Integración   5

Sección 5.5

Integral definida de una función continua

Una y Varias Variables 4ª Ed.

Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

5.5 INTEGRALES INDEFINIDAS

Consideremos una función continua f. Si F es una antiderivada de f en $[a, b]$, se verifica que

(1) $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b.}$$

Si C es una constante, entonces

$$\Big[F(x) + C\Big]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = \boxed{F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.}$$

Luego podemos sustituir (1) por $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) + C\Big]_a^b.$

Si no tenemos un interés especial en el intervalo $[a, b]$ y sólo queremos resaltar el hecho de que F es una antiderivada de f para *algún* intervalo, entonces omitiremos a y b y simplemente escribiremos

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C.}$$

Cuando se expresan de este modo, las antiderivadas se llaman *integrales indefinidas*. La constante C se denomina *constante de integración*; es una constante *arbitraria* porque se le puede asignar cualquier valor real.

La integral indefinida de una función f es realmente una *familia* de funciones; un miembro específico de la familia se determina asignando un valor particular a la constante de integración. Esta familia tiene la propiedad de que cada uno de sus miembros es una antiderivada de f y, recíprocamente, cada antiderivada de f es un miembro de la familia. Este último hecho se deduce del teorema 4.2.4.

Así, por ejemplo, $$\int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + C \quad \text{y} \quad \int \sqrt{s}\,ds = \tfrac{2}{3}s^{3/2} + C.$$

Las gráficas de algunos miembros específicos de estas familias se representan en las figuras 5.5.1 y 5.5.2, respectivamente.

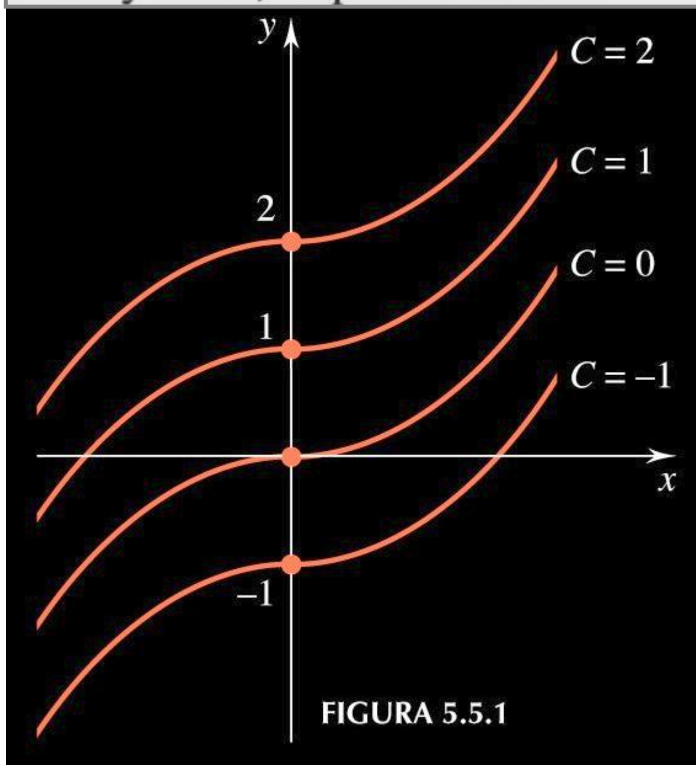


FIGURA 5.5.1

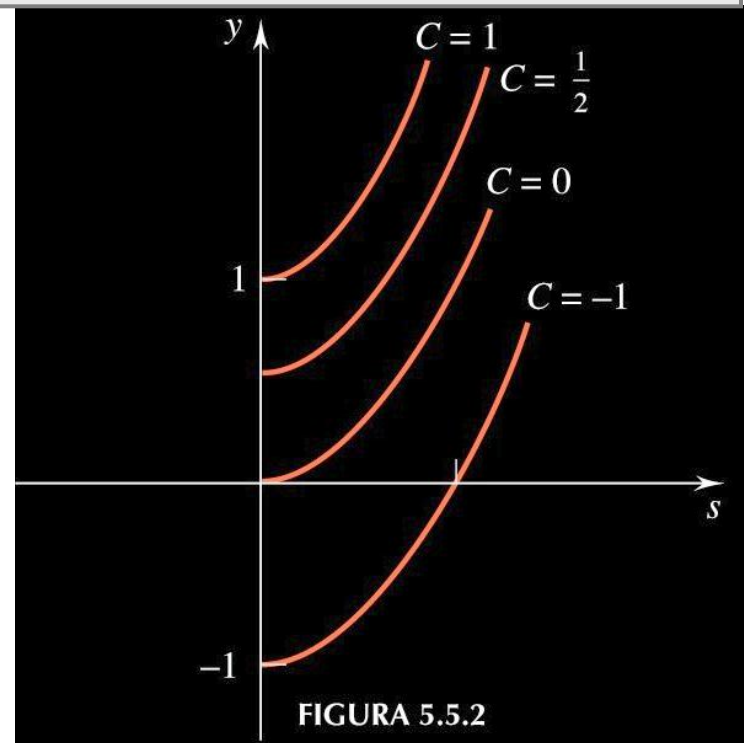


FIGURA 5.5.2

La tabla de antiderivadas (5.3.3) se puede volver a construir en base a integrales indefinidas:

TABLA 5.5.1 TABLA DE INTEGRALES INDEFINIDAS

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \text{ racional, } r \neq -1)$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C \qquad \int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

Las propiedades de linealidad (5.3.4), (5.3.5) y (5.3.6) de las integrales definidas son también válidas para las integrales indefinidas.

(5.5.2) $$\boxed{\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \qquad \alpha \text{ constante},}$$

(5.5.3) $$\boxed{\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

y, en general,

(5.5.4) $$\boxed{\begin{gathered}\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx, \\ \text{donde } \alpha \text{ y } \beta \text{ son constantes.}\end{gathered}}$$

Ejemplo 1 Calcular

$$\int [5x^{3/2} - 2 \operatorname{cosec}^2 x]\, dx.$$

Solución

$$\begin{aligned}\int [5x^{3/2} - 2 \operatorname{cosec}^2 x]\, dx &= 5\int x^{3/2}\, dx - 2\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx \\ &= 5(\tfrac{2}{5})x^{5/2} + C_1 - 2(-\cot x) + C_2 \\ &= 2x^{5/2} + 2\cot x + C,\end{aligned}$$

donde $C = C_1 + C_2$. (De manera automática combinaremos las constantes de integración de esta forma.)

Ejemplo 2 Hallar f suponiendo que

$$f'(x) = x^3 + 2 \quad \text{y} \quad f(0) = 1.$$

Solución Dado que f' es la derivada de f, f es una antiderivada de f'. Luego

$$f(x) = \int (x^3 + 2)\,dx = \tfrac{1}{4}(x^4) + 2x + C,$$

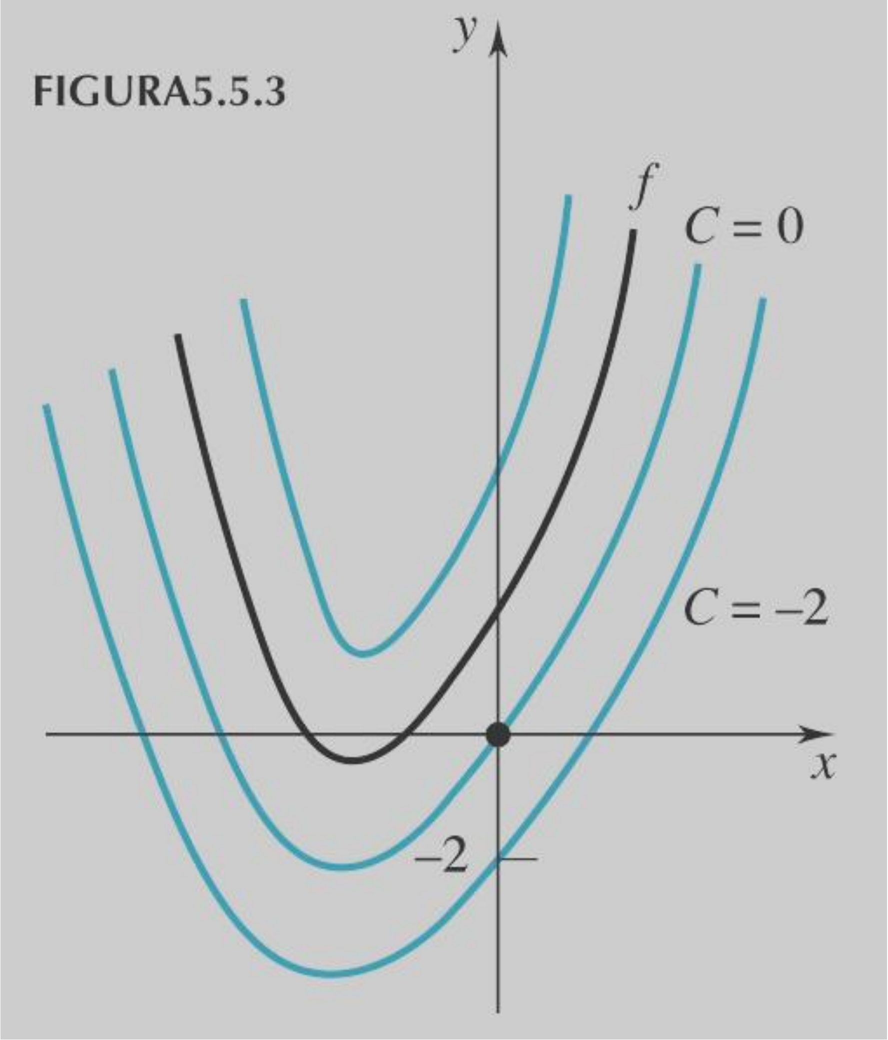
para cualquier valor de la constante C. Para estimar C utilizaremos el hecho de que $f(0) = 1$. Dado que

$$f(0) = 1 \quad \text{y} \quad f(0) = \tfrac{1}{4}(0)^4 + 2(0) + C = C,$$

obtenemos que $C = 1$. Luego

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + 2x + 1.$$

En la figura 5.5.3 se muestran algunos miembros de la familia de curvas $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$. La gráfica de *f* está destacada.



Ejemplo 3 Hallar f suponiendo que

$$f''(x) = 6x - 2, \quad f'(1) = -5 \quad \text{y} \quad f(1) = 3.$$

Solución Primero obtenemos f' integrando f'':

$$f'(x) = \int (6x-2)\,dx = 3x^2 - 2x + C.$$

Puesto que

$$f'(1) = -5 \quad \text{y} \quad f'(1) = 3(1)^2 - 2(1) + C = 1 + C,$$

tendremos

$$-5 = 1 + C, \quad \text{luego} \quad C = -6.$$

Por consiguiente,

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 6.$$

Ahora obtenemos f integrando f':

$$f(x) = \int (3x^2 - 2x - 6)\,dx = x^3 - x^2 - 6x + K.$$

(Estamos utilizando la letra K para representar la constante de integración ya que hemos utilizado C antes y queremos evitar la confusión que resultaría de asignar a C dos valores distintos en un mismo problema.) Puesto que

$$f(1) = 3 \qquad \text{y} \qquad f(1) = (1)^3 - (1)^2 - 6(1) + K = -6 + K,$$

tenemos

$$3 = -6 + K, \quad \text{luego} \quad K = 9$$

y, por consiguiente,

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 9.$$

Algunos problemas de movimiento

Ejemplo 4 Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con una velocidad de

$$v(t) = 2 - 3t + t^2 \quad \text{unidades por segundo.}$$

Su posición inicial (su posición en el instante $t = 0$) es de 2 unidades a la derecha del origen. Hallar la posición del objeto 4 segundos más tarde.

Solución Sea $x(t)$ la posición (la coordenada) del objeto en el instante t. Sabemos que $x(0) = 2$. Dado que $x'(t) = v(t)$, tenemos que

$$x(t) = \int v(t)\, dt = \int (2 - 3t + t^2)dt = 2t - \tfrac{3}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 + C.$$

Dado que $x(0) = 2$ y $x(0) = 2(0) - \frac{3}{2}(0)^2 + \frac{1}{3}(0)^3 + C = C$, tenemos que $C = 2$ y

$$x(t) = 2t - \tfrac{3}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 + 2.$$

La posición del objeto en el instante $t = 4$ es el valor de esta función para $t = 4$:

$$x(4) = 2(4) - \tfrac{3}{2}(4)^2 + \tfrac{1}{3}(4)^3 + 2 = 7\tfrac{1}{3}.$$

Pasados 4 segundos, el objeto se halla a $7\frac{1}{3}$ unidades a la derecha del origen.

En la figura 5.5.4 se representa esquemáticamente el movimiento del objeto.

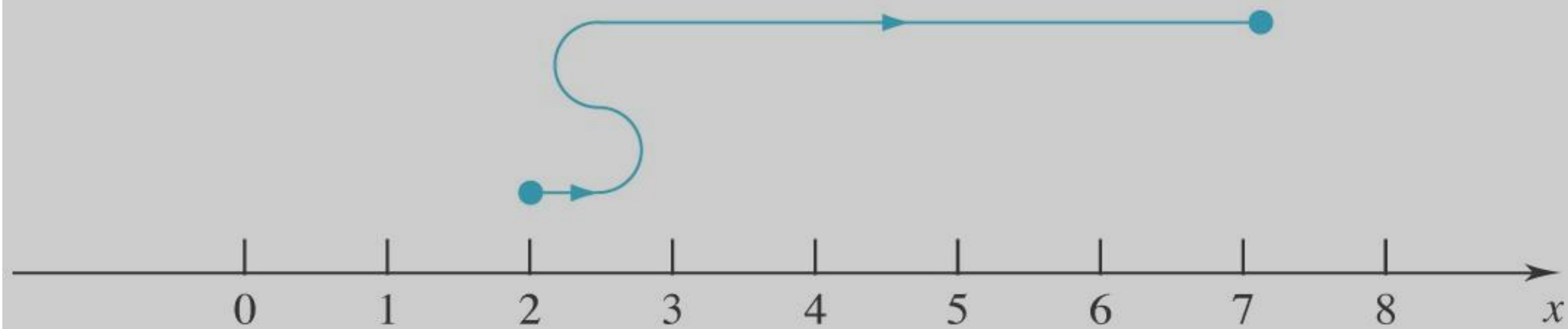


FIGURA 5.5.4

Recordemos que hemos llamado celeridad al valor absoluto de la velocidad:

$$\text{celeridad en el instante } t = |v(t)|$$

y que la integral de la función celeridad proporciona la distancia recorrida (véase el proyecto 5.1):

(5.5.5) $$\boxed{\int_a^b |v(t)|\ dt = \text{distancia recorrida entre los instantes } t = a \text{ y } t = b.}$$

Ejemplo 5 Un objeto se mueve a lo largo del eje x con aceleración $a(t) = 2t - 2$ unidades por segundo por segundo. Su posición inicial (su posición en el instante $t = 0$) es de 5 unidades a la derecha del origen. Un segundo más tarde, el objeto se está moviendo hacia la izquierda a una velocidad de 4 unidades por segundo.

(a) Hallar la posición del objeto en el instante $t = 4$ segundos.
(b) Hallar la distancia total recorrida por el objeto durante esos 4 primeros segundos.

Solución (a) Sean $x(t)$ y $v(t)$, respectivamente, la posición y la velocidad del objeto en el instante t. Sabemos que $x(0) = 5$ y que $v(1) = -4$. Dado que $v'(t) = a(t)$, tenemos que

$$v(t) = \int a(t)\, dt = \int (2t - 2) dt = t^2 - 2t + C.$$

Puesto que

$$v(1) = -4 \quad \text{y} \quad v(1) = (1)^2 - 2(1) + C = -1 + C,$$

tenemos que $C = -3$ y

$$v(t) = t^2 - 2t - 3.$$

Dado que $x'(t) = v(t)$, tenemos que $x(t) = \int v(t)\, dt = \int (t^2 - 2t - 3) dt = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t + K.$

Dado que $x(0) = 5$ y $x(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 3(0) + K = K,$

tenemos que $K = 5$. De ahí que

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t + 5.$$

Como se podrá comprobar, $x(4) = -\frac{5}{3}$. En el instante $t = 4$, el objeto está a $\frac{5}{3}$ unidades a la izquierda del origen.

(**b**) La distancia total recorrida desde el instante $t = 0$ hasta el instante $t = 4$ viene dada por la integral

$$s = \int_0^4 |v(t)|\ dt = \int_0^4 |t^2 - 2t - 3|\ dt.$$

Para calcular esta integral, primero eliminamos el signo del valor absoluto. Se podrá comprobar que

$$|t^2 - 2t - 3| = \begin{cases} -(t^2 - 2t - 3), & 0 \le t \le 3 \\ t^2 - 2t - 3, & 3 \le t \le 4. \end{cases}$$

Luego,

$$s = \int_0^3 (3 + 2t - t^2)dt + \int_3^4 (t^2 - 2t - 3)\ dt$$

$$= \left[3t + t^2 - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^3 + \left[\tfrac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t\right]_3^4 = \tfrac{34}{3}.$$

En los 4 primeros segundos, el objeto ha recorrido una distancia de $\frac{34}{3}$ unidades.

Pregunta El objeto del ejemplo 5 sale de $x = 5$ en el instante $t = 0$ y llega a $x = -\frac{5}{3}$ en el instante $t = 4$. La distancia entre $x = 5$ y $x = -\frac{5}{3}$ sólo es $\left|5 - (-\frac{5}{3})\right| = \frac{20}{3}$. ¿Cómo es posible que el objeto haya recorrido una distancia de $\frac{34}{3}$ unidades?

Respuesta El objeto no se mueve en una dirección constante. Cambia de dirección en el instante $t = 3$. Esto se puede comprobar observando que la función velocidad

$$v(t) = t^2 - 2t - 3 = (t - 3)(t + 1)$$

cambia de signo en $t = 3$.

FIGURA 5.5.5

Ejemplo 6 Hallar la ecuación del movimiento de un objeto que se mueve a lo largo de una recta con una aceleración constante a desde una posición inicial x_0 y con una velocidad inicial v_0.

Solución Consideremos la recta del movimiento como el eje x. Sabemos que $a(t) = a$ para todo t. Para hallar la velocidad, integramos la aceleración:

$$v(t) = \int a \, dt = at + C.$$

La constante C es la velocidad inicial v_0: $\quad v_0 = v(0) = a \cdot 0 + C = C.$

Vemos, por consiguiente, que $\quad v(t) = at + v_0.$

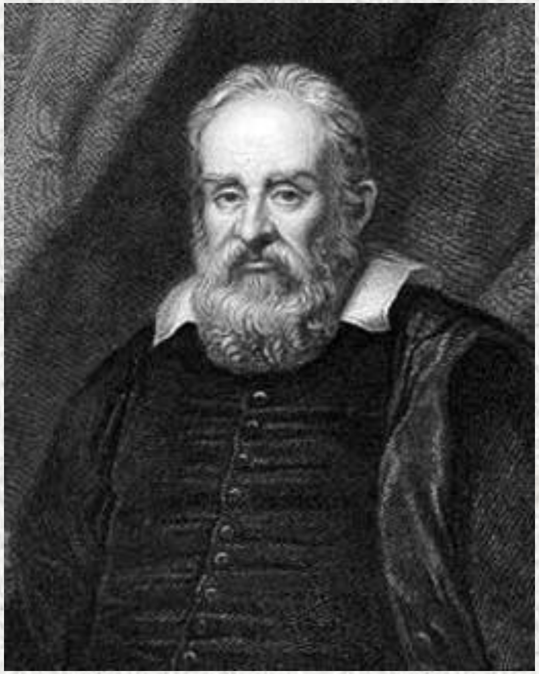
Para hallar la función coordenada, basta integrar la velocidad:

$$x(t) = \int v(t) \, dt = \int (at + v_0) \, dt = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + K.$$

La constante K es la posición inicial x_0: $\quad x_0 = x(0) = \tfrac{1}{2}a \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + K = K.$

La ecuación del movimiento es: $\quad \boxed{x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0.}^{\dagger} \qquad$ **(5.5.6)**

† En el caso de un cuerpo en caída libre, $a = -g$ y tenemos la ecuación de Galileo para la caída libre. Ver (3.4.5)



Galileo Galilei (1564 – 1642) ~ 77 años.
Matemático italiano, en 1589 a los 25 años fué
Director de Matemáticas en la *Universidad de Pisa*.

Ejercicios sugeridos, Sección 5.5

Prácticos: 8, 11, 12, 16
22, 24, 27, 31

Teóricos: 33, 34, 41, 49