

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 7: FUNCIONES TRASCENDENTES

1) Calcular la siguiente *integral definida*

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; \text{ además, } x = 1 \Rightarrow u = \ln 1 = 0 \wedge x = e \Rightarrow \ln e = 1$$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

2) Calcular la derivada de la siguiente función mediante *derivación logarítmica*.

$$g(x) = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} = \left[\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \right]^{1/2} \Rightarrow \ln g(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$$

$$\Rightarrow \ln g(x) = \frac{1}{2} [\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)]$$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right]$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right]; \quad \forall x \neq 1, 2, 3, 4$$

$$\text{además, } (x-1)(x-2)(x-3)^{-1}(x-4)^{-1} > 0 \Leftrightarrow (x < 1) \vee (2 < x < 3) \vee (x > 4)$$

$$\Rightarrow D_{g'} = (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, \infty)$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 7: FUNCIONES TRASCENDENTES

3) Calcular la siguiente *integral indefinida* donde a y b son constantes

$$\int e^{ax+b} dx$$

$$u = ax + b \Rightarrow du = a dx$$

$$\Rightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int e^u du = \frac{1}{a} e^u + C = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C ; a \neq 0$$

4) Demostrar la siguiente *fórmula de integración* donde a y b son constantes:

$$\int \frac{dx}{a^2 + (x+b)^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right) + C ; a \neq 0$$

$$au = x + b \Rightarrow adu = dx \Rightarrow \int \frac{dx}{a^2 + (x+b)^2} = \int \frac{adu}{a^2 + (au)^2} = \int \frac{adu}{a^2 + a^2 u^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$\text{pero } \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C = \tan^{-1} u + C ; \text{ además, } u = \frac{x+b}{a} \text{ de donde}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + (x+b)^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right) + C = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x+b}{a}\right) ; a \neq 0$$

5) Calcular la siguiente *antiderivada*:

$$\int \sinh 2x e^{\cosh 2x} dx$$

$$u = \cosh 2x \Rightarrow du = d(\cosh 2x) = \sinh 2x d(2x) = 2 \sinh 2x dx$$

$$\Rightarrow \int \sinh 2x e^{\cosh 2x} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{\cosh 2x} + C$$