Integración 5

Sección 5.3

El teorema fundamental del cálculo integral

5.3 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

DEFINICIÓN 5.3.1 ANTIDERIVADA

Sea f una función continua en $[a, b]$. Una función G será llamada *antiderivada* de f en $[a, b]$ sii

$$G \text{ es continua en } [a, b] \quad \text{y} \quad G'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in (a, b).$$

El teorema 5.2.5 establece que, si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es una antiderivada de f en $[a, b]$. Esto nos proporciona un método para construir antiderivadas, puesto que nos dice que podemos construir una antiderivada de f integrando f.

El llamado "teorema fundamental" sigue el camino inverso. Nos proporciona un método, no para hallar antiderivadas, sino para calcular integrales. Nos dice que podemos calcular

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

hallando una antiderivada de f.

TEOREMA 5.3.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Sea f continua en $[a, b]$. Si G es una antiderivada de f en $[a, b]$, se verifica que

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a).$$

Demostración Por el teorema 5.2.5 sabemos que la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es una antiderivada de f en $[a, b]$. Si G también es una antiderivada de f en $[a, b]$, ambas funciones F y G son continuas en $[a, b]$ y verifican $F'(x) = G'(x)$ para todo x en (a, b). Por el teorema 4.2.4 sabemos que existe una constante C tal que

$$F(x) = G(x) + C \quad \text{para todo } x \text{ en } [a, b]$$

Dado que $F(a) = 0$,

$$G(a) + C = 0 \quad \text{luego} \quad C = -G(a)$$

De ahí que

$$F(x) = G(x) - G(a) \quad \text{para todo } x \text{ en } [a, b]$$

En particular,

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) = G(b) - G(a)$$

Calcularemos ahora algunas integrales aplicando el teorema fundamental. En cada uno de los casos recurriremos a la más simple de las antiderivadas que se nos ocurran.

Ejemplo 1 Calcular $\int_1^4 x^2\,dx$.

Solución Como antiderivada de $f(x) = x^2$ podemos utilizar la función

$G(x) = \frac{1}{3}x^3$. (compruébese) Aplicando el teorema fundamental,

$$\int_1^4 x^2 dx = G(4) - G(1) = \tfrac{1}{3}(4)^3 - \tfrac{1}{3}(1)^3 = \tfrac{64}{3} - \tfrac{1}{3} = 21.$$

NOTA: Cualquier otra antiderivada de $f(x) = x^2$ tiene la forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ para alguna constante C. Si hubiésemos elegido un tal H en lugar de G, entonces

$$\int_1^4 x^2 dx = H(4) - H(1) = [\tfrac{1}{3}(4)^3 + C] - [\tfrac{1}{3}(1)^3 + C] = \tfrac{64}{3} + C - \tfrac{1}{3} - C = 21;$$

la C "se puede tachar".

Ejemplo 2 Calcular

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx.$$

Solución Aquí podemos utilizar la antiderivada $G(x) = -\cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = G(\pi/2) - G(0) = -\cos(\pi/2) - [-\cos(0)] = 0 - (-1) = 1.$$

Las expresiones de la forma $G(b) - G(a)$ se suelen escribir como sigue: $[G(x)]_a^b$.

Con esta notación, $\int_1^4 x \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4 = \frac{1}{3}(4)^3 - \frac{1}{3}(2)^3 = 21$ y

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) - [-\cos(0)] = 1.$$

El paso esencial en la aplicación del teorema fundamental es la determinación de una antiderivada G para el integrando f. Por tanto, necesitamos tener un suministro de antiderivadas de funciones. De nuestro estudio de la diferenciación, sabemos que

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}, \qquad r \text{ cualquier número racional.}$$

De esta fórmula se deduce inmediatamente que

$$G(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}, \qquad (r \neq -1)$$

es una antiderivada de $f(x) = x^r$. Análogamente, la fórmula de diferenciación

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

sugiere que $G(x) = \operatorname{sen} x$ es una antiderivada de $f(x) = \cos x$.

En general, cada fórmula de diferenciación proporciona una fórmula de antidiferenciación inmediata. En la tabla 5.3.3 se listan algunas antiderivadas que utilizaremos en esta sección.

TABLA 5.3.3

Función	Antiderivada
x^r	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ (r un número racional, $r \neq -1$)
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\sec^2 x$	$\tan x$
$\sec x \tan x$	$\sec x$
$\operatorname{cosec}^2 x$	$-\cot x$
$\operatorname{cosec} x \cot x$	$-\operatorname{cosec} x$

Se puede comprobar que la derivada de cada función en la columna de la derecha es la correspondiente función en la columna izquierda.

Los siguientes ejemplos utilizan las funciones de la tabla 5.3.3.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3} = \int_1^2 x^{-3}\, dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = -\tfrac{1}{8} - (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{8}.$$

$$\int_0^t t^{5/3}\, dt = [\tfrac{3}{8}t^{8/3}]_0^1 = \tfrac{3}{8}(1)^{8/3} - \tfrac{3}{8}(0)^{8/3} = \tfrac{3}{8}.$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sec^2 x\, dx = [\tan x]_{-\pi/4}^{\pi/3} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{-\pi}{4} = \sqrt{3} - (-1) = \sqrt{3} + 1.$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = [-\operatorname{cosec} x]_{\pi/6}^{\pi/2} = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} - \left[-\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}\right] = -1 - (-2) = 1.$$

Ejemplo 3 Calcular

$$\int_0^1 (2x - 6x^4 + 5)\ dx.$$

Solución Como antiderivada podemos utilizar $G(x) = x^2 - \frac{6}{5}x^5 + 5x$:

$$\int_0^1 (2x - 6x^4 + 5)\ dx = \left[x^2 - \tfrac{6}{5}x^5 + 5x\right]_0^1 = 1 - \tfrac{6}{5} + 5 = \tfrac{24}{5}.$$

Ejemplo 4 Calcular $\int_{-1}^{1} (x-1)(x+2)\ dx.$

Solución Primero llevamos a cabo la multiplicación indicada

$$(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2.$$

Como antiderivada podemos utilizar $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$:

$$\int_{-1}^{1} (x-1)(x+2)\ dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{1} = -\tfrac{10}{3}.$$

Consideraremos ahora algunos ejemplos algo más complicados. En cada caso el paso esencial radica en la determinación de una antiderivada. Compruébese cada paso de estos cálculos con detalle.

$$\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2}\,dx = \int_1^2 (x^2+x^{-2})\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^{-1}\right]_1^2 = \tfrac{17}{6}.$$

$$\int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \int_1^5 (x-1)^{1/2}\,dx = \left[\tfrac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_1^5 = \tfrac{16}{3}.$$

$$\int_0^1 (4-\sqrt{x})^2\,dx = \int_0^1 (16-8\sqrt{x}+x)\,dx = \left[16x - \tfrac{16}{3}x^{3/2} + \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \tfrac{67}{6}.$$

$$\int_1^2 -\frac{dt}{(t+2)^2} = \int_1^2 -(t+2)^{-2}\,dt = \left[(t+2)^{-1}\right]_1^2 = -\tfrac{1}{12}.$$

La linealidad de la integral

Los ejemplos anteriores sugieren algunas propiedades simples de la integral que son de uso frecuente en el cálculo. En lo que sigue, f y g son funciones continuas, mientras que α y β son constantes.

I. Las constantes se pueden sacar fuera del signo integral:

(5.3.4) $$\boxed{\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.}$$

Por ejemplo,

$$\int_1^4 \tfrac{3}{7}\sqrt{x}\, dx = \tfrac{3}{7}\int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \tfrac{3}{7}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = \tfrac{2}{7}[(4)^{3/2} - (1)^{3/2}] = \tfrac{2}{7}[8-1] = 2.$$

$$\int_0^{\pi/4} 2\cos x\, dx = 2\int_0^{\pi/4} \cos x\, dx = 2[\operatorname{sen} x]_0^{\pi/4} = 2\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}(0)\right] = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Observación Debemos destacar que sólo las constantes pueden sacarse fuera de la integral: ¡las expresiones que contienen una variable no! Por ejemplo,

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx \neq x \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx.$$

Se puede comprobar que una antiderivada de $h(x) = x \cos x$ es $H(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x$, y por tanto

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = [x \operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/2} = \tfrac{\pi}{2} - 1.$$

Por otro lado,

$$x \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = x[\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = x.$$

II. La integral de una suma es la suma de las integrales:

(5.3.5) $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

Por ejemplo,

$$\int_1^2 \left[(x-1)^2 + \frac{1}{(x+2)^2}\right] dx = \int_1^2 (x-1)^2\, dx + \int_1^2 \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2 + \left[-(x+2)^{-1}\right]_1^2$$

$$= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12}.$$

III. La integral de una combinación lineal es la combinación lineal de las integrales:

(5.3.6) $$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x - 6x^4 + 5)dx &= 2\int_0^1 x\, dx - 6\int_0^1 x^4\, dx + \int_0^1 5\, dx \\ &= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + [5x]_0^1 = 1 - \tfrac{6}{5} + 5 = \tfrac{24}{5},\end{aligned}$$

como vimos en el ejemplo 3.

Las propiedades I y II son casos particulares de la propiedad III. Para demostrar III, sea F una antiderivada de f y sea G una antiderivada de g. Entonces, dado que

$$[\alpha F(x) + \beta G(x)]' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x),$$

se deduce que $\alpha F + \beta G$ es una antiderivada de $\alpha f + \beta g$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx &= [\alpha F(x) + \beta G(x)]_a^b \\ &= [\alpha F(b) + \beta G(b)] - [\alpha F(a) + \beta G(a)] \\ &= \alpha[F(b) - F(a)] - \beta[G(b) - G(a)] \\ &= \alpha\int_a^b f(x)\ dx + \beta\int_a^b g(x)\ dx. \end{aligned}$$

Ejemplo 5 Calcular

$$\int_0^{\pi/4} \sec x\ [2 \tan x - 5 \sec x]\ dx.$$

Solución

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sec x\ [2 \tan x - 5 \sec x]\ dx &= \int_0^{\pi/4} [2\ \sec x\ \tan x - 5\ \sec^2 x]\ dx \\
&= 2\int_0^{\pi/4} \sec x\ \tan x\ dx - 5\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\ dx \\
&= 2[\sec x]_0^{\pi/4} - 5[\tan\ x]_0^{\pi/4} \\
&= 2\left(\left[\sec \frac{\pi}{4} - \sec\ (0)\right] - 5\left[\tan\ \frac{\pi}{4} - \tan\ (0)\right]\right) \\
&= 2[\sqrt{2} - 1] - 5[1 - 0] = 2\sqrt{2} - 7.
\end{aligned}$$

Ejercicios sugeridos, Sección 5.3

Prácticos: 6, 9, 11, 17
33, 42, 50, 58

Teóricos: 59, 60, 61, 62