Integración 5

Sección 5.2

La función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

5.2 LA FUNCIÓN $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

El cálculo de una integral definida

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

directamente a partir de la definición, como el único número I que verifica la desigualdad $L_f(P) \leq I \leq U_f(P)$ para toda partición P de $[a, b]$ suele resultar un proceso laborioso y difícil. Inténtese, por ejemplo, calcular

$$\int_2^5 \left(x^3 + x^{5/2} - \frac{2x}{1 - x^2}\right) dx \quad \text{o} \quad \int_{-1/2}^{1/4} \frac{x}{1 - x^2}\, dx$$

por ese método.

El teorema 5.3.2, conocido como el *teorema fundamental del cálculo integral*, nos proporciona otro procedimiento para calcular tales integrales. Dicho procedimiento es consecuencia de una relación entre integración y diferenciación descrita en el teorema 5.2.5. El objeto de esta sección es el de demostrar el teorema 5.2.5. En dicho empeño, recopilaremos alguna información que tiene interés por sí misma.

TEOREMA 5.2.1

Sea f continua en $[a, b]$ y sean P y Q dos particiones del intervalo $[a, b]$. Si $P \subseteq Q$, se verifica que

$$L_f(P) \leq L_f(Q) \quad \text{y} \quad U_f(Q) \leq U_f(P).$$

Este resultado puede justificarse como sigue: añadiendo puntos a una partición, los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tienden a ser cada vez más pequeños. Esto hace que los mínimos m_i tiendan a ser cada vez mayores y los máximos M_i tiendan a ser cada vez menores. Luego las sumas inferiores se hacen cada vez mayores mientras que las sumas superiores se hacen cada vez menores. Esta idea se ilustra (para una función positiva) en las figuras 5.2.1 y 5.2.2.

Si P es subconjunto de Q, entonces $L(f, P) \leq L(f, Q)$

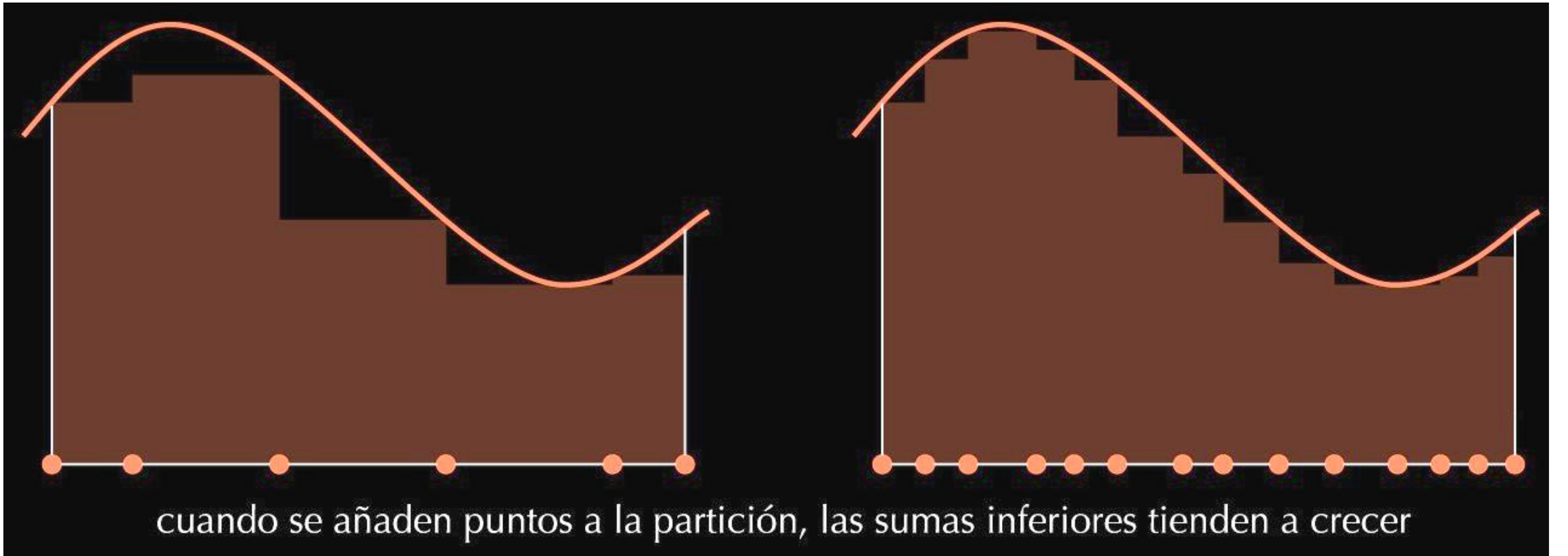


FIGURA 5.2.1

Si P es subconjunto de Q, entonces $U(f, Q) \leq U(f, P)$

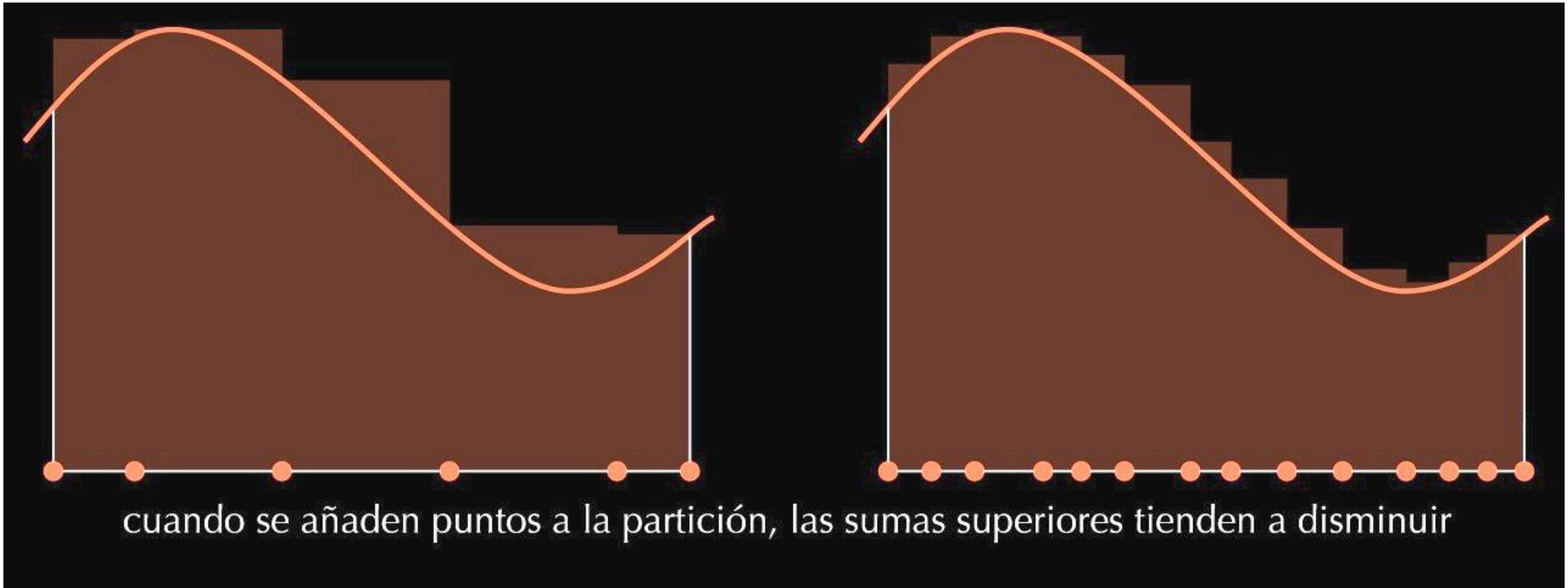


FIGURA 5.2.2

El próximo teorema nos dice que la integral, como función del intervalo, es *aditiva*.

TEOREMA 5.2.2

Si f es continua en $[a, b]$ y $a < c < b$, entonces se verifica que

$$\int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ (dt).$$

Para una función no negativa, este teorema se interpreta fácilmente en términos de áreas. El área de la parte I en la figura 5.2.3 viene dada por

$$\int_a^c f(t)\ dt \quad \text{y el de la parte II por} \quad \int_c^b f(t)\ dt\ ;$$

mientras que el área de la región completa viene dada por $\int_a^b f(t)\ dt$.

El teorema nos dice que

área de la parte I + área de la parte II = área de la región completa.

El hecho de que el teorema de aditividad sea susceptible de interpretaciones tan fáciles de entender no nos exime de la necesidad de demostrarlo. He aquí una demostración.

Aditividad de la integral definida: $A(\Omega) = A(\mathrm{I}) + A(\mathrm{II})$

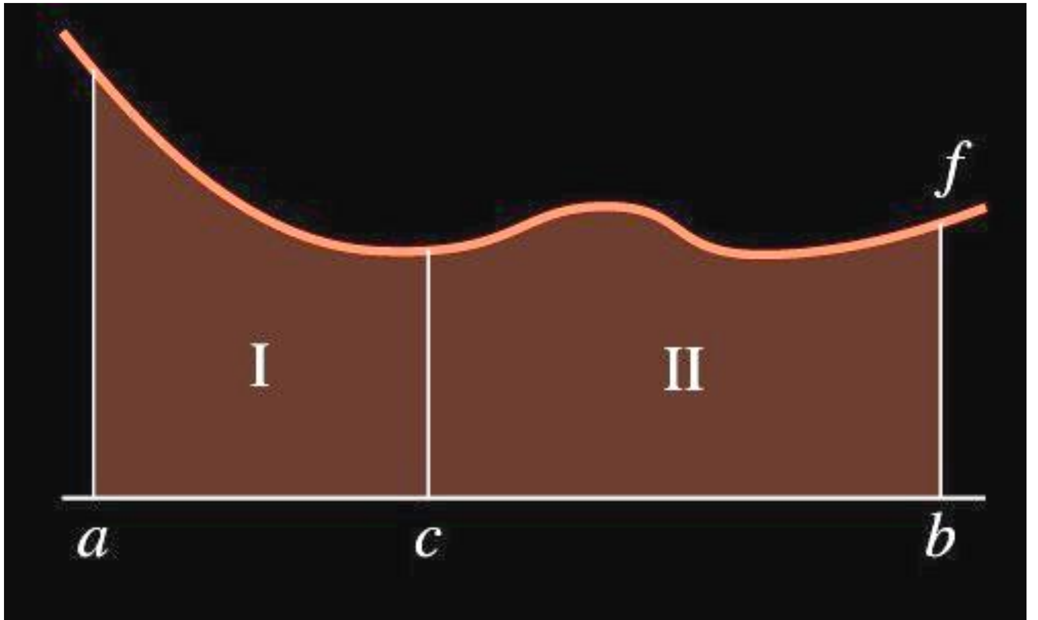


FIGURA 5.2.3

Demostración del teorema 5.2.2 Para demostrar el teorema basta que demostremos que para toda partición P de $[a, b]$ se verifica

$$L_f(P) \leq \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt \leq U_f(P). \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Consideremos una partición arbitraria de $[a, b]$:

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}.$$

Dado que la partición $Q = P \cup \{c\}$ contiene P, el teorema 5.2.1 nos permite afirmar que

$$(1) \qquad L_f(P) \leq L_f(Q) \quad \text{y} \quad U_f(Q) \leq U_f(P).$$

Los conjuntos

$$Q_1 = Q \cap [a, c] \quad \text{y} \quad Q_2 = Q \cap [c, b]$$

son particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente. Además

$$L_f(Q_1) + L_f(Q_2) = L_f(Q) \quad \text{y} \quad U_f(Q_1) + U_f(Q_2) = U_f(Q).$$

Dado que

$$L_f(Q_1) \leq \int_a^c f(t)\ dt \leq U_f(Q_1) \qquad \text{y} \qquad L_f(Q_2) \leq \int_c^b f(t)\ dt \leq U_f(Q_2),$$

tendremos que

$$L_f(Q_1) + L_f(Q_2) \leq \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt \leq U_f(Q_1) + U_f(Q_2).$$

Se deduce que

$$L_f(Q) \leq \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt \leq U_f(Q)$$

y, dado (1), que

$$L_f(P) \leq \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt \leq U_f(P).$$

Hasta ahora sólo hemos integrado de izquierda a derecha: desde un número a hasta un número b mayor que a. También se integra en sentido opuesto definiendo

(5.2.3)
$$\boxed{\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt}$$

Además, la integral desde cualquier número hasta él mismo se define como 0:

(5.2.4)
$$\boxed{\int_c^c f(t)\,dt = 0}$$

Con estos convenios suplementarios, la condición de aditividad

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

se cumple para cualquier elección de a, b, c en un intervalo en el cual f sea continua, independientemente de su orden. La demostración de este resultado se ha dejado para uno de los ejercicios.

Nos encontramos ahora en condiciones de establecer la relación básica existente entre integración y diferenciación. Nuestro primer paso consiste en poner de relieve el hecho de que, si f es continua en $[a, b]$, entonces para cada x en $[a, b]$, la integral

$$\int_a^x f(t)\, dt$$

es un número y, en consecuencia, podemos definir una función F en $[a, b]$ haciendo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

TEOREMA 5.2.5

Si f es continua en $[a, b]$, la función F definida en $[a, b]$ haciendo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

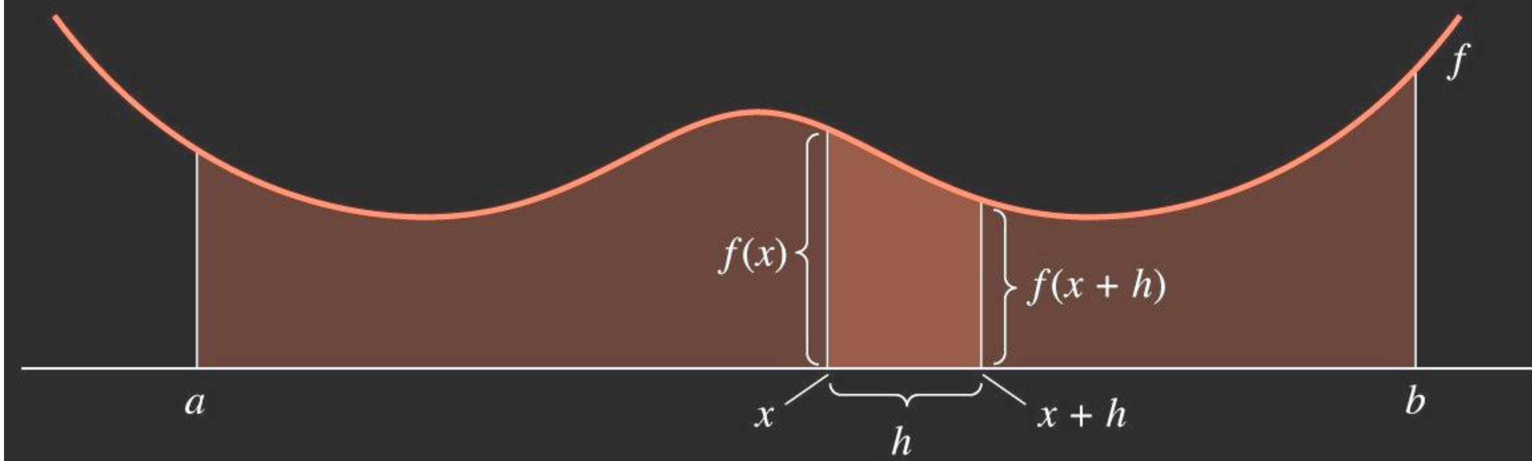
es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b), y tiene como derivada

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \text{ en } (a, b).$$

Demostración Comenzamos considerando x en el intervalo semiabierto $[a, b)$ y demostramos que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

(Ver la figura 5.2.4 para una representación gráfica de la demostración en el caso de una función no negativa.)



$F(x+h)$ = área desde a hasta $x+h$ y $F(x)$ = área desde a hasta x

Por tanto, $F(x+h) - F(x)$ = área desde x hasta $x + h \approx f(x)\,h$ si h es pequeña, y

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx \frac{f(x)\,h}{h} = f(x).$$

FIGURA 5.2.4

Si $x < x + h \leq b$, entonces $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt.$

Se deduce que (1) $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$ (justificar este paso)

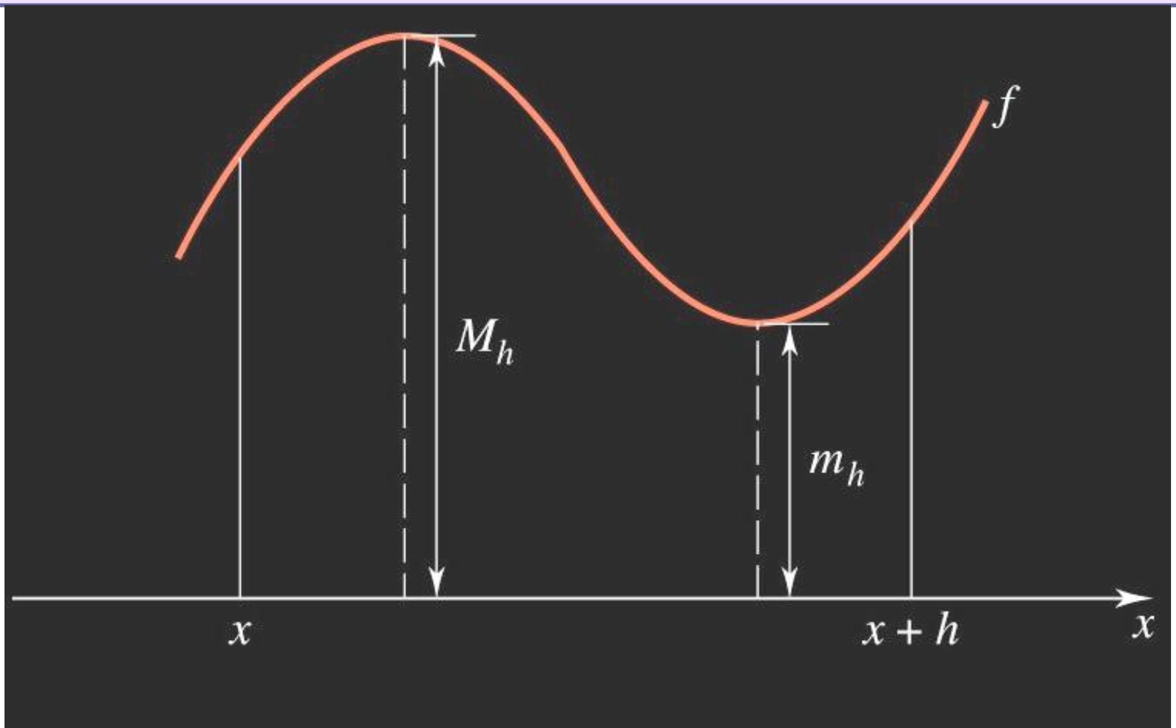


FIGURA 5.2.5

Hagamos ahora M_h = valor máximo de f en $[x, x+h]$

y m_h = valor mínimo de f en $[x, x+h]$.

Dado que $M_h[(x+h)-x] = M_h \cdot h$ es una suma superior para f en $[x, x+h]$

y que $m_h[(x+h)-x] = m_h \cdot h$ es una suma inferior para f en $[x, x+h]$,

tendremos que $m_h \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq M_h \cdot h$.

Ahora bien, utilizando (1) y el hecho de que $h > 0$, se deduce que

$$m_h \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_h \,.$$

Puesto que f es continua en $[x, x+h]$, $\lim_{h \to 0^+} m_h = f(x) = \lim_{h \to 0^+} M_h$

y, por consiguiente,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \qquad (2)$$

por el teorema de la función intermedia, teorema 2.5.1.

De manera análoga se puede demostrar que, para x en el intervalo semiabierto $(a, b]$, se verifica

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \tag{3}$$

Para x en el intervalo abierto (a, b), se verifican (2) y (3) a la vez, por lo que tenemos

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Esto demuestra que F es diferenciable en (a, b) y que su derivada es $F'(x) = f(x)$.

Sólo queda por demostrar que F es continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b. Aplicando la relación (2) a $x = a$ obtenemos .

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f(a).$$

Ahora, para $h > 0$,

$$F(a+h) - F(a) = \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \cdot h$$

y de ello se deduce que

$$\lim_{h \to 0^+} [F(a+h) - F(a)] = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{F(a+h) - F(a)}{h} \cdot h \right) = f(a) \cdot \lim_{h \to 0^+} h = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{h \to 0^+} F(a+h) = F(a).$$

Esto demuestra que F es continua por la derecha en a. La continuidad por la izquierda en b puede demostrarse aplicando (3) en $x = b$.

Ejemplo 1 Si F está definida por

$$F(x) = \int_{-1}^{x} (2t + t^2)\, dt \qquad \text{para } -1 \leq x \leq 5,$$

entonces

$$F'(x) = 2x + x^2 \qquad \text{en } (-1, 5).$$

Ejemplo 2 Si F está definida por

$$F(x) = \int_{0}^{x} \operatorname{sen} \pi t\, dt,$$

determinar $F'(3/4)$.

Solución Por el teorema 5.2.5,

$$F'(x) = \operatorname{sen} \pi x.$$

Por tanto, $F'(3/4) = \operatorname{sen}(3\pi/4) = \sqrt{2}/2.$

Ejemplo 3 Sea F una función definida por

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \qquad \text{donde } x \text{ es cualquier número real.}$$

(a) Hallar los números críticos de F y determinar los intervalos en los que F es creciente y en los que es decreciente.

(b) Determinar la concavidad de la gráfica de F y hallar los puntos de inflexión (si existen).

(c) Bosquejar la gráfica de F.

Solución

(a) Para hallar donde F es creciente o decreciente necesitamos examinar la derivada primera. Por el teorema 5.2.5,

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dado que $F'(x) > 0$ para todo x, F es creciente en $(-\infty, \infty)$; no existen números críticos.

(b) Para determinar la concavidad de la gráfica y hallar los puntos de inflexión utilizamos la derivada segunda:

$$F''(x) = \frac{-2\,x}{(1+x^2)^2}.$$

El signo de F'' y el comportamiento de F son:

signo de F'':	$+ + + + + +$	0	$- - - - - - -$	
comportamiento de la gráfica:	cóncava hacia arriba	0 ↑ punto de inflexión	cóncava hacia abajo	x

(c) Dado que $F(0) = 0$ y $F'(0) = 1$, la gráfica pasa por el origen con pendiente 1. En la figura 5.2.6 se muestra un bosquejo de la gráfica. Aunque ahora no puede percibirse, en el capítulo 7 veremos que $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ son asíntotas horizontales de la gráfica.

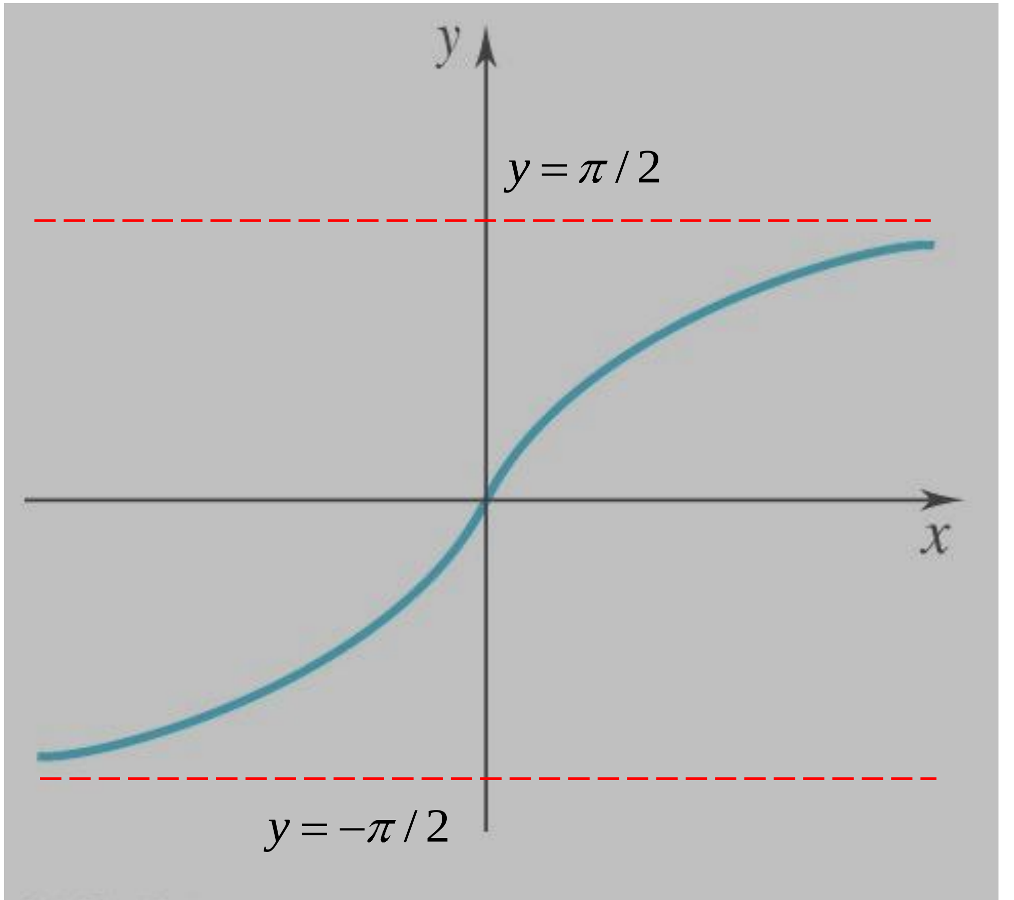


FIGURA 5.2.6

Ejercicios sugeridos, Sección 5.2

Prácticos: 6, 8, 11, 17, 21, 26, 28

Teóricos: 16, 29, 32, 33, 34