, y h_i la hipotenusa del triángulo rectángulo infinitesimal formado por la vertical y la placa inclinada. Del triángulo, se ve que $\cos\theta = \dfrac{\Delta x_i}{h_i} \Rightarrow h_i = \dfrac{\Delta x_i}{\cos\theta} = \sec\theta\, \Delta x_i$

de este modo, $F_i = \sigma x_i^* w(x_i^*) \sec\theta\, \Delta x_i$ y consecuentemente, para la partición P elegida sobre $[a,b]$, se tiene el límite de la siguiente suma de Riemann

$$F = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma x_i^* w(x_i^*) \sec\theta\, \Delta x_i = \int_a^b \sigma x\, w(x) \sec\theta\, dx = \sigma \sec\theta \int_a^b x\, w(x)\, dx$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 6: APLICACIONES DE LA INTEGRAL

EXTRA relativo al problema 10)

a) $\lim_{\theta \to 0^+} F(\theta) = \lim_{\theta \to 0^+} \sigma \sec\theta \int_a^b x\, w(x)\, dx = \sigma \int_a^b x\, w(x)\, dx$ (placa vertical)

la fuerza ejercida es la misma que para una placa sumergida verticalmente pues en ese caso $\sec 0 = 1$, $h_i = \Delta x_i$ y $h = b - a$ es de longitud finita.

b) $\lim_{\theta \to \pi/2^-} F(\theta) = \lim_{\theta \to \pi/2^-} \sigma \sec\theta \int_a^b x\, w(x)\, dx = +\infty$ (placa horizontal)

la fuerza ejercida sobre la placa sumergida pero inclinada es cada vez mayor si $\theta \to \pi/2^-$ ya que $\sec(\pi/2) = \infty$ y $h \to \infty$ es de longitud infinita.