Integración 5

Sección 5.4

Algunos problemas de área

Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

5.4 ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁREA

En la sección 5.1 hemos visto que si f es no negativa y continua en $[a, b]$, la integral de f entre a y b da el área de la región debajo de la gráfica de f, esto es, el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Para la región Ω de la figura 5.4.1 se verifica que

(5.4.1) $$\boxed{\text{área de } \Omega = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

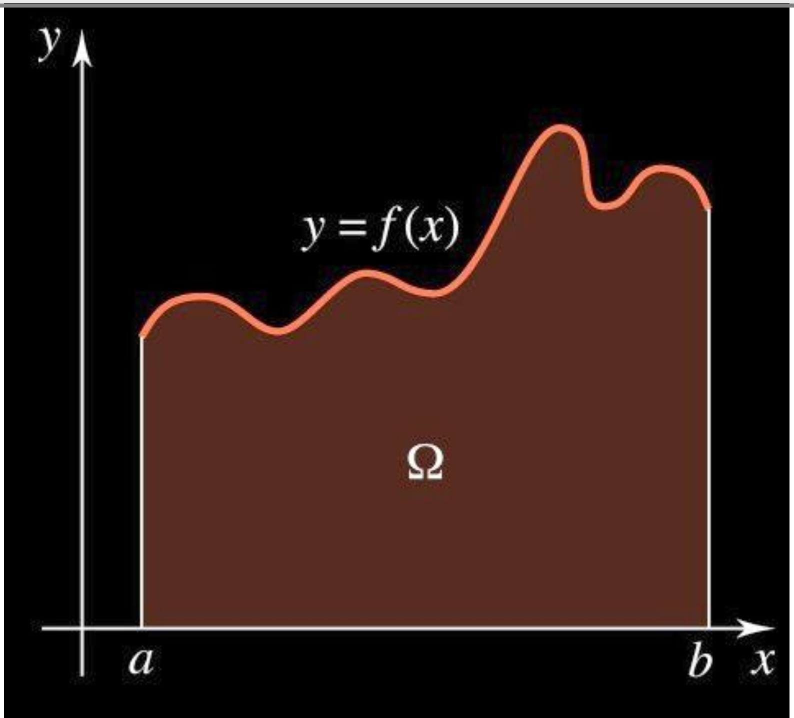


FIGURA 5.4.1

Ejemplo 1 Hallar el área debajo de la gráfica de la función raíz cuadrada entre $x = 0$ y $x = 1$.

Solución La gráfica está representada en la figura 5.4.2. El área en cuestión es $\frac{2}{3}$:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 x^{1/2}\, dx = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}.$$

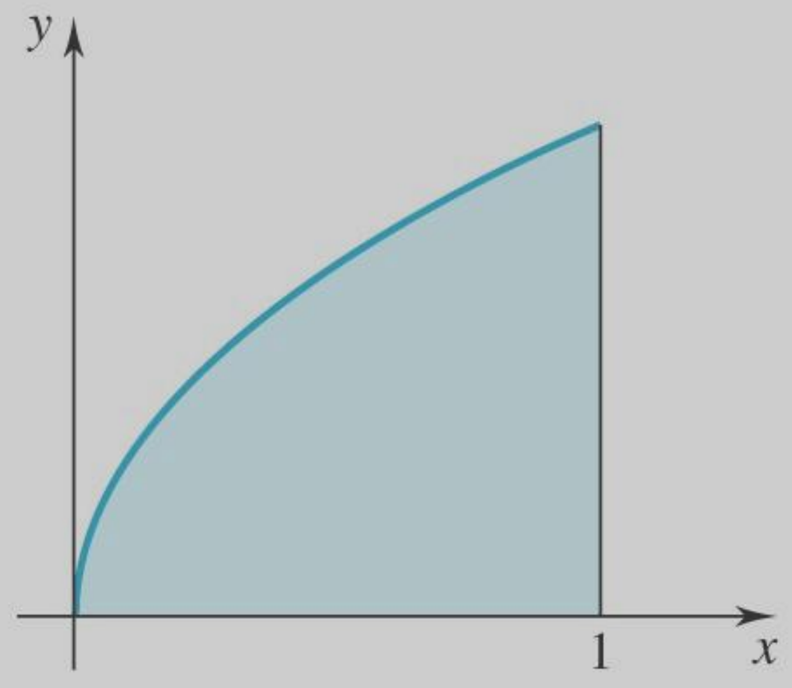


FIGURA 5.4.2

Ejemplo 2 Hallar el área de la región comprendida entre la curva $y = 4 - x^2$ y el eje de las x.

Solución La curva corta el eje x en $x = -2$ y $x = 2$. Véase la figura 5.4.3.

El área de la región es $\frac{32}{3}$:

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \tfrac{32}{3}.$$

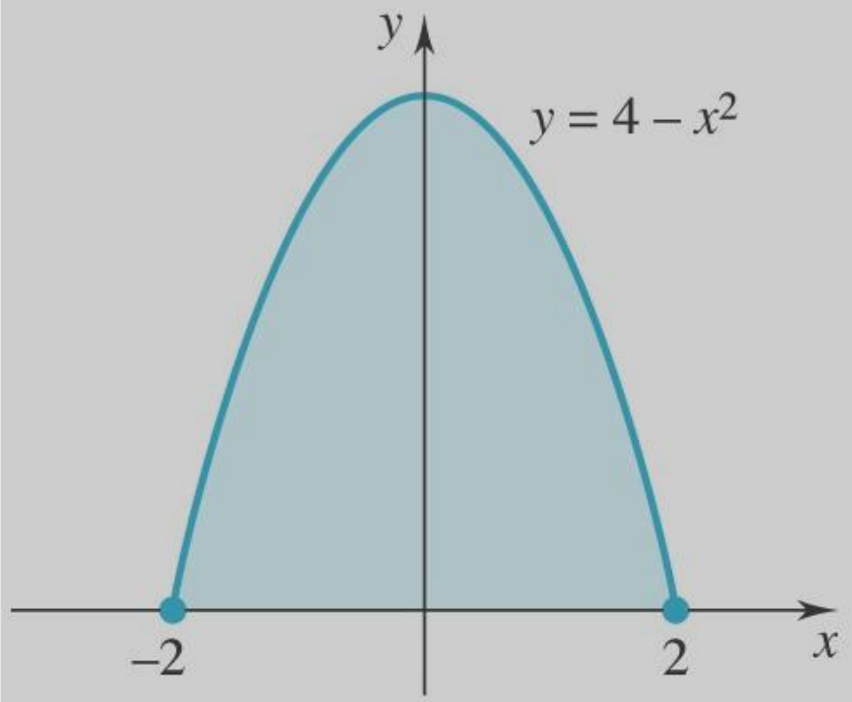


FIGURA 5.4.3

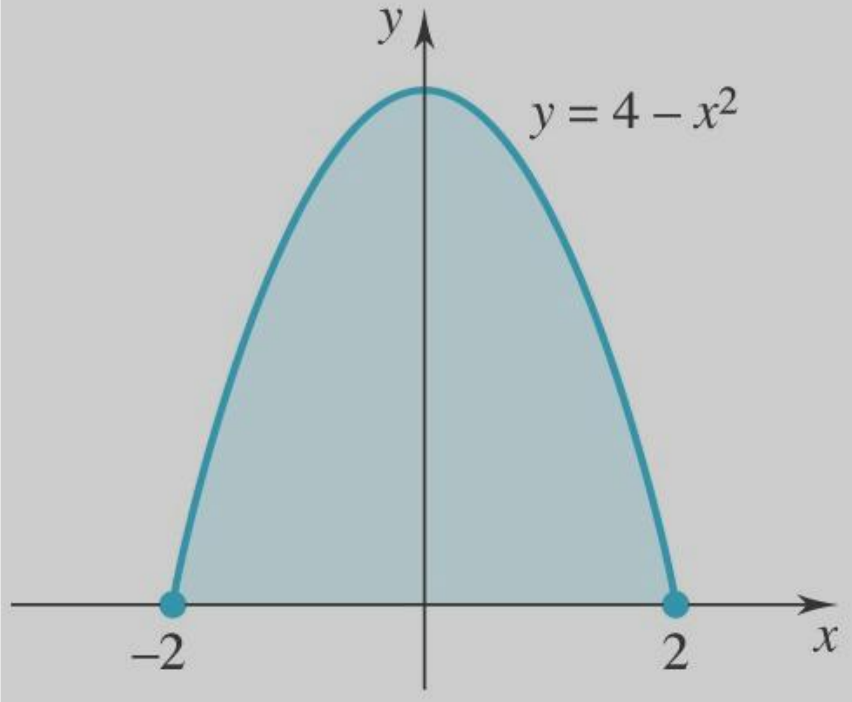


FIGURA 5.4.3

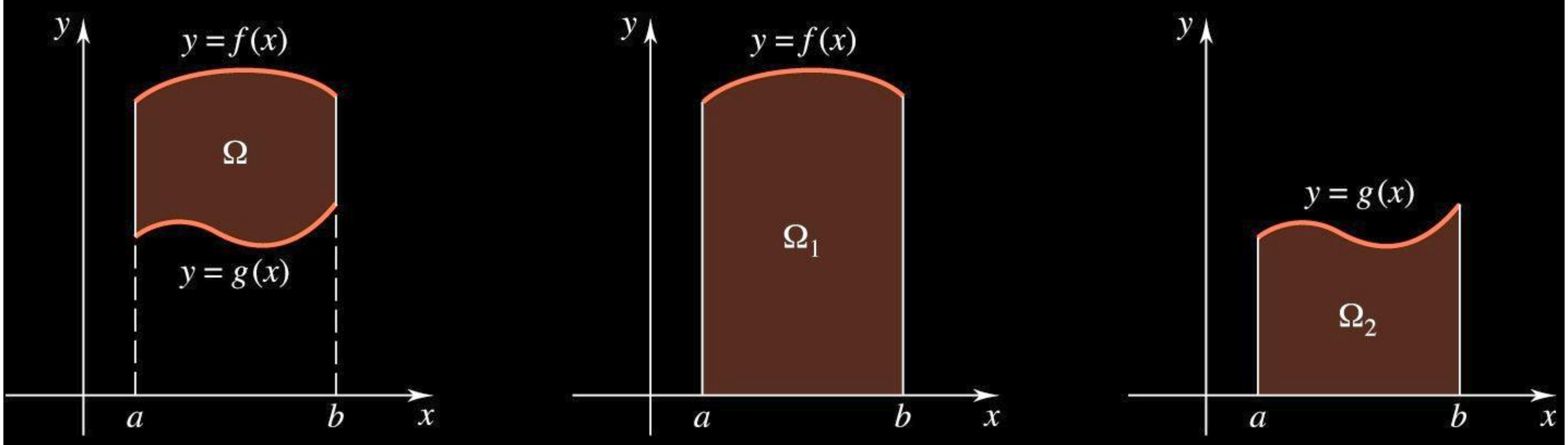
NOTA: Esta región es simétrica respecto al eje y. Por tanto, el área de la región es igual a $2\int_0^2 (4 - x^2)\ dx$, y esta integral es algo más fácil de calcular:

$$2\int_0^2 (4 - x^2)\ dx = 2\left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2(8 - \tfrac{8}{3}) = 2(\tfrac{16}{3}) = \tfrac{32}{3}.$$

En la sección 5.7 diremos algo más sobre la simetría en la integración.

Calcularemos ahora el área de algunas regiones algo más complicadas, como la región Ω representada en la figura 5.4.4. Para evitar excesivas repeticiones dejaremos claro desde ahora que en toda esta sección, los símbolos f, g, h representan funciones continuas.

Obsérvese la región Ω que se muestra en la figura 5.4.4. La frontera superior de Ω es la gráfica de una función no negativa f y su frontera inferior es la gráfica de otra función no negativa g. Podemos obtener el área de Ω calculando el área de Ω_1 y restándole el área de Ω_2.



área de Ω = área de Ω_1 – área de Ω_2

FIGURA 5.4.4

Dado que $\quad$ área de $\Omega_1 = \int_a^b f(x)\ dx \quad$ y $\quad$ área de $\Omega_2 = \int_a^b g(x)\ dx$,

tenemos que

$$\text{área de } \Omega = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx.$$

Podemos combinar las dos integrales de la siguiente forma por (5.3.6):

(5.4.2) $$\boxed{\text{área de } \Omega = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx.}$$

Hemos establecido la fórmula 5.4.2 suponiendo que tanto f como g son no negativas, pero esta hipótesis resulta innecesaria. La fórmula es válida para cualquier región Ω que tenga

una frontera superior de la forma $y = f(x), x \in [a, b]$

y

una frontera inferior de la forma $y = g(x), x \in [a, b]$.

Para verlo, tomemos Ω como en la figura 5.4.6. Evidentemente, Ω es congruente con la región designada por Ω' en la figura 5.4.7, que es Ω trasladada C unidades hacia arriba.

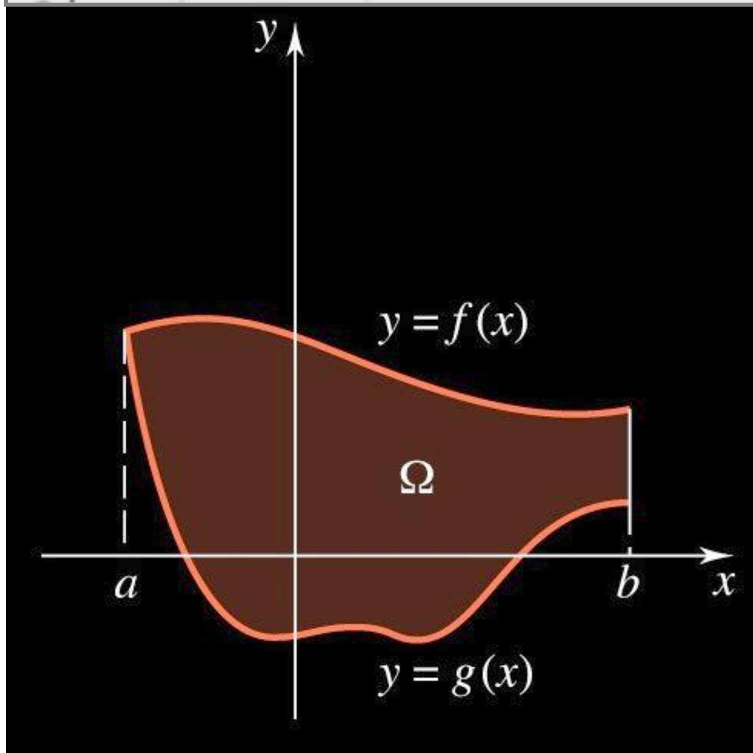


FIGURA 5.4.7

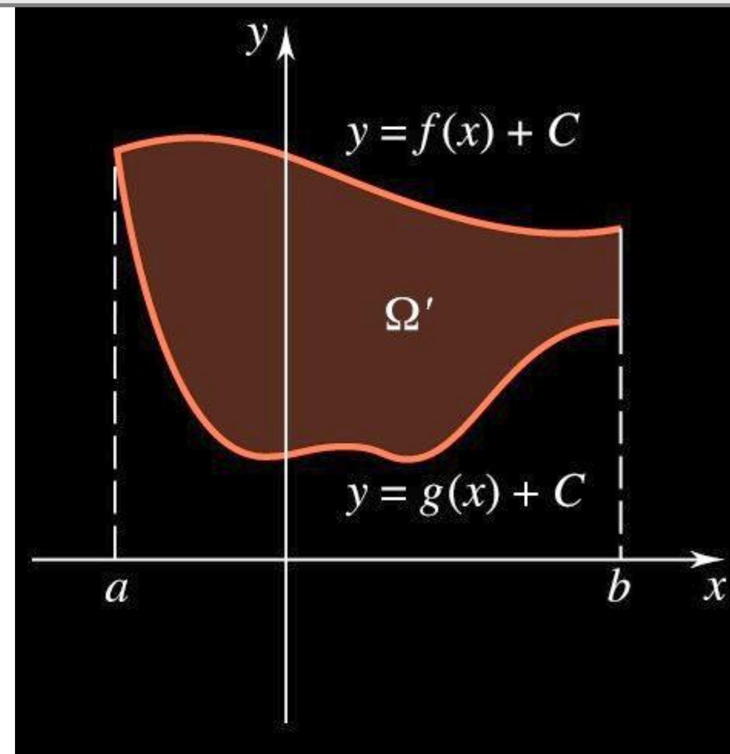


FIGURA 5.4.7

Dado que Ω' queda por encima del eje x, su área viene dada por la integral

$$\int_a^b \{[f(x) + C] - [g(x) + C]\}\ dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx.$$

Dado que el área de Ω es igual al área de Ω',

$$\text{área de } \Omega = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx,$$

como habíamos anunciado.

Ejemplo 3 Hallar el área de la región limitada por arriba por $y = x + 2$ y por debajo por $y = x^2$.

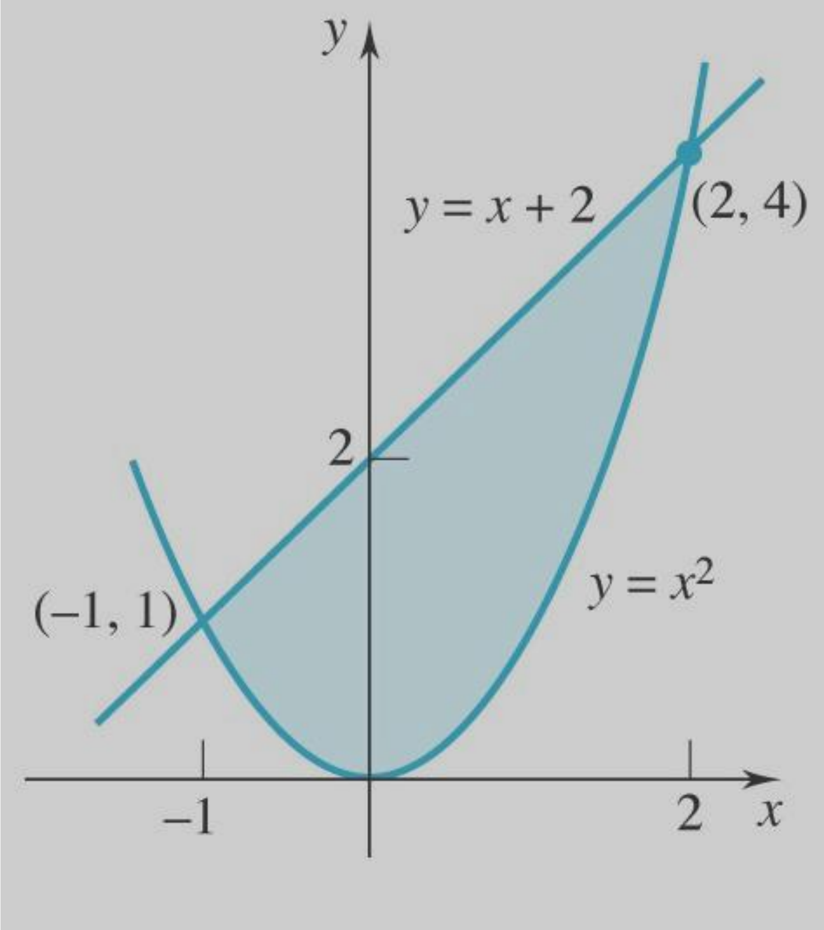


FIGURA 5.4.5

Solución En la figura 5.4.5 se muestra la región limitada por las gráficas de las dos ecuaciones. El primer paso será hallar los puntos de intersección de las dos curvas:

$$\begin{aligned} x+2 = x^2 \quad &\text{sii} \quad x^2-x-2 = 0 \\ &\text{sii} \quad (x+1)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

y por tanto $x = -1, 2$. Las curvas se cortan en $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.

El área de la región es

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} [(x+2)-x^2]\, dx &= \left[\tfrac{1}{2}x^2 + 2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(2+4-\tfrac{8}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{2} - 2 + \tfrac{1}{3}\right) \\ &= \tfrac{9}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4 Hallar el área de la región representada en la figura 5.4.8.

Solución

$$\text{área de } \Omega = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\operatorname{sen} x - \cos x]\, dx = \left[-\cos x - \operatorname{sen} x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}.$$

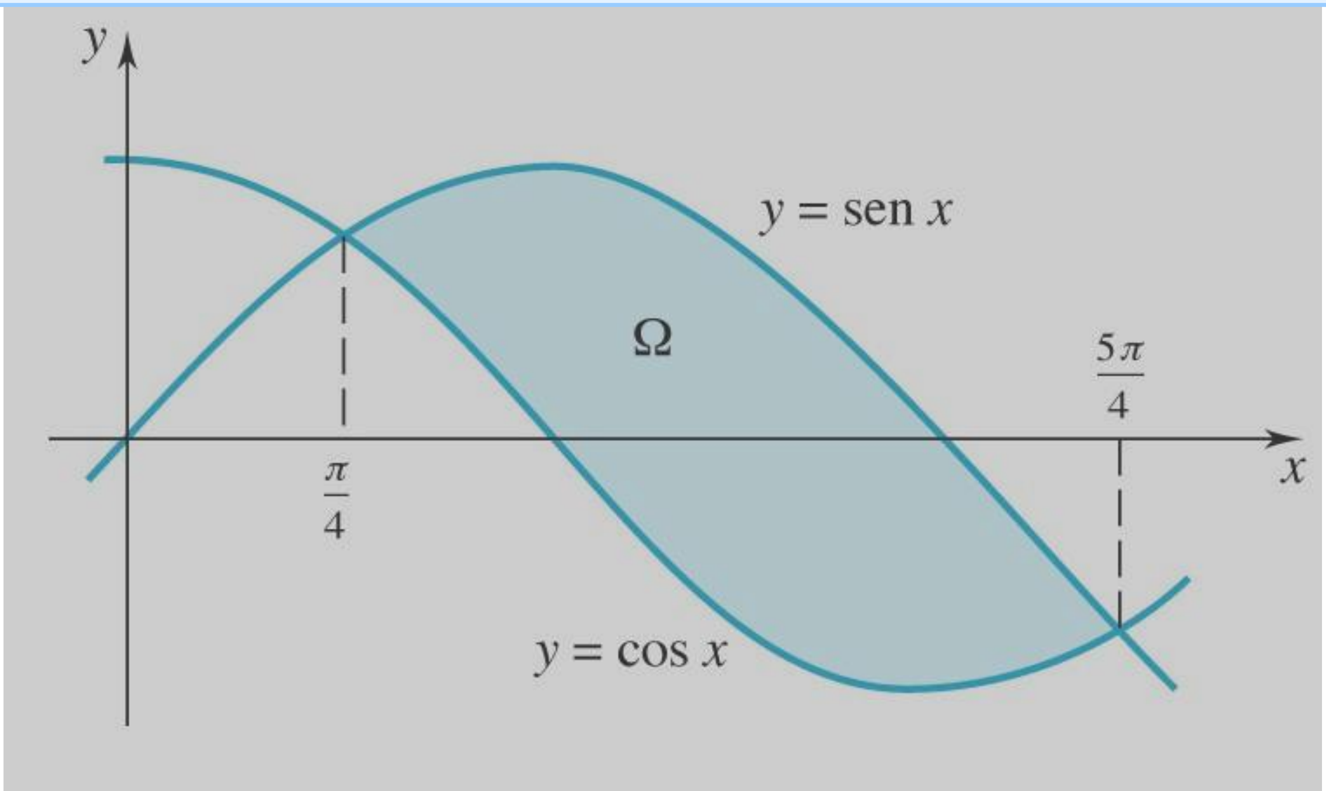


FIGURA 5.4.8

Ejemplo 5 Hallar el área comprendida entre las curvas

$$y = 4x \quad \text{e} \quad y = x^3$$

desde $x = -2$ hasta $x = 2$. Véase la figura 5.4.9.

Solución Obsérvese que $y = x^3$ es la frontera superior desde $x = -2$ hasta $x = 0$, pero que es la frontera inferior entre $x = 0$ y $x = 2$. De ahí que

$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_{-2}^{0} [x^3 - 4x]\,dx + \int_{0}^{2} [4x - x^3]\,dx \\ &= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2} \\ &= [0 - (-4)] + [4 - 0] = 8. \end{aligned}$$

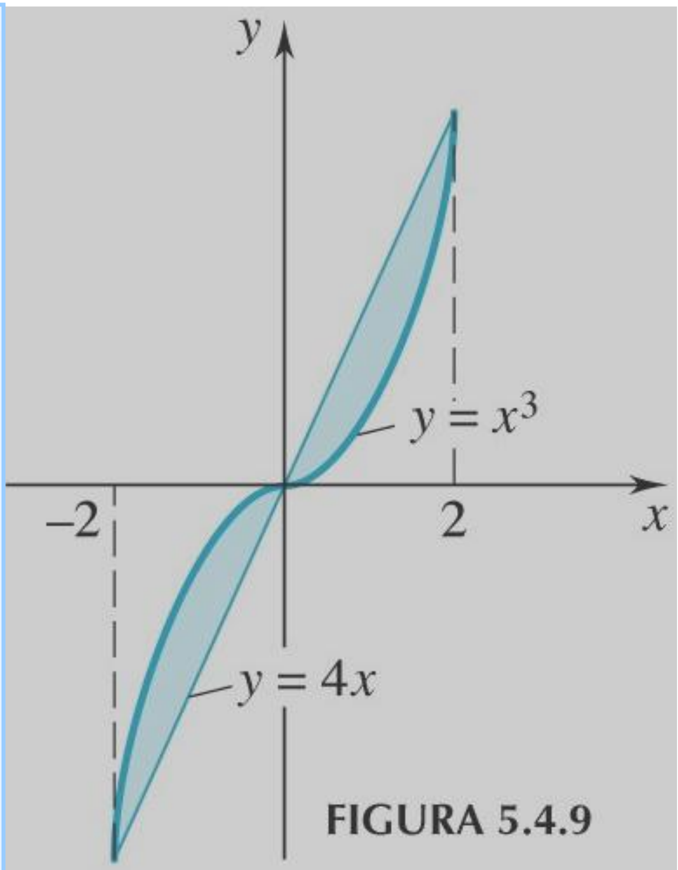


FIGURA 5.4.9

Ejemplo 6 Representar el área de la región $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ de la figura 5.4.10 mediante integrales.

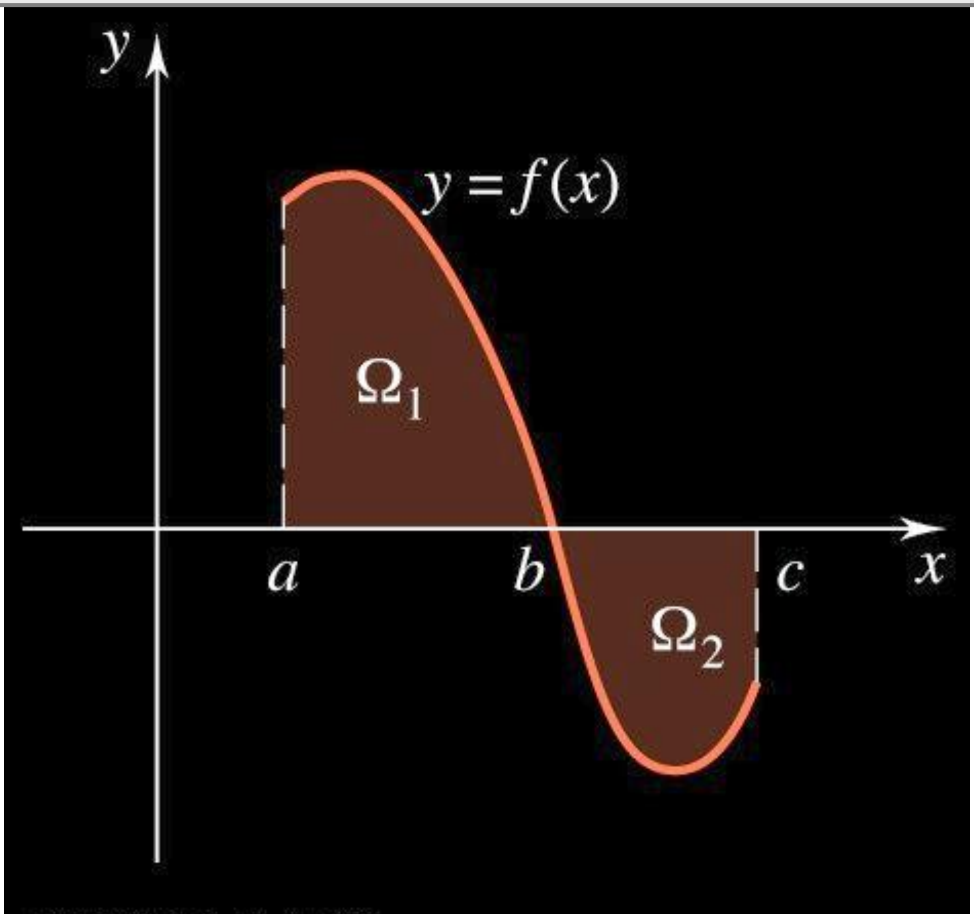


FIGURA 5.4.10

Solución Desde $x = a$ hasta $x = b$, la curva $y = f(x)$ está por encima del eje x. Luego

$$\text{área de } \Omega_1 = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Desde $x = b$ hasta $x = c$, la curva $y = f(x)$ está por debajo del eje x. La frontera superior de Ω_2 es la curva $y = 0$ (el eje x) y la frontera inferior es la curva $y = f(x)$. Luego

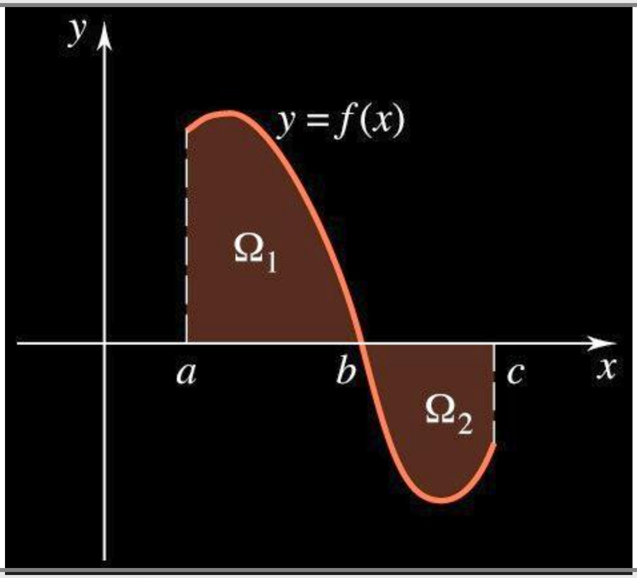
$$\text{área de } \Omega_2 = \int_b^c [0 - f(x)]\, dx = \int_b^c -f(x)\, dx.$$

El área de Ω es la suma de estas dos áreas:

$$\text{área de } \Omega = \int_a^b f(x)\, dx - \int_b^c f(x)\, dx.$$

Área orientada

La solución del ejemplo 6 sugiere una interpretación geométrica general de la integral definida de una función continua f. Por ejemplo, si f es como se indica en la figura 5.4.10, entonces $\int_a^c f(x)\,dx$ es un número Pero, ¿qué representa este número en términos del área?



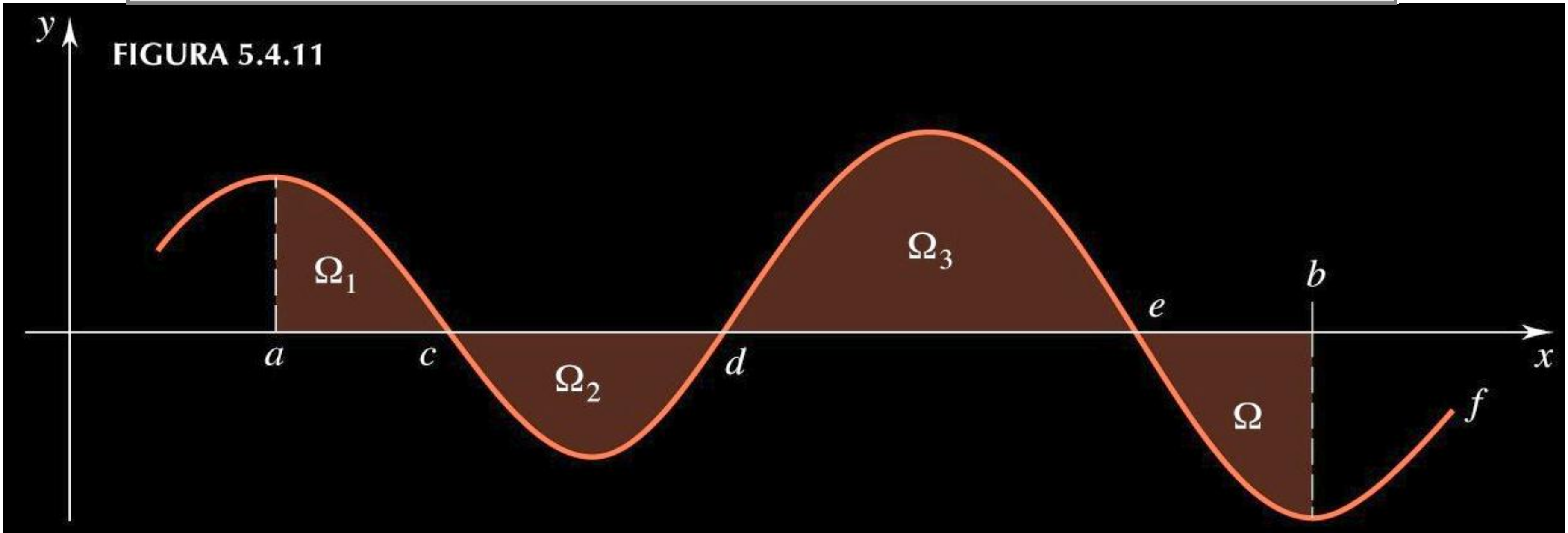
Dado que $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx =$ área de Ω_1 – área de Ω_2,

se deduce que $\int_a^c f(x)\,dx$ es el área de la región por encima del eje x *menos* el área de la región por debajo del eje x. Este resultado es, en general, verdadero: si f cambia de signo en el intervalo $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como la *diferencia* de dos áreas: el área total de las regiones que están por encima del eje x *menos* el área total de las regiones que están por debajo del eje x.

Consideremos la función f que se muestra en la figura 5.4.11:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx \\ &= \text{área de } \Omega_1 - \text{área de } \Omega_2 + \text{área de } \Omega_3 - \text{área de } \Omega_4 \\ &= [\text{área de } \Omega_1 + \text{área de } \Omega_3] - [\text{área de } \Omega_2 + \text{área de } \Omega_4].\end{aligned}$$

FIGURA 5.4.11

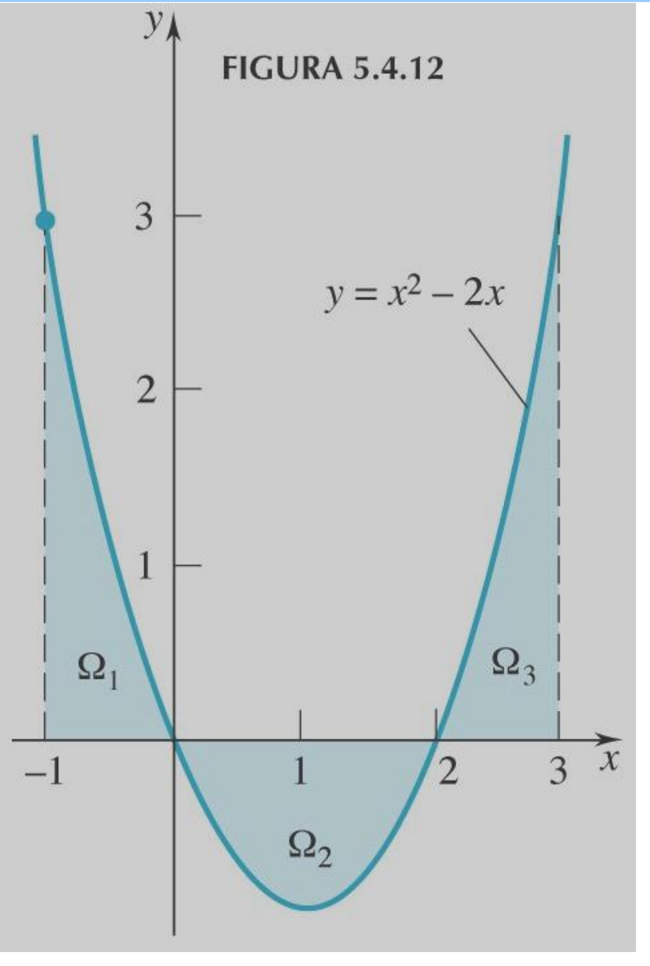


A veces a este valor se le llama *área orientada* o *área con signo*; $\int_a^b f(x)\,dx$ puede ser interpretado geométricamente como el área orientada de la región limitada por la gráfica de f y el eje x entre $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo 7 Calcular

$$\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x)\ dx$$

e interpretar el resultado en términos de áreas. Además, determinar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje x entre $x = -1$ y $x = 3$.



Solución En la figura 5.4.12 se muestra la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$. Luego

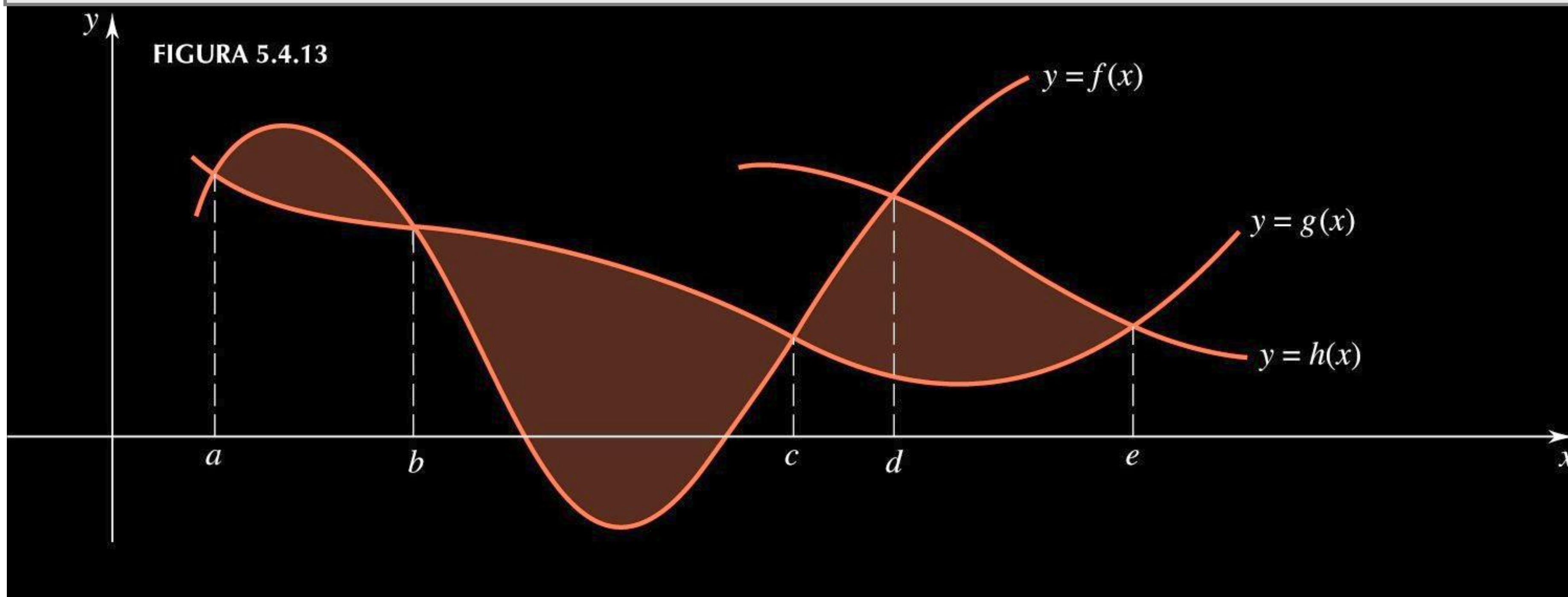
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}(x^2-2x)\,dx &= \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{3} \\ &= \left[\tfrac{1}{3}(3)^3 - (3)^2\right] - \left[\tfrac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2\right] = \tfrac{4}{3}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\int_{-1}^{3}(x^2-2x)\,dx =$ área de Ω_1 + área de Ω_3 − área de Ω_2 $= \tfrac{4}{3}$.

El área A de la región limitada por la gráfica de f y el eje x desde $x = -1$ a $x = 3$ viene dada por

$$\begin{aligned}A &= \text{área de } \Omega_1 + \text{área de } \Omega_2 + \text{área de } \Omega_3 \\ &= \int_{-1}^{0}(x^2-2x)\,dx + \int_{0}^{2}(2x-x^2)\,dx + \int_{2}^{3}(x^2-2x)\,dx \\ &= \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} + \left[x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2} + \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{2}^{3} = \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3} = 4.\end{aligned}$$

Ejemplo 8 Usar integrales para representar el área de la región sombreada de la figura 5.4.13.



Solución

$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]\, dx$$
$$+ \int_c^d [f(x) - g(x)]\, dx + \int_d^e [h(x) - g(x)]\, dx.$$

Observación Los ejemplos de esta sección también muestran la importancia de disponer de una buena figura que ilustre el problema que se está tratando. Un dibujo apropiado es muchas veces la clave para resolver un problema.

Ejercicios sugeridos, Sección 5.4

Prácticos: 5, 8, 14, 18
24, 26, 27, 28
30, 33, 34, 35