Integración 5

Sección 5.1

Integral definida de una función continua

Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

5.1 INTEGRAL DEFINIDA DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

Introducción: Un problema de área

Ya estamos familiarizados con las fórmulas de áreas de figuras geométricas regulares tales como triángulos, rectángulos y circunferencias (figura 5.1.1).

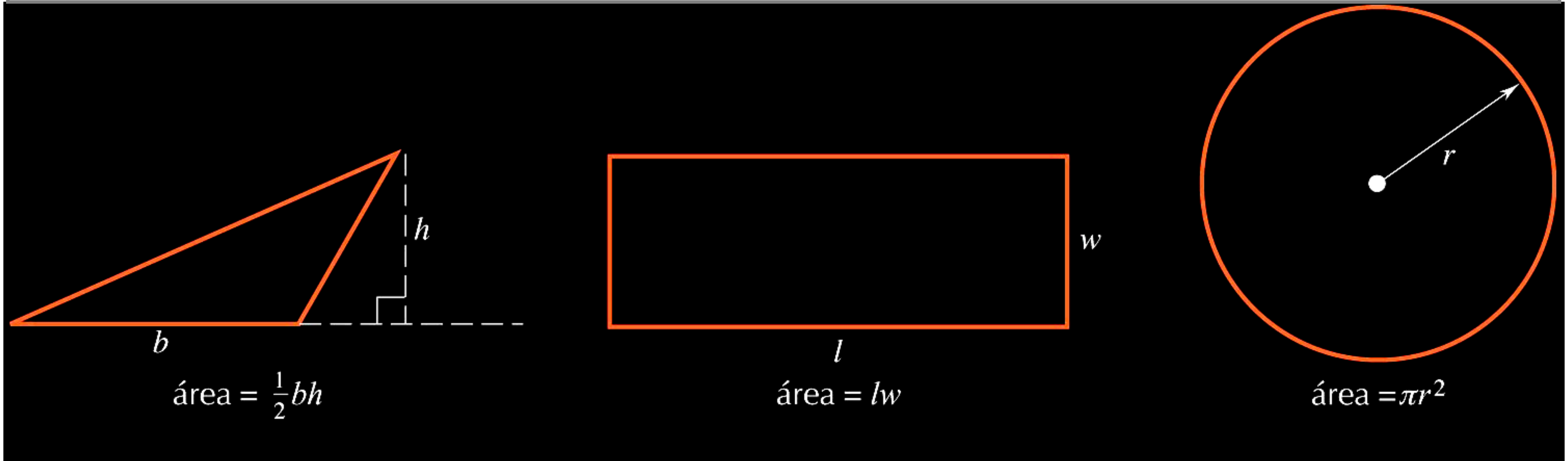


FIGURA 5.1.1

En la figura 5.1.2 hemos representado una región Ω limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua no negativa f, en su parte inferior por el eje x, a la izquierda por la recta $x = a$ y a la derecha por la recta $x = b$. El problema que nos planteamos es el siguiente: ¿Qué número, si lo hubiese, puede ser considerado como el área de Ω?

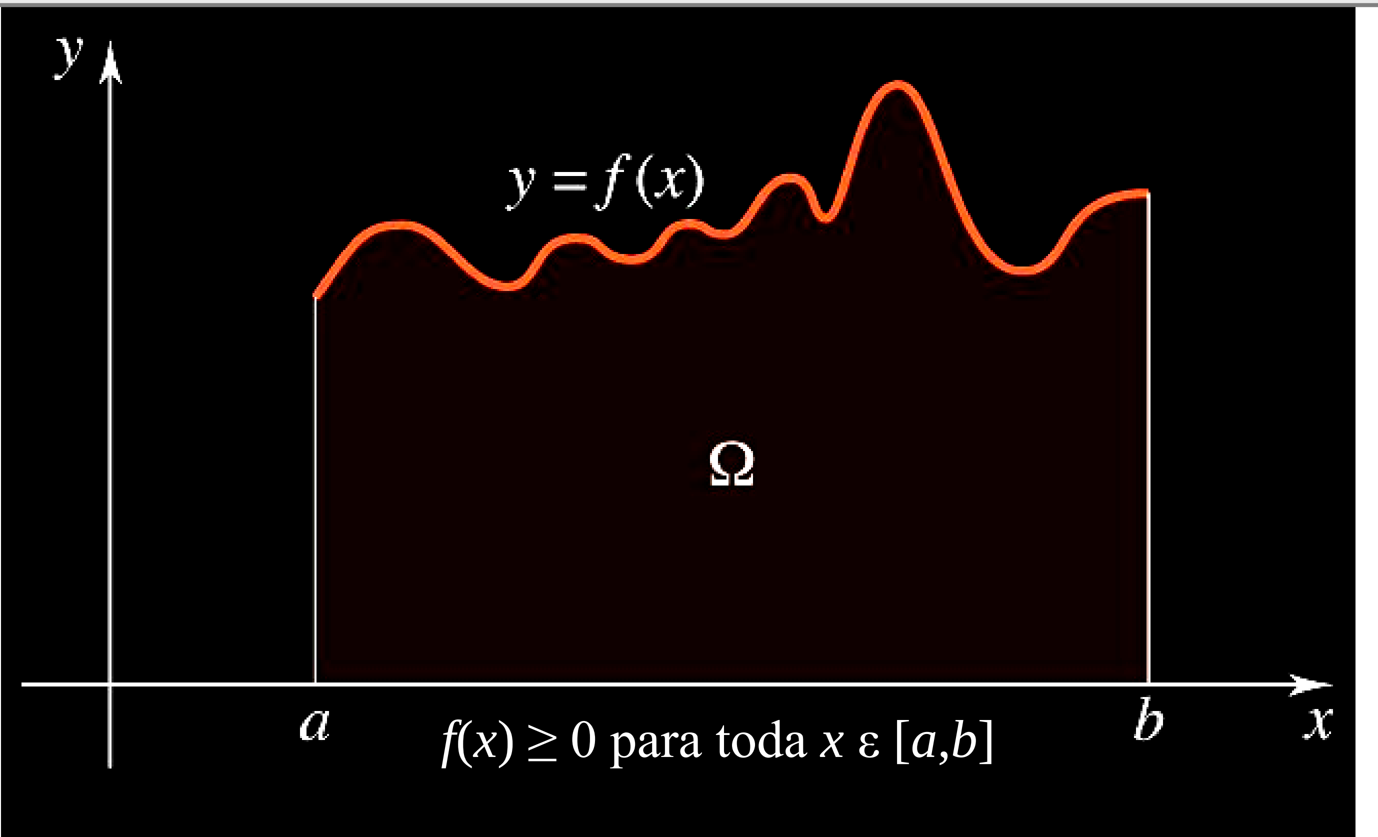


FIGURA 5.1.2

Para empezar a responder a esta pregunta, subdividiremos el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos que no se solapan:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n] \text{ con } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

De esta manera, la región Ω queda subdividida en n subregiones

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n. \qquad \text{(figura 5.1.3)}$$

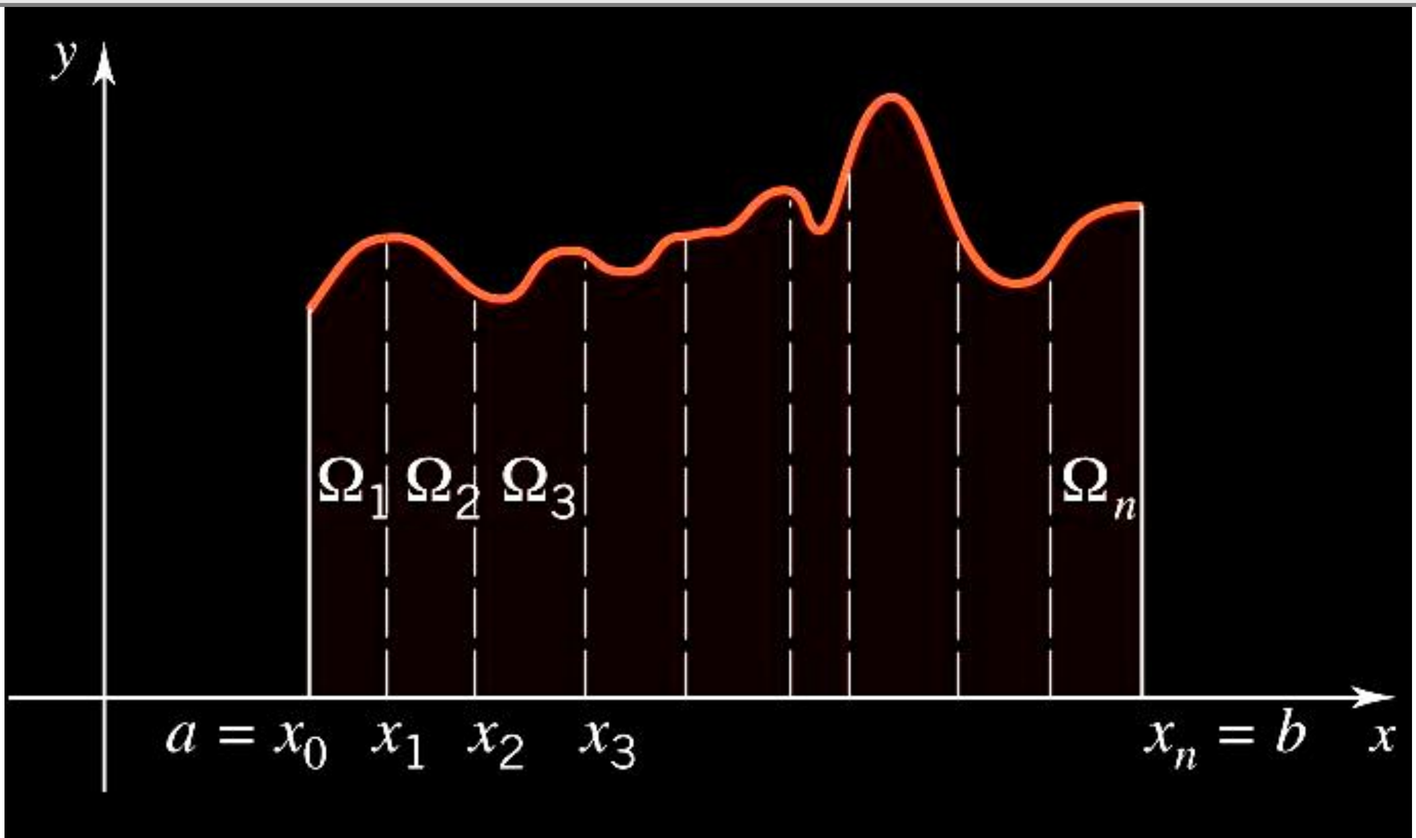


FIGURA 5.1.3

TEOREMA 2.6.2 ACOTACIÓN; VALORES EXTREMOS
Sea f una función continua en el intervalo cerrado y finito $[a,b]$, entonces: 1) f está acotada en $[a,b]$ y 2) f alcanza un valor máximo M y un valor mínimo m en $[a,b]$.

SECCIÓN 4.4, TEOREMA DE LOS VALORES EXTREMOS
Mismo enunciado que antes pero M puede ser el máximo absoluto y m puede ser el mínimo absoluto.

Podemos estimar el área total de Ω estimando el área de cada una de las subregiones Ω_i y sumando los resultados. Designemos por M_i el valor máximo de f en $[x_{i-1}, x_i]$ y por m_i su valor mínimo. (Recordar el teorema 2.6.2 y la sección 4.4.) Consideremos ahora los rectángulos r_i y R_i de la figura 5.1.4. Dado que

$$r_i \subseteq \Omega_i \subseteq R_i \; ,$$

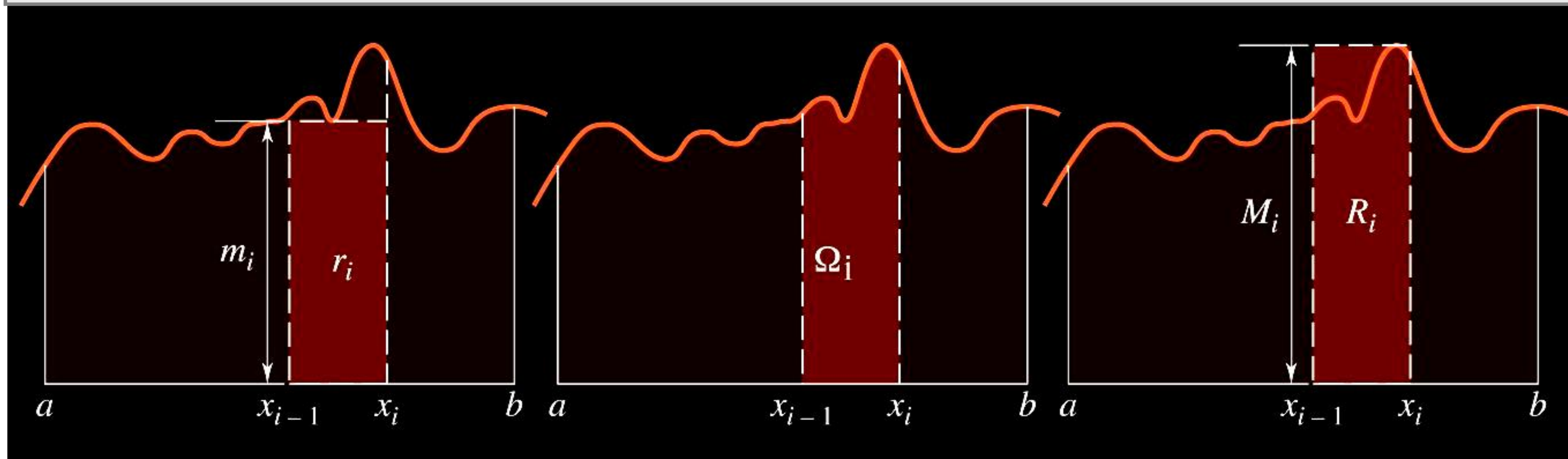


FIGURA 5.1.4

hemos de tener

$$\text{área de } r_i \le \text{área de } \Omega_i \le \text{área de } R_i.$$

Dado que el área de un rectángulo es el producto de la base por la altura, obtenemos

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le \text{área de } \Omega_i \le M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Haciendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ tenemos que

$$m_i \Delta x_i \le \text{área de } \Omega_i \le M_i \Delta x_i.$$

La desigualdad se verifica para $i = 1, i = 2, \dots, i = n$. Sumando estas desigualdades, obtenemos por una parte

(5.1.1) $$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n \le \text{área de } \Omega$$

y por otra,

(5.1.2) $$\text{área de } \Omega \le M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n.$$

Una suma de la forma

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n \qquad \text{(figura 5.1.5)}$$

se denomina *suma inferior para f*. Una suma de la forma

$$M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n \qquad \text{(figura 5.1.6)}$$

se denomina *suma superior para f*.

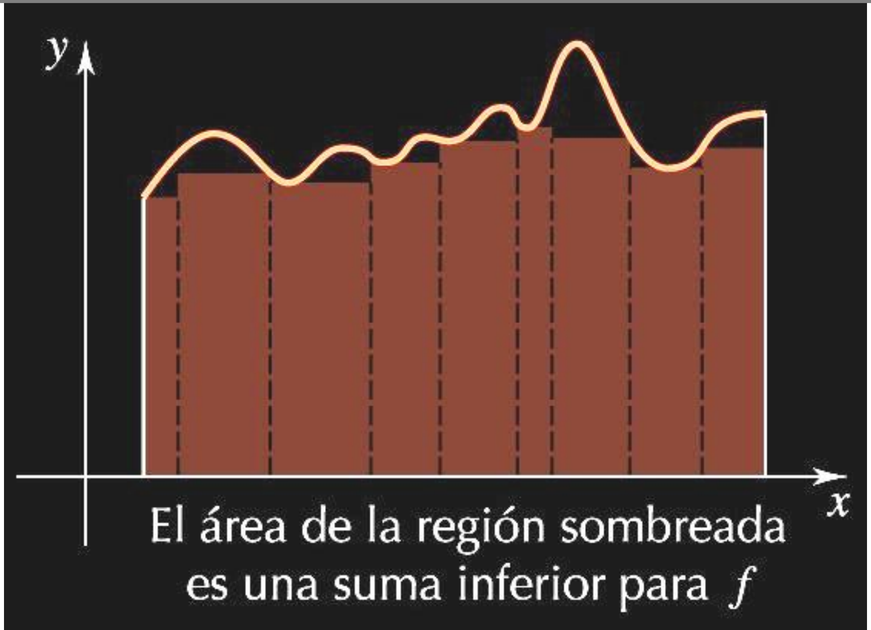


FIGURA 5.1.5

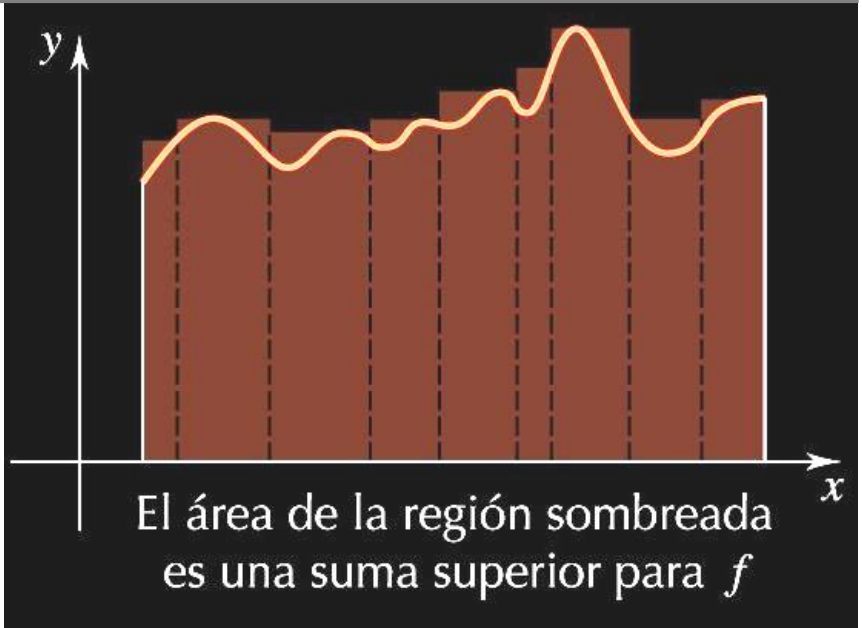


FIGURA 5.1.6

Consideradas conjuntamente, las desigualdades (5.1.1) y (5.1.2) nos dicen que para que un número pueda ser candidato al título de "área de Ω", tal número ha de ser mayor o igual que cualquier suma inferior de f y menor o igual que cualquier suma superior de f. Puede demostrarse, aunque lo omitiremos aquí, que si f es una función continua en $[a, b]$ entonces existe un número y sólo uno que cumple estas condiciones. A este número lo llamaremos *área de* Ω.

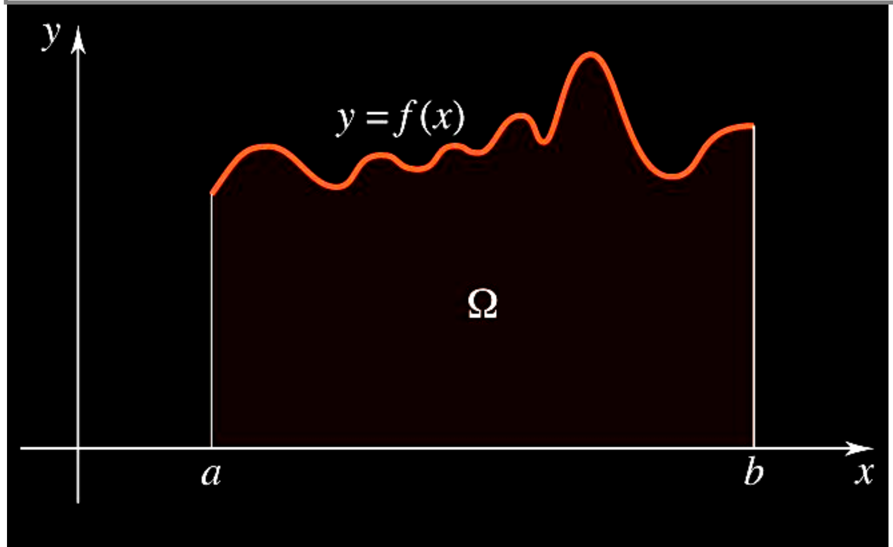


FIGURA 5.1.2

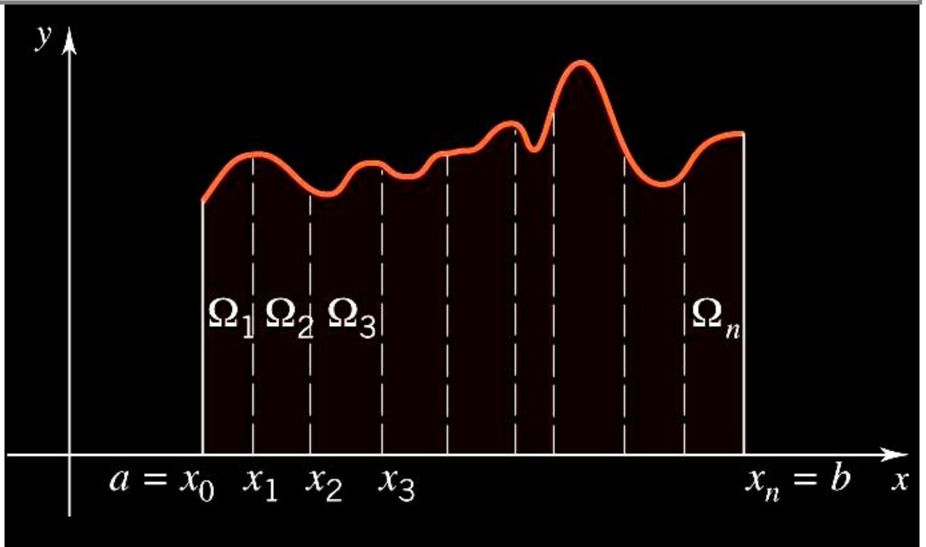


FIGURA 5.1.3

$$m_1\,\Delta x_1 + m_2\,\Delta x_2 + \cdots + m_n\,\Delta x_n \le \text{área de } \Omega \le M_1\,\Delta x_1 + M_2\,\Delta x_2 + \cdots + M_n\,\Delta x_n.$$

Integral definida

El procedimiento seguido para resolver el problema de área se llama *integración* y el resultado final de este procedimiento se llama *integral definida*. Nos proponemos ahora establecer estas nociones con mayor precisión.

(5.1.3) Llamaremos *partición* del intervalo cerrado $[a, b]$ a todo subconjunto finito de $[a, b]$ que contenga los puntos a y b.

Es conveniente identificar los elementos de una partición mediante un índice acorde con el orden natural. Así pues, si escribimos que

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \text{ es una partición de } [a, b],$$

se entiende que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Si $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, entonces P divide $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

de longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ respectivamente.

Supongamos ahora que f es continua en $[a, b]$. En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la función f toma entonces un valor máximo M_i y un valor mínimo m_i.

(5.1.4) El número

$$U_f(P) = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n$$

se denomina *suma superior asociada a P de f*, y el número

$$L_f(P) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n$$

se denomina *suma inferior asociada a P de f.*

*U*pper (superior)

*L*ower (inferior)

Mediante un razonamiento que omitimos aquí (aparecerá en el apéndice B.4) es posible demostrar que si f es continua en $[a, b]$, existe un único número I que satisface la desigualdad

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P) \quad \text{para } todas \text{ las particiones } P \text{ de } [a, b].$$

Este es el número que necesitamos. **(TEOREMA B.4.6)**

DEFINICIÓN 5.1.5 INTEGRAL DEFINIDA

Sea f continua en $[a, b]$. El único número I que satisface la desigualdad

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P) \quad \text{para todas las particiones } P \text{ de } [a, b]$$

se llama *integral definida* (o simplemente *integral*) *de f entre a y b* y se designa por

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz y se le llama *signo integral*. En realidad es la S de *Suma* estirada. Los números a y b se denominan *límites de integración* (a es el *límite inferior* y b es el *límite superior*) y se habla a menudo de *integrar* una función de a a b. La función a integrar se llama *integrando*. Esta notación no es la única que se usa. Algunos matemáticos omiten dx y escriben solamente $\int_a^b f$. En este libro se mantendrá el uso de dx, por motivos que se harán patentes más adelante.

En la expresión

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

la letra x es una "variable muda"; en otras palabras, puede ser sustituida por cualquier otra letra no utilizada hasta el momento. Así, por ejemplo, no existe ninguna diferencia entre

$$\int_a^b f(x)\ dx\ , \quad \int_a^b f(t)\ dt \quad \text{y} \quad \int_a^b f(z)\ dz\ .$$

Todas estas expresiones designan la integral definida de f de a a b.

En la introducción a este capítulo se proporcionó una aplicación inmediata de la integral definida: si f es no negativa en $[a, b]$, entonces $(f \geq 0)$

$$A(\Omega) = \boxed{A = \int_a^b f(x)\, dx}$$

da el área debajo de la gráfica de f. Véase la figura 5.1.2. Volveremos más adelante sobre ésta y otras aplicaciones. Por ahora nos limitaremos a algunos cálculos sencillos.

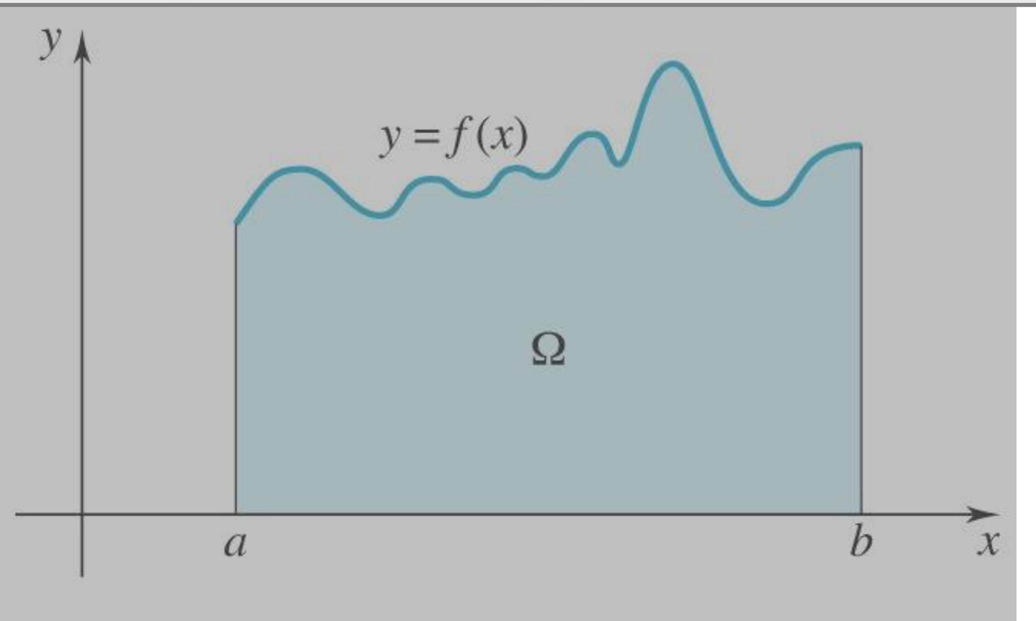


FIGURA 5.1.2

Ejemplo 1 Los conjuntos

$$\{0, 1\}, \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}, \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 1\}, \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{8}, 1\}$$

son todos particiones del intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 2 La función cuadrática

$$f(x) = x^2$$

es continua en $[1, 3]$. La partición $P = \{1, \tfrac{3}{2}, 2, 3\}$ divide $[1, 3]$ en tres subintervalos:

$$[x_0, x_1] = [1, \tfrac{3}{2}], \quad [x_1, x_2] = [\tfrac{3}{2}, 2], \quad [x_2, x_3] = [2, 3]$$

de longitudes respectivas

$$\Delta x_1 = \tfrac{3}{2} - 1 = \tfrac{1}{2}, \quad \Delta x_2 = 2 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2}, \quad \Delta x_3 = 3 - 2 = 1.$$

Puesto que es creciente en $[1,3]$, f toma su valor máximo en el punto extremo derecho de cada subintervalo:

$$M_1 = f(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{9}{4}, \qquad M_2 = f(2) = 4, \qquad M_3 = f(3) = 9.$$

Los valores mínimos de f se toman en los puntos extremos izquierdos de cada subintervalo:

$$m_1 = f(1) = 1, \qquad m_2 = f(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{9}{4}, \qquad m_3 = f(2) = 4.$$

Luego

$$U_f(P) = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + M_3\Delta x_3 = \tfrac{9}{4}(\tfrac{1}{2}) + 4(\tfrac{1}{2}) + 9(1) = \tfrac{97}{8} = 12{,}125 \qquad \text{(ver figura 5.1.7a)}$$

y

$$L_f(P) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3 = 1(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{9}{4}(\tfrac{1}{2}) + 4(1) = \tfrac{45}{8} = 5{,}625 \qquad \text{(ver figura 5.1.7b)}$$

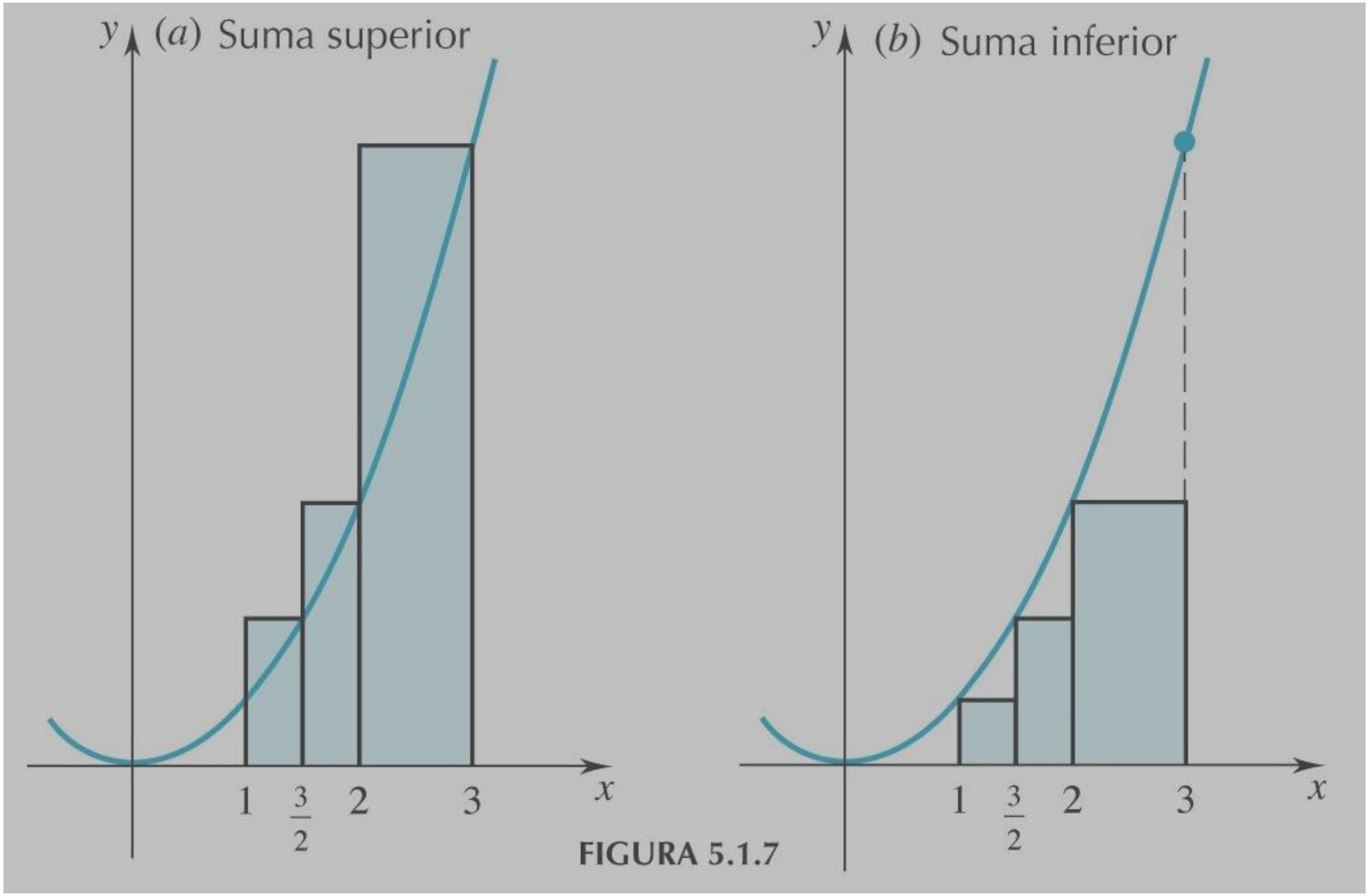


FIGURA 5.1.7

Ejemplo 3 La función lineal

$$f(x) = -2x + 1$$

es continua en el intervalo $[-1, 2]$. La partición $P = [-1, 0, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ divide el intervalo $[-1, 2]$ en cuatro subintervalos:

$$[x_0, x_1] = [-1, 0], \quad [x_1, x_2] = [0, 1], \quad [x_2, x_3] = [1, \tfrac{3}{2}], \quad [x_3, x_4] = [\tfrac{3}{2}, 2]$$

de longitudes

$$\Delta x_1 = 0 - (-1) = 1, \quad \Delta x_2 = 1 - 0 = 1, \quad \Delta x_3 = \tfrac{3}{2} - 1 = \tfrac{1}{2}, \quad \Delta x_4 = 2 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2}$$

respectivamente. Ver la figura 5.1.8. Dado que f es una función decreciente, los valores máximos de f tendrán lugar en los extremos izquierdos de los subintervalos y los valores mínimos en los extremos derechos. Como se puede comprobar,

$$U_f(P) = f(-1)(1) + f(0)(1) + f(1)(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{2})(\tfrac{1}{2}) = 3(1) + 1(1) + (-1)(\tfrac{1}{2}) + (-2)(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{2}$$

y

$$L_f(P) = f(0)(1) + f(1)(1) + f(\tfrac{3}{2})(\tfrac{1}{2}) + f(2)(\tfrac{1}{2}) = 1(1) + (-1)(1) + (-1)(\tfrac{1}{2}) + (-3)(\tfrac{1}{2}) = -2.$$

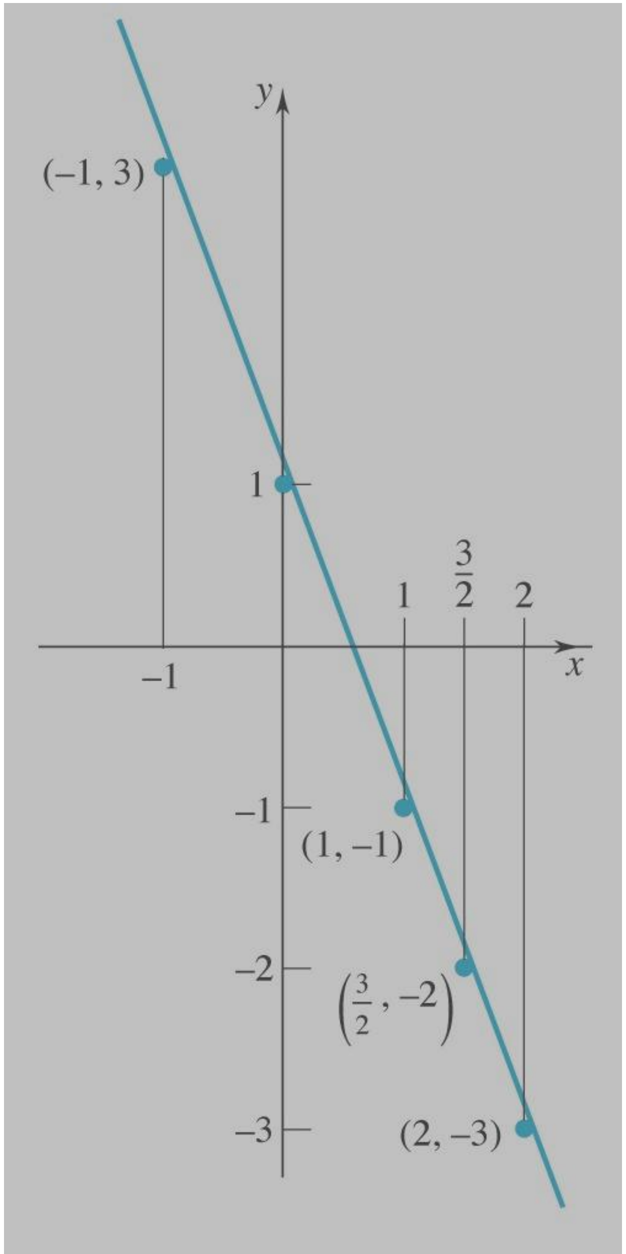


FIGURA 5.1.8

Ejemplo 4 Si $f(x) = k$, constante, para todo x en $[a, b]$, se verifica que

(5.1.6) $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a).}$$

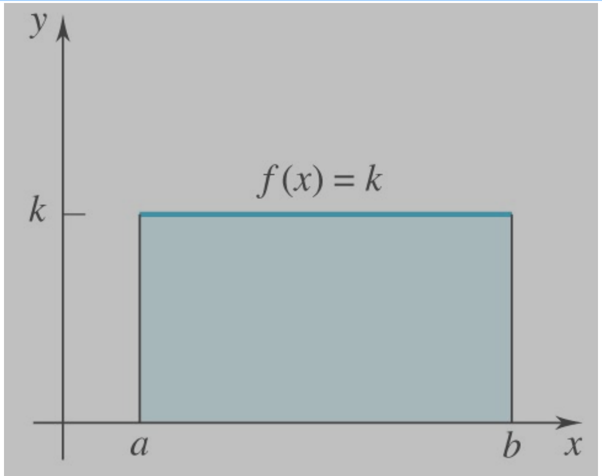


FIGURA 5.1.9

Por ejemplo,

$$\int_{-1}^{1} 3\,dx = 3[1-(-1)] = 3(2) = 6 \quad \text{y}$$

$$\int_{4}^{10} -2\,dx = -2(10-4) = -2(6) = -12.$$

Si $k > 0$, la región entre la gráfica de la función y el eje x es el rectángulo de altura k y de base el intervalo $[a, b]$. (Figura 5.1.9.) La integral nos da el área de este rectángulo.

Para comprobar esto tomemos una partición arbitraria de $[a, b]$, sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Dado que f es siempre igual a la constante k en $[a, b]$, también vale la constante k en cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. De ahí que M_i y m_i sean ambos iguales a k. Esto implica que

$$\begin{aligned} U_f(P) &= k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + \cdots + k\Delta x_n \\ &= k(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) \\ &= k[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})] \\ &= k(b-a) \qquad \text{(recordar que } x_0 = a \text{ y } x_n = b) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L_f(P) &= k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + \cdots + k\Delta x_n \\ &= k(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = k(b-a). \end{aligned}$$

Obviamente se verifica entonces que

$$L_f(P) \le k(b-a) \le U_f(P). \qquad \text{(se da la igualdad)}$$

Dado que esta desigualdad se verifica para todas las particiones P de $[a, b]$, podemos concluir que

$$\int_a^b f(x)\, dx = k(b-a).$$

Ejemplo 5

(5.1.7) $$\int_a^b x\,dx = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

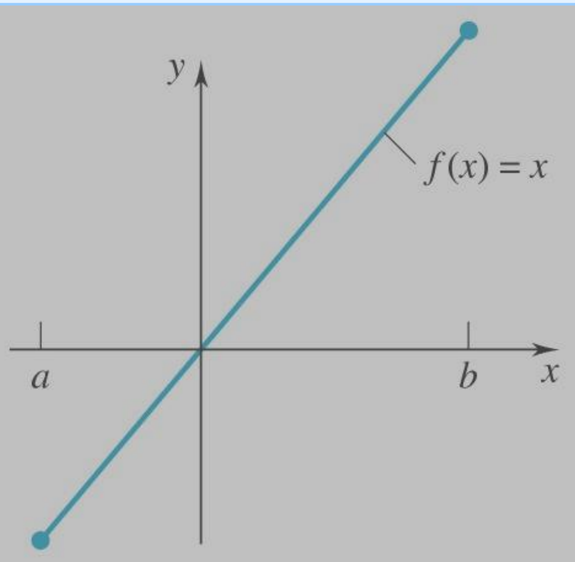


FIGURA 5.1.10

Por ejemplo,

$$\int_{-1}^{3} x\,dx = \tfrac{1}{2}[3^2 - (-1)^2] = \tfrac{1}{2}(8) = 4 \qquad \text{y} \qquad \int_{-2}^{2} x\,dx = \tfrac{1}{2}[2^2 - (-2)^2] = 0.$$

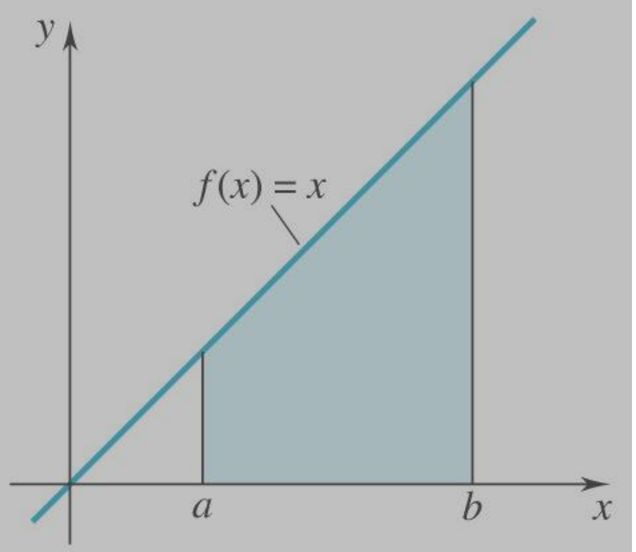
Si el intervalo $[a, b]$ está a la derecha del origen, la región por debajo de la gráfica de la función

$$f(x) = x, \qquad x \in [a, b]$$

es el trapecio de la figura 5.1.11. La integral

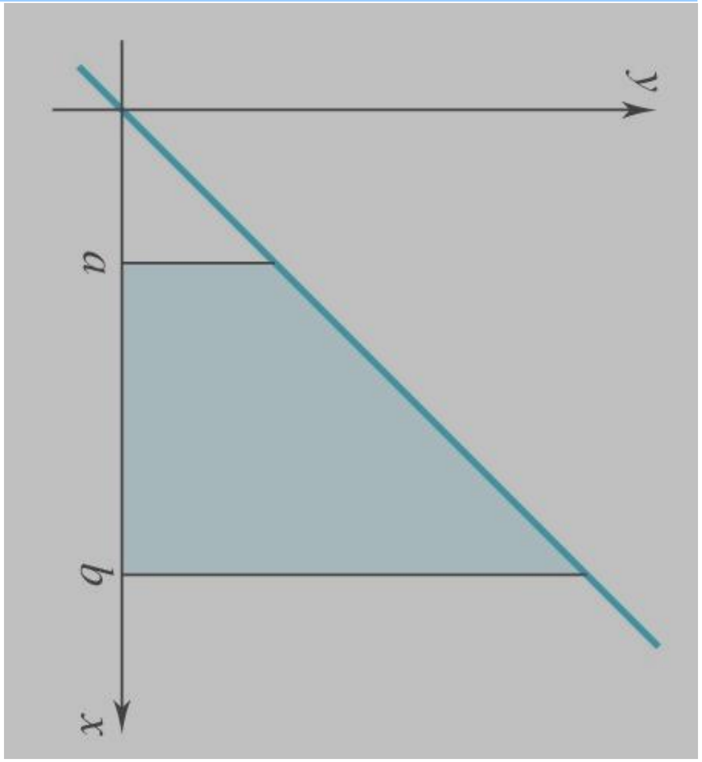
$$\int_a^b x\, dx$$

proporciona el área de dicho trapecio: $A = (b - a)[\frac{1}{2}(a + b)] = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.



El área de la región sombreada es $\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

FIGURA 5.1.11



Para comprobar este resultado, tomamos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, una partición arbitraria de $[a, b]$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la función $f(x) = x$ tiene un máximo M_i y un mínimo m_i. Como f es una función creciente, el valor máximo $M_i = x_i$ se da en el extremo derecho del subintervalo, y el valor mínimo $m_i = x_{i-1}$, en el extremo izquierdo. De ahí que

$$U_f(P) = x_1\Delta x_1 + x_2\Delta x_2 + \cdots + x_n\Delta x_n$$

y

$$L_f(P) = x_0\Delta x_1 + x_1\Delta x_2 + \cdots + x_{n-1}\Delta x_n.$$

Para cada índice i,

(*) $$\boxed{x_{i-1} \leq \tfrac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) \leq x_i.}$$ (explicar por qué)

La multiplicación por $\underline{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}}$ nos da

$$x_{i-1}\Delta x_i \leq \tfrac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) \leq x_i\Delta x_i.$$

Sumando desde $i = 1$ hasta $i = n$, obtenemos que

(**) $$L_f(P) \leq \tfrac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2) + \tfrac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + \cdots + \tfrac{1}{2}(x_n^2 - x_{n-1}^2) \leq U_f(P).$$

Simplificando la expresión del término intermedio, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) \;=\; \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

y, por consiguiente,

$$L_f(P) \le \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) \le U_f(P).$$

Dado que la partición P fue elegida de manera arbitraria, podemos concluir que esta desigualdad se verifica para todas las particiones P de $[a, b]$. Se deduce que

$$\int_a^b x\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Observación En el ejemplo anterior puede sorprender el hecho de que hayamos elegido la desigualdad (*) en lugar de cualquier otra como, por ejemplo,

$$x_{i-1} \le \tfrac{2}{3}x_{i-1} + \tfrac{1}{3}x_i \le x_i.$$

La razón es que la elección de (*) da lugar a la suma "simplificada" (**). Si no nos hubiéramos dado cuenta de este hecho, el problema hubiera sido muy difícil de resolver. Veremos esta idea otra vez en el ejemplo 6.

Ejemplo 6

$$\int_1^3 x^2\,dx = \tfrac{26}{3}. \qquad \text{(figura 5.1.12)}$$

Ver el ejemplo 2. Esta vez tomamos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ como una partición arbitraria de $[1, 3]$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la función creciente $f(x) = x^2$ tiene un máximo $M_i = x_i^2$ y un mínimo $m_i = x_{i-1}^2$. De ello se deduce que

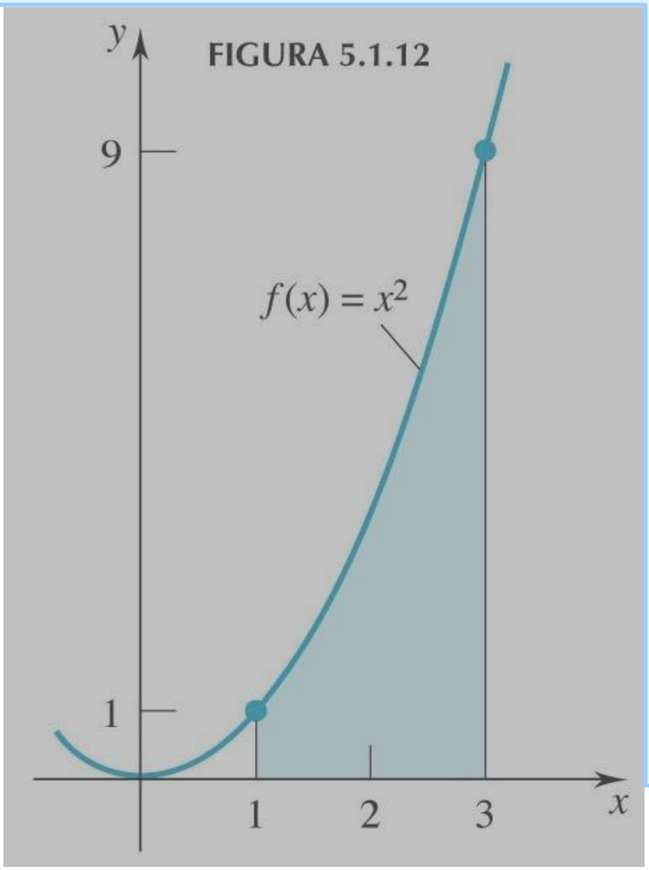


FIGURA 5.1.12

$$U_f(P) = x_1^2\Delta x_1 + \cdots + x_n^2\Delta x_n$$

y

$$L_f(P) = x_0^2\Delta x_1 + \cdots + x_{n-1}^2\Delta x_n.$$

Para cada índice i, (compruébese esto)

$$x_{i-1}^2 \leq \tfrac{1}{3}(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2) \leq x_i^2.$$

(Como veremos más adelante en este capítulo, $\frac{1}{3}(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2)$ es el valor medio de x^2 en $[x_{i-1}, x_i]$.)

Multiplicamos ahora esta desigualdad por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. El término central se reduce a

$$\tfrac{1}{3}(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2)(x_i - x_{i-1}) \;=\; \tfrac{1}{3}(x_i^3 - x_{i-1}^3),$$

lo cual nos muestra que

$$x_{i-1}^2 \Delta x_i \leq \tfrac{1}{3}(x_i^3 - x_{i-1}^3) \leq x_i^2 \Delta x_i.$$

La suma de los términos de la izquierda es $L_f(P)$. La suma de los términos del centro se reduce a $\frac{26}{3}$:

$$\tfrac{1}{3}(x_1^3 - x_0^3 + x_2^3 - x_1^3 + \cdots + x_n^3 - x_{n-1}^3) \;=\; \tfrac{1}{3}(x_n^3 - x_0^3) \;=\; \tfrac{1}{3}(3^3 - 1^3) \;=\; \tfrac{26}{3}.$$

La suma de los términos de la derecha es $U_f(P)$. Está claro entonces que

$$L_f(P) \leq \tfrac{26}{3} \leq U_f(P).$$

Dado que P se eligió arbitrariamente, podemos concluir que esta desigualdad es válida para cualquier partición P de $[1, 3]$. De ahí que

$$\int_1^3 x^2\, dx \;=\; \tfrac{26}{3}.$$

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. De acuerdo con nuestro estudio de la integración, la integral definida

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

es el único número que satisface la desigualdad

$$L_f(P) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq U_f(P)$$

para cualquier partición P de $[a, b]$. Este método de obtención de la integral definida aproximándola, cada vez más, por arriba y por debajo con las sumas superiores e inferiores, es conocido como *método de Darboux*.†

† En honor del matemático francés J. G. Darboux (1842-1917).

Jean-Gaston Darboux (1842 – 1917) ~ 75 años
Matemático francés, doctorado en 1866 a los 24 años con la tesis doctoral: *Sobre las Superficies Ortogonales*.

Sumas de Riemann

Existe otra manera de obtener la integral que se usa con frecuencia. Consideremos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$. Entonces P divide $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

de longitudes

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n.$$

Elijamos ahora un punto x_1^* de $[x_0, x_1]$ y formemos el producto $f(x_1^*)\Delta x_1$; elijamos un punto x_2^* de $[x_1, x_2]$ y formemos el producto $f(x_2^*)\Delta x_2$; continuemos de esta manera hasta formar los productos

$$f(x_1^*)\Delta x_1, f(x_2^*)\Delta x_2, \ldots, f(x_n^*)\Delta x_n.$$

La suma de estos productos

$$S^*(P) = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n$$

se denomina una *suma de Riemann*†. Como ejercicio, comprobar que si P es cualquier partición del intervalo $[a, b]$ y $S^*(P)$ es cualquier suma de Riemann correspondiente, entonces

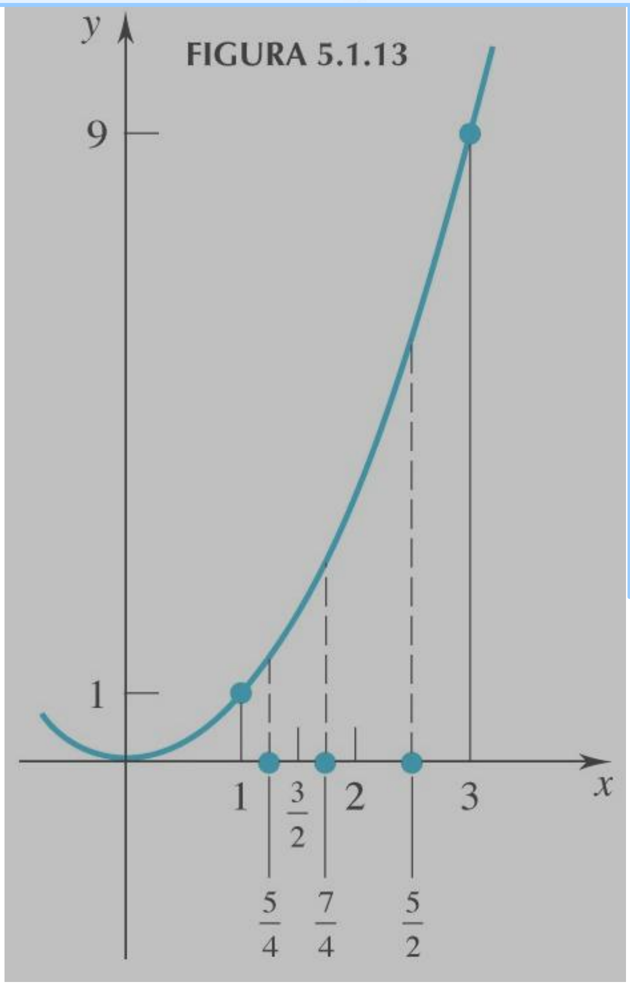
$$L_f(P) \leq S^*(P) \leq U_f(P).$$

† En honor del matemático alemán G. F. B. Riemann (1826-1866).

Georg-Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) ~ 40 años
Matemático alemán, doctorado en 1851 alos 25 años con
la tesis doctoral: *Fundamentos para una Teoría General*
de las Funciones de Variable Compleja.

Ejemplo 7 Sea $f(x) = x^2$, $x \in [1, 3]$. Tomemos una partición $P = \{1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$ y sean $x_1^* = \frac{5}{4}$, $x_2^* = \frac{7}{4}$ y $x_3^* = \frac{5}{2}$. Ver figura 5.1.13. Entonces $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{1}{2}$ y $\Delta x_3 = 1$. Luego

$$S^*(P) = f(\tfrac{5}{4}) \cdot (\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{7}{4}) \cdot (\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{5}{2}) \cdot 1 = \tfrac{25}{16} \cdot (\tfrac{1}{2}) + \tfrac{49}{16} \cdot (\tfrac{1}{2}) + \tfrac{25}{4} \cdot 1 = \tfrac{137}{16} = 8{,}5625.$$



Como vimos en el ejemplo 2,

$$U_f(P) = \tfrac{9}{4} \cdot (\tfrac{1}{2}) + 4 \cdot (\tfrac{1}{2}) + 9 \cdot 1 = \tfrac{97}{8} = 12{,}125,$$

y

$$L_f(P) = 1 \cdot (\tfrac{1}{2}) + \tfrac{9}{4} \cdot (\tfrac{1}{2}) + 4 \cdot 1 = \tfrac{45}{8} = 5{,}625.$$

A partir del ejemplo 6, el valor exacto es:

$$\int_1^3 x^2\, dx = [\tfrac{1}{3}x^3]_1^3 = \tfrac{27}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{26}{3} \cong 8{,}667.$$

La integral definida puede verse como el *límite* de tales sumas de Riemann en el sentido siguiente: para cualquier partición P de $[a, b]$, definimos $\|P\|$, la *norma* de P, de la siguiente manera:

$$\|P\| = \max \Delta x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad \|P\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| S^*(P) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \epsilon,$$

independientemente de la forma en que los x_i^* hayan sido escogidos en $[x_{i-1}, x_i]$.

Con símbolos, esto se escribe

(5.1.8) $$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} [f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n].}$$

En el apéndice B.5 se da una demostración de este resultado. La figura 5.1.14 ilustra la idea. Aquí el intervalo de partida se ha subdividido en 8 subintervalos. El punto x_1^* se ha elegido en $[x_0, x_1]$, x_2^* en $[x_1, x_2]$ y así sucesivamente. Mientras que la integral representa el área por debajo de la gráfica, la suma de Riemann representa la suma de las áreas de los rectángulos sombreados. La diferencia entre estas dos magnitudes se puede hacer tan pequeña como queramos (menor que ϵ) simplemente haciendo la longitud máxima de las bases de los subintervalos de la base suficientemente pequeña —esto es, haciendo $\|P\|$ suficientemente pequeña.

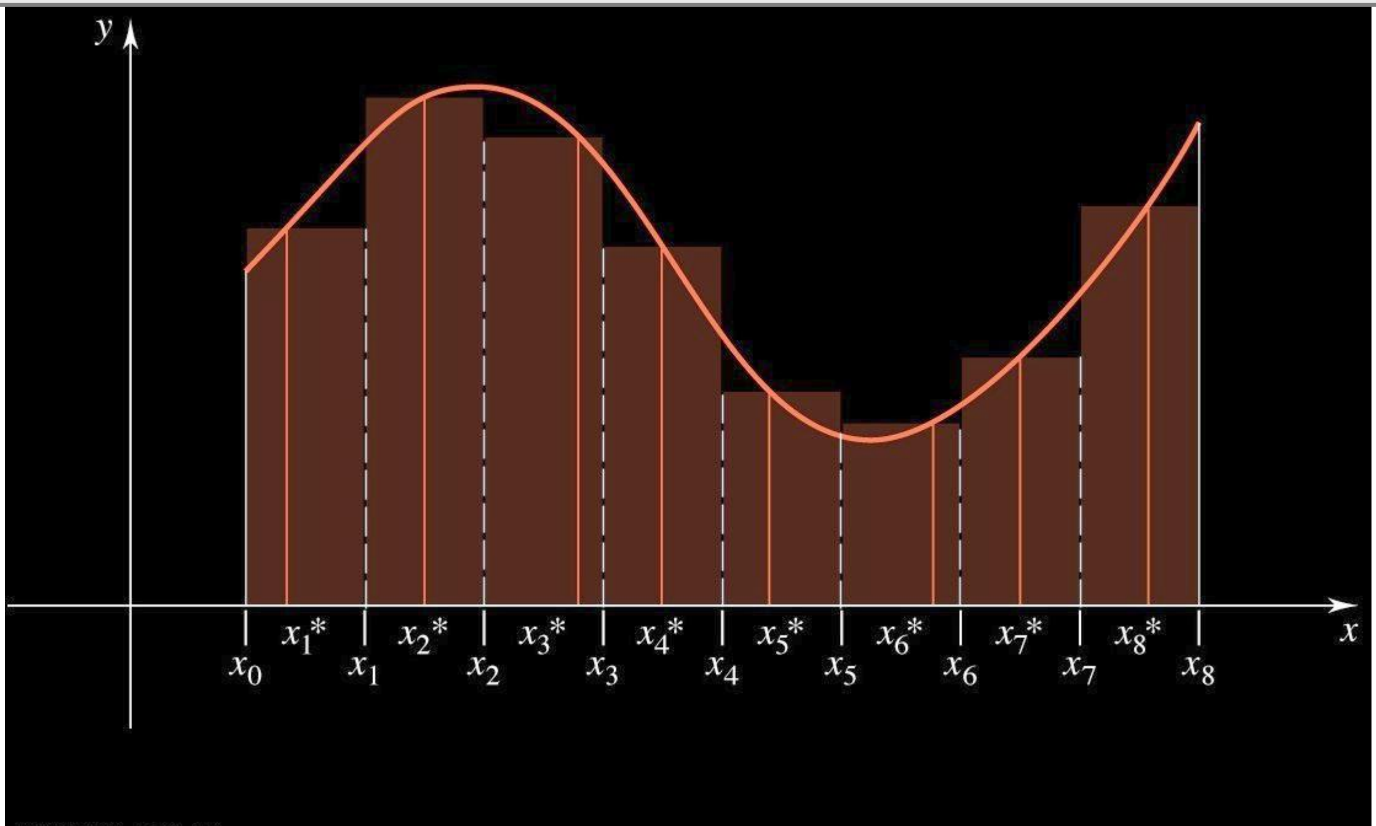


FIGURA 5.1.14

Ahora ya hemos visto dos aproximaciones a la integral definida de una función continua: a través de sumas superiores e inferiores, y a través de sumas de Riemann. Dado que

$$L_f(P) \leq S^*(P) \leq U_f(P)$$

para cualquier partición P, se deduce que la integral definida de f existe en el sentido de sumas superiores e inferiores sii existe en el sentido de sumas de Riemann.

En los ejercicios demostramos que también existen las integrales definidas de ciertas funciones discontinuas. Ver los ejercicios 41 y 42. En general, una función f definida en el intervalo $[a, b]$ es *integrable en* $[a, b]$ si su integral definida

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx}$$

existe tanto en el sentido de sumas superiores e inferiores como en el de sumas de Riemann. Determinar si una función dada es integrable es generalmente un problema muy difícil. Sin embargo, además de las funciones continuas, una función f es integrable en un intervalo $[a, b]$ si:

1. f es creciente en $[a, b]$ o f es decreciente en $[a, b]$.
2. f está acotada en $[a, b]$ y tiene como mucho un número finito de discontinuidades.

Ejercicios sugeridos, Sección 5.1

Prácticos: 6, 10, 15, 17, 32, 42

Teóricos: 19, 22, 29, 35, 38, 43