Integración 5

Sección 5.6

Cambio de variable

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

5.6 CAMBIO DE VARIABLE

Para diferenciar una aplicación compuesta, aplicamos la regla de la cadena. Al tratar de calcular una integral indefinida, a menudo tenemos que aplicar la regla de la cadena en sentido inverso. Habitualmente, este proceso se ve facilitado haciendo un "cambio de variable".

Una integral de la forma $\boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx}$ se puede escribir $\boxed{\int f(u)\,du}$ haciendo

$$\underline{u = g(x)}, \qquad \underline{du = g'(x)\,dx}.^{\dagger}$$

Si F es una antiderivada de f, se verifica que

$$[F(g(x))]' \underset{\text{por la regla de la cadena}}{=} F'(g(x))g'(x) \underset{F'=f}{=} f(g(x))g'(x)$$

y, por tanto, $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int [F(g(x))]'\,dx = F(g(x)) + C.$

Podemos obtener el mismo resultado calculando $\int f(u)\,du$ y, luego,

sustituyendo de nuevo u por $g(x)$: $\boxed{\int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C.}$

† Considerar $du = g'(x)\,dx$ como una "diferencial formal", escribiendo dx en lugar de h. Véase la sección 3.9.

Ejemplo 1 Calcular

$$\int (x^2 - 1)^4\, 2x\, dx$$

y comprobar el resultado por diferenciación.

Solución Sea

$$u = x^2 - 1, \quad \text{luego} \quad du = 2x\, dx.$$

Entonces

$$\int (x^2 - 1)^4\, 2x\, dx = \int u^4\, du = \tfrac{1}{5}u^5 + C = \tfrac{1}{5}(x^2 - 1)^5 + C.$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{5}(x^2 - 1)^5 + C\right] = \tfrac{5}{5}(x^2 - 1)^4 \frac{d}{dx}(x^2 - 1) \overset{\checkmark}{=} (x^2 - 1)^4\, 2x.$$

Ejemplo 2 Calcular

$$\int 3x^2 \cos (x^3 + 2)\, dx$$

y luego comprobar el resultado por diferenciación.

Solución Hacemos

$$u = x^3 + 2, \quad \text{de manera que } du = 3x^2\, dx.$$

Luego

$$\int 3x^2 \cos (x^3 + 2)\, dx = \int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C = \operatorname{sen} (x^3 + 2) + C.$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} (x^3 + 2) + C] = \cos (x^3 + 2) \frac{d}{dx}(x^3 + 2) \overset{\checkmark}{=} 3x^2 \cos (x^3 + 2).$$

Ejemplo 3 Calcular

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx.$$

y luego comprobar el resultado por diferenciación.

Solución Hacemos

$$u = \operatorname{sen} x, \qquad du = \cos x \, dx.$$

Luego

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx. = \int u \, du = \tfrac{1}{2}u^2 + C = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C.$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}[\tfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C] = \tfrac{1}{2}(2) \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] \overset{\checkmark}{=} \operatorname{sen} x \cos x \, .$$

Solución alternativa Dado que $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$,

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx. = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x \, dx.$$

Hacer

$$u = 2x, \qquad du = 2\,dx \qquad \text{o bien} \qquad dx = \tfrac{1}{2}\,du.$$

Luego

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} u(\tfrac{1}{2}du) = \tfrac{1}{4}\int \operatorname{sen} u\,du = -\tfrac{1}{4}\cos u + C \\ &= -\tfrac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

Dejamos que el lector compruebe este resultado y lo concilie con el de la primera solución.

$$\boxed{-\frac{1}{4}\cos 2x + C = -\frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 x) + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\sin^2 x + K}$$

Ejemplo 4 Calcular $\int \frac{dx}{(3+5x)^2}$ y comprobar el resultado por diferenciación.

Solución Sea

$$u = 3 + 5x, \quad \text{luego} \quad du = 5\,dx.$$

Entonces

$$\frac{dx}{(3+5x)^2} = \frac{\frac{1}{5}du}{u^2} = \frac{1}{5}\,\frac{du}{u^2} \qquad \text{y}$$

$$\int \frac{dx}{(3+5x)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5u} + C^{\dagger} = -\frac{1}{5(3+5x)} + C.$$

Comprobación $$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{5(3+5x)} + C\right] = \frac{d}{dx}\left[-\tfrac{1}{5}(3+5x)^{-1}\right]$$

$$= (-\tfrac{1}{5})(-1)(3+5x)^{-2}(5) \overset{\checkmark}{=} \frac{1}{(3+5x)^2}.$$

† Se puede escribir

$$\frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u} + C\right] = -\frac{1}{5u} + \frac{C}{5},$$ pero, dado que C es arbitrario, $C/5$ también lo es y podemos seguir escribiendo C en su lugar.

En los siguientes problemas dejamos la comprobación al lector

Ejemplo 5 Calcular $\int x^2\sqrt{4+x^3}\,dx$.

Solución Sea $u = 4+x^3, \quad du = 3x^2\,dx$. Entonces

$$x^2\sqrt{4+x^3}\,dx = \underbrace{(4+x^3)^{1/2}}_{u^{1/2}}\underbrace{x^2\,dx}_{\frac{1}{3}du} = \tfrac{1}{3}u^{1/2}\,du \qquad \text{y}$$

$$\int x^2\sqrt{4+x^3}\,dx = \tfrac{1}{3}\int u^{1/2}\,du$$

$$= \tfrac{2}{9}u^{3/2}+C = \tfrac{2}{9}(4+x^3)^{3/2}+C.$$

Como se sugiere en los ejemplos anteriores, el paso clave en el cambio de variable consiste en hallar una sustitución $u = g(x)$ tal que la expresión $du = g'(x)\,dx$ aparezca en la integral original (eventualmente multiplicada por una constante) y que la nueva integral

$$\boxed{\int f(u)\, du}$$

sea más fácil de calcular que la integral original. En la mayor parte de los casos, el integrando original sugerirá una buena elección de u. La siguiente tabla es análoga a la tabla 5.5.1. Se basa en la regla de la cadena e indica la transformación de la integral original en la forma $\int f(u)\, du$ de 5.5.1.

TABLA 5.6.1

Integral original	$u = g(x)$ $du = g'(x)\,dx$	Nueva integral
$\int [g(x)]^r g'(x)\,dx$	$\rightarrow$	$\int u^r\,du = \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C = \dfrac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$
$\int \text{sen}\,[g(x)]\,g'(x)\,dx$	$\rightarrow$	$\int \text{sen}\,u\,du = -\cos u + C = -\cos\,[g(x)] + C$
$\int \cos\,[g(x)]\,g'(x)\,dx$	$\rightarrow$	$\int \cos u\,du = \text{sen}\,u + C = \text{sen}\,[g(x)] + C$
$\int \sec^2[g(x)]\,g'(x)\,dx$	$\rightarrow$	$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C = \tan\,[g(x)] + C$
$\int \sec\,[g(x)]\,\tan\,[g(x)]\,g'(x)\,dx$	$\rightarrow$	$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C = \sec\,[g(x)] + C$
$\int \text{cosec}^2[g(x)]\,g'(x)\,dx$	$\rightarrow$	$\int \text{cosec}^2 u\,du = -\cot u + C = -\cot\,[g(x)] + C$
$\int \text{cosec}\,[g(x)]\,\cot\,[g(x)]\,g'(x)\,dx$	$\rightarrow$	$\int \text{cosec}\,u \cot u\,du = -\text{cosec}\,u + C = -\text{cosec}\,[g(x)] + C$

Continuamos con algunos ejemplos más que ilustran el método de sustitución.

Ejemplo 6 Hallar $\int 2x^3 \sec^2(x^4+1)\ dx$.

Solución Hacemos $u = x^4 + 1$, $du = 4x^3\ dx$. Luego,

$$2x^3 \sec^2(x^4+1)\ dx = 2\underbrace{\sec^2(x^4+1)}_{\sec^2 u}\ \underbrace{x^3\ dx}_{\frac{1}{4}du} = \tfrac{1}{2}\sec^2 u\ du \quad \text{y}$$

$$\int 2x^3 \sec^2(x^4+1)\ dx = \tfrac{1}{2}\int \sec^2 u\ du = \tfrac{1}{2}\tan(x^4+1) + C.$$

Ejemplo 7 Hallar $\int \sec^3 x \tan x \, dx$.

Solución Podemos escribir el integrando como $\sec^2 x \sec x \tan x \, dx$. Entonces, haciendo

$$u = \sec x, \qquad du = \sec x \tan x \, dx$$

tenemos

$$\sec^3 x \tan x \, dx = \underbrace{\sec^2 x}_{u^2} \underbrace{(\sec x \tan x) \, dx}_{du} = u^2 \, du$$

y $$\int \sec^3 x \tan x \, dx = \int u^2 \, du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sec^3 x + C.$$

Ejemplo 8 Calcular la integral definida $\int_0^2 (x^2-1)(x^3-3x+2)^3\,dx$.

Solución Para calcular esta integral definida necesitamos hallar una antiderivada para el integrando. La integral indefinida

$$\int (x^2-1)(x^3-3x+2)^3\,dx.$$

da el conjunto de todas las antiderivadas y por tanto la calcularemos primero. Hacemos

$$u = x^3-3x+2, \qquad du = 3x^2-3\,dx = 3(x^2-1)\,dx.$$

Luego $\quad (x^2-1)(x^3-3x+2)^3\,dx = \underbrace{(x^3-3x+2)^3}_{u^3}\,\underbrace{(x^2-1)\,dx}_{\frac{1}{3}du} = \frac{1}{3}u^3\,du \quad$ y

$$\int (x^2-1)(x^3-3x+2)^3\,dx = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{1}{12}u^4 + C = \frac{1}{12}(x^3-3x+2)^4 + C.$$

Para calcular la integral definida dada sólo necesitamos una antiderivada, y por tanto elegiremos aquella con $C = 0$. Esto da

$$\int_0^2 (x^2-1)(x^3-3x+2)^3\, dx = \left[\tfrac{1}{12}(x^3-3x+2)^4\right]_0^2 = 20.$$

Más adelante, en esta sección, daremos un método más formal de calcular una integral definida cuando en el paso de integración está implicada una sustitución.

Observación Hasta ahora, todas las integrales que hemos calculado utilizando sustitución u pueden calcularse sin sustitución. Todo lo que se necesita es tener buen olfato para utilizar la regla de la cadena. Por ejemplo:

$\int (x^2-1)^4 2x\, dx$ (ejemplo 1). La derivada de x^2-1 es $2x$. Por tanto,

$$\int (x^2-1)^4 2x\, dx = \int (x^2-1)^4 \frac{d}{dx}(\,(x^2-1))\, dx = \tfrac{1}{5}(x^2-1)^5 + C.$$

$\int 3x^2 \cos(x^3+2)\, dx$ (ejemplo 2). La derivada de x^3+2 es $3x^2$. Así,

$$\int 3x^2 \cos(x^3+2)\, dx = \int \cos(x^3+2)\, \frac{d}{dx}((x^3+2))\, dx = \operatorname{sen}(x^3+2) + C.$$

$\int x^2\sqrt{4+x^3}\, dx$ (ejemplo 5). La derivada de $4+x^3$ es $3x^2$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(4+x^3) = 3x^2 \qquad \text{y} \qquad x^2 = \tfrac{1}{3}\frac{d}{dx}(\,(4+x^3).)$$

Luego,

$$\int x^2\sqrt{4+x^3}\, dx = \tfrac{1}{3}\int (4+x^3)^{1/2}\, \frac{d}{dx}(\,(4+x^3))\, dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}(4+x^3)^{3/2} + C = \tfrac{2}{9}(4+x^3)^{3/2} + C.$$

$\int \sec^3 x \tan x \, dx$ (ejemplo 7). Escribir el integrando como

$$\sec^2 x \, (\sec x \tan x) = \sec^2 x \, \frac{d}{dx} (\sec x).$$

Luego,

$$\int \sec^3 x \tan x \, dx = \int \sec^2 x \, \frac{d}{dx} (\sec x) \, dx = \tfrac{1}{3} \sec^3 x + C.$$

Calcular integrales por sustitución no tiene nada de malo. Lo único que queremos decir es que, con un poco de experiencia, el lector debería ser capaz de calcular muchas integrales sin utilizarla formalmente.

Sustitución e integrales definidas

En el ejemplo 8 calculamos una integral definida calculando primero la correspondiente integral indefinida. Luego elegimos una de las antiderivadas para el paso de cálculo. Aquí presentamos un método alternativo en el cual los límites de integración varían conjuntamente con la variable. Este método utiliza la *fórmula del cambio de variable*:

(5.6.2)
$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.}$$

La fórmula funciona suponiendo que f y g' son ambas continuas. Concretamente, g' debe ser continua en $[a, b]$ y f debe ser continua en el conjunto de valores que toma g.

Demostración Sea F una antiderivada de f. Entonces $F' = f$ y

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_a^b F'(g(x))g'(x)\,dx$$
$$= \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Volvamos a hacer el ejemplo 8 utilizando la fórmula del cambio de variable.

Ejemplo 9 Calcular $\int_0^2 (x^2-1)(x^3-3x+2)^3\, dx$

Solución Como antes, hacemos

$$\underline{u = x^3 - 3x + 2}, \qquad du = 3(x^2-1)\, dx.$$

Luego

$$(x^2-1)(x^3-3x+2)^3\, dx = \tfrac{1}{3}u^3\, du.$$

Entonces, $\underline{\text{en } x = 0,\ u = 2. \text{ En } x = 2,\ u = 4}$. Por tanto,

$$\int_0^2 (x^2-1)(x^3-3x+2)^3\, dx = \tfrac{1}{3}\int_2^4 u^3\, du$$

$$= \left[\tfrac{1}{12}u^4\right]_2^4 = \tfrac{1}{12}(4)^4 - \tfrac{1}{12}(2)^4 = 20.$$

Ejemplo 10 Calcular

$$\int_0^{1/2} \cos^3 \pi x \operatorname{sen} \pi x \, dx.$$

Solución Hacemos

$$u = \cos \pi x, \qquad du = -\pi \operatorname{sen} \pi x \, dx.$$

Luego

$$\cos^3 \pi x \operatorname{sen} \pi x \, dx = \underbrace{\cos^3 \pi x}_{u^3} \underbrace{\operatorname{sen} \pi x \, dx}_{-\frac{1}{\pi} du} = -\tfrac{1}{\pi} u^3 \, du.$$

En $x = 0, u = 1$. En $x = 1/2, u = 0$. Por tanto,

$$\int_0^{1/2} \cos^3 \pi x \operatorname{sen} \pi x \, dx = -\tfrac{1}{\pi}\int_1^0 u^3 \, du = \tfrac{1}{\pi}\int_0^1 u^3 \, du = \tfrac{1}{\pi}\left[\tfrac{1}{4}u^4\right]_0^1 = \frac{1}{4\pi}.$$

Hasta aquí nos hemos centrado en las sustituciones asociadas a la regla de la cadena. Sin embargo, como ilustraremos aquí y más tarde en el capítulo 8, la "sustitución" es un método muy general de integración. La elección de la sustitución adecuada es cuestión de práctica y experiencia. En esta primera etapa proporcionaremos sugerencias y una guía.

Ejemplo 11 Calcular $\int x(x-3)^5\,dx$.

Solución Hacemos $\boxed{u = x-3.}$ Luego $du = dx$ y $\boxed{x = u+3.}$

Entonces $x(x-3)^5\,dx = (u+3)u^5\,du = (u^6+3u^5)du$ y

$$\int x(x-3)^5\,dx = \int (u^6+3u^5)du$$
$$= \tfrac{1}{7}u^7 + \tfrac{1}{2}u^6 + C = \tfrac{1}{7}(x-3)^7 + \tfrac{1}{2}(x-3)^6 + C.$$

Ejemplo 12 Calcular $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1}\ dx$.

Solución Hacemos $\boxed{u = x^2+1.}$ Luego

$du = 2x\ dx$ y $\boxed{x^2 = u-1.}$ Entonces

$$x^5\sqrt{x^2+1}\ dx = \underbrace{x^4}_{(u-1)^2}\ \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\sqrt{u}}\ \underbrace{x\ dx}_{\frac{1}{2}du} = \tfrac{1}{2}(u-1)^2\sqrt{u}\ du.$$

En $x=0$, $u=1$. En $x=\sqrt{3}$, $u=4$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1}\ dx &= \tfrac{1}{2}\int_1^4 (u-1)^2\sqrt{u}\ du\\
&= \tfrac{1}{2}\int_1^4 (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})\ du\\
&= \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{2}{7}u^{7/2}-\tfrac{4}{5}u^{5/2}+\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^4\\
&= \Big[u^{3/2}\big(\tfrac{1}{7}u^2-\tfrac{2}{5}u+\tfrac{1}{3}\big)\Big]_1^4 = \tfrac{848}{105}.
\end{aligned}$$

Ejercicios sugeridos, Sección 5.6

Prácticos: 4, 6, 10, 20
23, 26, 30, 36
38, 44, 50, 61

Teóricos: 64, 76, 78