

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 8: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

1) Calcular las siguientes integrales (sección 8.1):

a) $\int x^3 \ln x \, dx$

b) $\int_0^{\pi/4} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

a) (fórmula 11) $\int u^n \ln u \, du = u^{n+1} \left[\frac{\ln u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C$

tomando $n = 4 \wedge u = x$

$$\Rightarrow \int x^3 \ln x \, dx = x^{3+1} \left[\frac{\ln x}{3+1} - \frac{1}{(3+1)^2} \right] + C = x^4 \left[\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16} \right] + C$$

b) $\int_0^{\pi/4} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \arctan x \, d(\arctan x) = \frac{1}{2} [\arctan^2 x]_0^{\pi/4}$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \arctan^2[\pi/4] - \arctan^2 0 = \frac{1}{2} \arctan^2[\pi/4] \approx 0.222$$

2) Calcular las siguientes integrales (sección 8.2):

a) $\int e^{ax} \sin bx \, dx$

b) $\int_1^{2e} x^2 \ln^2 x \, dx$

a) $u = e^{ax} \wedge dv = \sin bxdx \Rightarrow du = ae^{ax} dx \wedge v = -\frac{1}{b} \cos bx$

$$\Rightarrow \int e^{ax} \sin bxdx = uv - \int vdu = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx$$

$$u = e^{ax} \wedge dv = \cos bxdx \Rightarrow du = ae^{ax} dx \wedge v = \frac{1}{b} \sin bx$$

$$\Rightarrow \int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} uv - \int vdu =$$

$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bxdx$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bxdx + \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{a^2 + b^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bxdx$$

$$= \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{b^2} e^{ax} \cos bx$$

$$\Rightarrow \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 8: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

$$\begin{aligned}
\text{b) } u = \ln^2 x \wedge dv = x^2 dx &\Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx \wedge v = \frac{x^3}{3} \\
\Rightarrow \int_1^{2e} x^2 \ln^2 x \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln^2 x \right]_1^{2e} - \int_1^{2e} \frac{x^3}{3} \frac{2 \ln x}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln^2 x \right]_1^{2e} - \frac{2}{3} \int_1^{2e} x^2 \ln x \, dx \\
u = \ln x \wedge dv = x^2 dx &\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \wedge v = \frac{x^3}{3} \\
\Rightarrow \int_1^{2e} x^2 \ln^2 x \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln^2 x \right]_1^{2e} - \frac{2}{3} \left(\left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^{2e} - \int_1^{2e} \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \right) \\
&= \left[\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2x^3}{9} \ln x \right]_1^{2e} + \frac{2}{9} \int_1^{2e} x^2 dx \\
\Rightarrow \int_1^{2e} x^2 \ln^2 x \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2x^3}{27} \right]_1^{2e} = \left[\frac{x^3}{3} \left(\ln^2 x - \frac{2}{3} \ln x + \frac{2}{9} \right) \right]_1^{2e} \\
&= \frac{8e^3}{3} \left(\ln^2 2e - \frac{2}{3} \ln 2e + \frac{2}{9} \right) - \frac{1}{3} \left(\ln^2 1 - \frac{2}{3} \ln 1 + \frac{2}{9} \right) \\
\Rightarrow \int_1^{2e} x^2 \ln^2 x \, dx &= \frac{8e^3}{3} \left(\ln^2 2e - \frac{2}{3} \ln 2e + \frac{2}{9} \right) - \frac{2}{27}
\end{aligned}$$

3) Calcular las siguientes integrales (sección 8.3):

$$\text{a) } \int \sin mx \sin nx \, dx \quad ; \quad m, n \in \mathbf{Z}^+ \qquad \text{b) } \int_{-1/6}^{1/3} \sin^4 3\pi x \cos^3 3\pi x \, dx$$

$$\begin{aligned}
\text{a) } m \neq n \wedge m, n \in \mathbf{Z}^+ &\Rightarrow \int \sin mx \sin nx \, dx = \int \frac{1}{2} \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int \cos(m-n)x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos(m+n)x \, dx
\end{aligned}$$

$$\text{sean } u = (m-n)x \wedge v = (m+n)x \Rightarrow du = (m-n)dx \wedge dv = (m+n)dx$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2(m-n)} \int \cos u \, du - \frac{1}{2(m+n)} \int \cos v \, dv \\
&= \frac{\sin u}{2(m-n)} - \frac{\sin v}{2(m+n)} + C = \frac{\sin(m-n)}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)}{2(m+n)} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = n \wedge m, n \in \mathbf{Z}^+ &\Rightarrow \int \sin nx \sin nx \, dx = \int \sin^2 nx \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2nx) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2nx \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n} + C
\end{aligned}$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 8: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int_{-1/6}^{1/3} \sin^4 3\pi x \cos^3 3\pi x \, dx &= \int_{-1/6}^{1/3} \sin^4 3\pi x \cos^2 3\pi x \cos 3\pi x \, dx \\ &= \int_{-1/6}^{1/3} \sin^4 3\pi x (1 - \sin^2 3\pi x) \cos 3\pi x \, dx \end{aligned}$$

$$\text{sea } u = \sin 3\pi x \Rightarrow du = d(\sin 3\pi x) = 3\pi \cos 3\pi x \, dx \text{ y}$$

$$x = -1/6 \Rightarrow u = \sin 3\pi(-1/6) = \sin(-\pi/2) = -1$$

$$x = 1/3 \Rightarrow u = \sin 3\pi(1/3) = \sin \pi = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-1/6}^{1/3} \sin^4 3\pi x \cos^3 3\pi x \, dx &= \frac{1}{3\pi} \int_{-1}^0 u^4 (1 - u^2) du = \frac{1}{3\pi} \int_{-1}^0 (u^4 - u^6) du \\ &= \frac{1}{3\pi} \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3\pi} \left(0 - \frac{(-1)^5}{5} + \frac{(-1)^7}{7} \right) = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-1/6}^{1/3} \sin^4 3\pi x \cos^3 3\pi x \, dx = \frac{1}{3\pi} \frac{7-5}{35} = \frac{2}{105} \pi$$

4) Calcular la siguiente integral (sección 8.4) y el problema indicado en b):

$$\text{a)} \quad \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

b) para una varilla que se extiende de $x = 0$ hasta $x = a > 0$, hallar su masa y su centro de masa si la densidad de masa está dada por $\lambda(x) = (x^2 + a^2)^{-3/2}$

$$\text{a)} \quad \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 1 - 3 - 1}} = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{(x-1)^2 - 2^2}}$$

la sustitución trigonométrica necesaria está dada por $x-1 = 2 \sec u$

$$\Rightarrow x = 2 \sec u + 1 \wedge dx = d(2 \sec u + 1) = 2 \sec u \tan u \, du, \text{ además, } \sqrt{(x-1)^2 - 2^2} = 2 \tan u$$

$$\Rightarrow \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{(x-1)^2 - 2^2}} = \int \frac{2 \sec u + 1}{2 \tan u} 2 \sec u \tan u \, du$$

$$\Rightarrow = \int (2 \sec^2 u + \sec u) \, du = 2 \int \sec^2 u \, du + \int \sec u \, du = 2 \tan u + \ln |\sec u + \tan u| + C$$

$$\text{y como } \tan u = \frac{1}{2} \sqrt{(x-1)^2 - 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 2x - 3} \wedge \sec u = \frac{1}{2} (x-1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} &= 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right) + \ln \left| \frac{1}{2} (x-1) + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right| + C \\ &= \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \ln \left| (x-1) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right| + \ln \frac{1}{2} + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \ln \left| (x-1) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right| + C$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 8: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

b) siendo $L = a$ la longitud de la varilla (sobre el eje x) su masa

se calcula como
$$M = \int_0^L \lambda(x) dx = \int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \int_0^a \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3}$$

empleando la sustitución trigonométrica $x = a \tan u$ sabemos que el radical se reduce a la expresión trigonométrica $a \sec u$ y además

$$dx = d(a \tan u) = a \sec^2 u du \quad ; \quad x = 0 \Rightarrow u = \arctan(0/a) = 0 \quad y$$

$$x = a \Rightarrow u = \arctan(a/a) = \arctan(1) = \pi/4$$

$$\Rightarrow M = \int_0^a \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} = \int_0^{\pi/4} \frac{a \sec^2 u du}{(a \sec u)^3} = \int_0^{\pi/4} \frac{a \sec^2 u}{a^3 \sec^3 u} du = \frac{1}{a^2} \int_0^{\pi/4} \cos u du$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{a^2} [\sin u]_0^{\pi/4} = \frac{1}{a^2} \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2a^2}$$

por otro lado, el centroide de la varilla está dado por $x_M = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda(x) dx$

$$\Rightarrow x_M = \frac{2a^2}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{d(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{2}} \left[\frac{(x^2 + a^2)^{(-3/2)+1}}{(-3/2)+1} \right]_0^a = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \left[-\frac{2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right]_0^a = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{a\sqrt{2}} + \frac{2}{a} \right)$$

$$\Rightarrow x_M = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \right) a = (\sqrt{2} - 1)a$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 8: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

5) Calcular las siguientes integrales (sección 8.5):

a) $\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} dx$

b) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3+x}$

a) la descomposición del integrando en fracciones parciales es

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow x^2 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

$$x=1 \Rightarrow 1=2B \Rightarrow B=1/2 ; \quad x=-1 \Rightarrow 1=4C \Rightarrow C=1/4$$

$$x=0 \Rightarrow 0=A(-1)(1)+B(1)+C(-1)^2 = -A+B+C \Rightarrow A=B+C=3/4$$

continuamos con la integración de la función racional propia

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} dx &= \int \left(\frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \ln|x+1| \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + \frac{1}{4} \ln|x+1| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} dx = \frac{3}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln|x+1| + C$$

b) la descomposición del integrando en fracciones parciales es

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$$

$$x=0 \Rightarrow 1=A ; \quad x=1 \Rightarrow 1=2A+B+C \Rightarrow B+C=-1$$

$$x=-1 \Rightarrow 1=2A+B-C \Rightarrow B-C=-1 \quad \therefore B=-1 \wedge C=0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^3 \frac{dx}{x^3+x} &= \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_1^3 \\ &= \left(\ln 3 - \frac{1}{2} \ln 10 \right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \ln 3 - \ln \left(\frac{10}{2} \right)^{1/2} \Rightarrow \int_1^3 \frac{dx}{x^3+x} = \ln \frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 8: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Problema EXTRA – válido solamente si se resuelven todos los anteriores:

6) Calcular la siguiente integral definida. Sugerencia, hacer $u = \tan(x/2)$,

$$a) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$$

$$b) \quad i^i = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = ?$$

a) Problema EXTRA: ver Sección 8.6, en particular el ejemplo 4; de ahí,

$$\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2 \tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 2} \right| + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2 \tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 2} \right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{5} \left(\ln \left| \frac{2 \tan(\pi/4) - 1}{\tan(\pi/4) + 2} \right| - \ln \left| \frac{2 \tan(0) - 1}{\tan(0) + 2} \right| \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left(\ln \left| \frac{2-1}{1+2} \right| - \ln \left| \frac{0-1}{0+2} \right| \right) = \frac{1}{5} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{5} \ln \frac{1/3}{1/2} = \frac{1}{5} \ln \frac{2}{3}$$

b) por la identidad de Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\Rightarrow i^i = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \approx \frac{21}{100} \in \mathbf{R}$$