

Integración 5

Sección 5.7

Otras propiedades de la integral definida

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4^a Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

5.7 OTRAS PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

En esta sección consideramos algunas propiedades generales importantes de la integral definida. La mayoría de las demostraciones se dejan para el lector. Supondremos, a lo largo de esta sección, que las funciones involucradas son continuas y que $a < b$.

I. La integral de una función no negativa es no negativa:

$$(5.7.1) \quad \text{si } f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in [a, b], \quad \text{entonces } \int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

La integral de una función positiva es positiva:

$$(5.7.2) \quad \text{si } f(x) > 0 \text{ para todo } x \in [a, b], \quad \text{entonces } \int_a^b f(x) \, dx > 0.$$

La siguiente propiedad es una consecuencia inmediata de la propiedad I y de la linealidad (5.3.6).

II. La integral conserva el orden:

(5.7.3) si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$

y

(5.7.4) si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) \, dx < \int_a^b g(x) \, dx$.

Demostración de (5.7.3) Dado que $f(x) \leq g(x)$, se deduce que $g(x) - f(x) \geq 0$. Por tanto, utilizando la linealidad de la integral y (5.7.1), tenemos

$$\int_a^b g(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx \geq 0$$

y por tanto,

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

La demostración de (5.7.4) se realiza exactamente de la misma forma.

III. De la misma manera que el valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos,

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

el valor absoluto de una integral es menor o igual que la integral del valor absoluto:

(5.7.5)

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Demostración de (5.7.5) Dado que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, se deduce que

$$-\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

por (5.7.3). Este par de desigualdades es equivalente a (5.7.5).

IV. Si m es el valor mínimo de f en $[a, b]$ y M es el valor máximo, se verifica que

(5.7.6)

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a).$$

Supóngase que f y g son continuas, que $a < b$ y que

$$\int_a^b f(x) \, dx > \int_a^b g(x) \, dx.$$

Responder razonadamente a las siguientes preguntas.

1. ¿Se deduce necesariamente que $\int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx > 0$?
2. ¿Se deduce necesariamente que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a, b]$?

1. – Sí, por linealidad: $\int_a^b f - \int_a^b g > 0 \Rightarrow \int_a^b (f - g) > 0$

2. – No, contraejemplo: $f(x) = x$, $g(x) = 0$, $x \in [-1/2, 1]$

$$\int_{-1/2}^1 (f - g) = \int_{-1/2}^1 (x - 0) dx = \int_{-1/2}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1/2}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} > 0$$

sin embargo, p. ej., $f(-0.5) = -0.5 < 0 = g(-0.5)$

6. ¿Se deduce necesariamente que $\int_a^b |f(x)| \, dx > \int_a^b g(x) \, dx$?

Sí, por transitividad:

$$\int_a^b |f| > \int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_a^b f > \int_a^b g \quad (\text{hip}) \Rightarrow \int_a^b |f| > \int_a^b g$$

Supóngase que f es continua, que $a < b$ y que

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0.$$

Responder razonadamente a las siguientes preguntas.

9. ¿Se deduce necesariamente que $\int_a^b |f(x)| \, dx = 0$?

No, ya que: $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$ equiv. $\int_a^b |f| \geq \left| \int_a^b f \right| = 0$

$\Rightarrow \int_a^b |f| \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f| > 0$ o $\int_a^b |f| = 0$. Contraejemplo,

$$\int_{-1}^1 x \, dx = 0 \text{ (imp.) pero } \int_{-1}^1 |x| \, dx = 2 \int_0^1 x \, dx = 1 > 0$$

15. ¿Se deduce necesariamente que $\int_a^b [f(x) + 1] dx = b - a$?

Sí, ya que: $\int_a^b f + \int_a^b dx = 0 + b - a = b - a$

Recordar el teorema (5.2.5), que enuncia que $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t) dt\right) = f(x)$.

La siguiente propiedad es una generalización de este teorema. En los ejercicios 17 a 30 de la sección 5.2 se dieron algunos ejemplos específicos de este resultado. Su importancia se hará evidente en el capítulo 7.

V. Si u es una función diferenciable de x y f es continua, entonces

(5.7.7)

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^u f(t) dt\right) = f(u) \frac{du}{dx}.$$

Demostración La función $F(u) = \int_a^u f(t) dt$

es diferenciable como función de u y $\frac{d}{du}[F(u)] = f(u)$. (teorema 5.2.5)

Luego

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^u f(t) dt\right) = \frac{d}{dx}[F(u)] = \frac{d}{du}[F(u)] \frac{du}{dx} = f(u) \frac{du}{dx}.$$

regla de la cadena

Ejemplo 1 Hallar

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^3} \frac{dt}{1+t} \right).$$

Solución En este momento podría resultarle difícil al lector llevar a cabo esta integración puesto que requiere la función logarítmica que no será introducida hasta el capítulo 7. Esto aquí no importa. Tenemos $f(t) = 1/(1+t)$ y $u(x) = x^3$. Por (5.7.7) sabemos que

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^3} \frac{dt}{1+t} \right) = f(u) \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^3} 3x^2 = \frac{3x^2}{1+x^3}$$

sin tener que efectuar la integración.

Ejemplo 2 Hallar $\frac{d}{dx}\left(\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2}\right)$.

Solución La idea para calcular esta integral consiste en expresarla en función de integrales cuyos límites inferiores de integración sean constantes. Una vez hecho esto podremos aplicar (5.7.7). En este caso elegimos 0 como límite inferior conveniente. Dada la aditividad de la integral:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{2x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Luego

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{2x} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

La diferenciación nos da que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^{2x} \frac{dt}{1+t^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right) \\ (5.7.7) \qquad &= \frac{1}{1+(2x)^2}(2) - \frac{1}{1+x^2}(1) = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

16. Sea u una función diferenciable de x y sea f continua. Deducir una fórmula para

$$\frac{d}{dx} \left(\int_u^b f(t) dt \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_u^b f(t) dt &= \frac{d}{du} \int_u^b f(t) dt \frac{du}{dx} \\ &= - \frac{d}{du} \int_b^u f(t) dt \frac{du}{dx} \\ &= - f(u) \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \int_u^b f(t) dt = - f(u) \frac{du}{dx}$$

$$18. \frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^2} \frac{dt}{t} \right).$$

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^2} \frac{dt}{t} \right) = \frac{d}{du} \left(\int_1^u \frac{dt}{t} \right) \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$21. \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^3 \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt \right).$$

$$\begin{aligned} u = x^2 \quad y \quad f(u) = \frac{\sin u}{u} &\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^3 \frac{\sin t}{t} dt \right) = -f(u) \frac{du}{dx} \\ &= -\frac{\sin u}{u} 2x = -\frac{2 \sin x^2}{x} \end{aligned}$$

24. Demostrar que si u y v son funciones diferenciables de x y si f es continua, entonces se verifica que

$$\frac{d}{dx} \left(\int_u^v f(t) dt \right) = f(v) \frac{dv}{dx} - f(u) \frac{du}{dx}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_u^v f &= \frac{d}{dx} \int_u^a f + \int_a^v f \quad (\text{aditividad}) \\ &= \frac{d}{dx} \int_a^v f - \int_a^u f = \frac{d}{dx} \int_a^v f - \frac{d}{dx} \int_a^u f \quad (\text{lin. deriv.}) \\ &= \frac{d}{dv} \int_a^v f \frac{dv}{dx} - \frac{d}{du} \int_a^u f \frac{du}{dx} \quad (\text{regla de la cadena}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_u^v f &= f(v) \frac{dv}{dx} - f(u) \frac{du}{dx} \quad (\text{eval. integrales}) \end{aligned}$$

Calcular las derivadas siguientes usando el ejercicio 24.

$$25. \frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} \right).$$

$$u = x, \quad v = x^2, \quad f(t) = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} f \right) &= f(v) \frac{dv}{dx} - f(u) \frac{du}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{x^2} 2x - \frac{1}{x} 1 = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$26. \frac{d}{dx} \left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} \frac{dt}{2 + \sqrt{t}} \right).$$

$$u = \sqrt{x}, \quad v = x^2 + x, \quad f(t) = \frac{1}{2 + \sqrt{t}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} f \right) &= f(v) \frac{dv}{dx} - f(u) \frac{du}{dx} = \frac{1}{2 + \sqrt{v}} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2 + \sqrt{u}} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{x^2 + x}} \frac{d(x^2 + x)}{dx} - \frac{1}{2 + \sqrt{\sqrt{x}}} \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \\ &= \frac{2x + 1}{2 + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(2 + \sqrt[4]{x})} \end{aligned}$$

$$28. \frac{d}{dx} \left(\int_{3x}^{1/x} \cos 2t \, dt \right).$$

$$u = 3x, \quad v = 1/x, \quad f(t) = \cos 2t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_{3x}^{1/x} f &= f(v) \frac{dv}{dx} - f(u) \frac{du}{dx} = \cos 2v \frac{dv}{dx} - \cos 2u \frac{du}{dx} \\ &= \cos \left(\frac{2}{x} \right) \frac{d(1/x)}{dx} - \cos 2(3x) \frac{d(3x)}{dx} \\ &= -\frac{1}{x^2} \cos \left(\frac{2}{x} \right) - 3 \cos(6x) \end{aligned}$$

34. Hallar $H'(3)$ si $H(x) = \frac{1}{x} \int_3^x [2t - 3H'(t)] dt$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{x} \int_3^x [2t - 3H'(t)] dt \right\} \\ &= \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_3^x [2t - 3H'(t)] dt + \int_3^x [\bullet] \frac{d(1/x)}{dx} \\ &= \frac{1}{x} [2x - 3H'(x)] + \int_3^x [\bullet] \frac{d(1/x)}{dx} \\ \Rightarrow H'(3) &= \frac{1}{3} [2(3) - 3H'(3)] + \int_3^3 [\bullet] \frac{d(1/x)}{dx} = \frac{1}{3} [6 - 3H'(3)] \\ \text{de donde, } 3H'(3) &= 6 - 3H'(3) \Rightarrow H'(3) = 1 \end{aligned}$$

VI. Diremos ahora algunas palabras sobre el papel de la simetría en la integración. Supongamos que f es una función continua definida en algún intervalo de la forma $[-a, a]$, un intervalo cerrado que es simétrico alrededor del origen.

(a) Si f es impar en $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

(5.7.8)

(b) Si f es par en $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

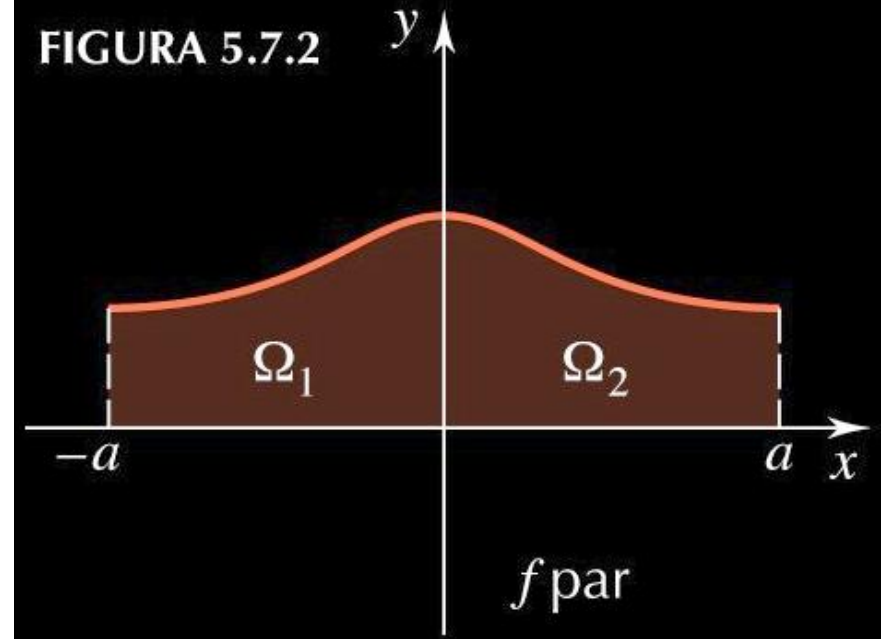
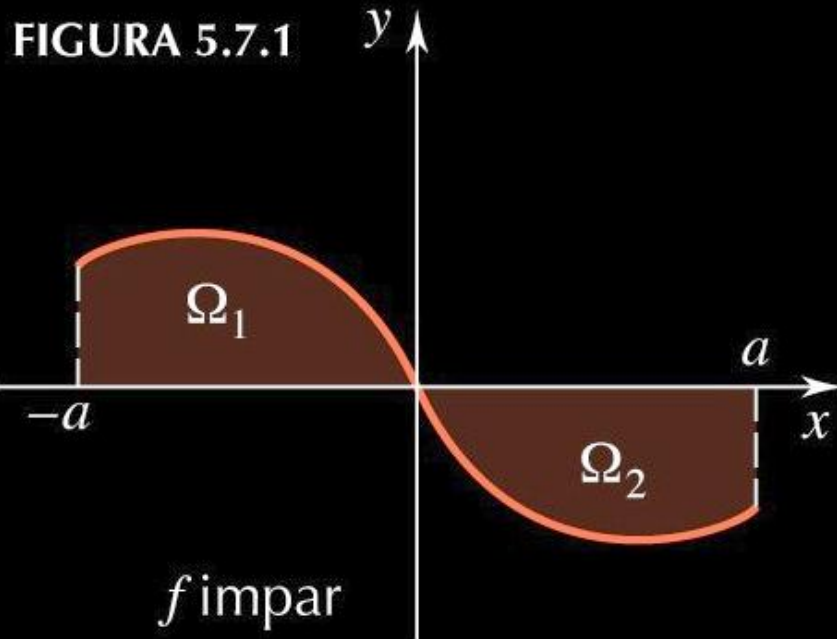
Estas afirmaciones pueden verificarse por un simple cambio de variable (ejercicio 48). Consideraremos aquí estas afirmaciones desde el punto de vista del área y nos referiremos a las figuras 5.7.1 y 5.7.2.

Para la función impar,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \text{área de } \Omega_1 - \text{área de } \Omega_2 = 0.$$

Para la función par,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \text{área de } \Omega_1 + \text{área de } \Omega_2 = 2(\text{área de } \Omega_2) = 2 \int_0^a f(x) dx.$$



Supongamos que se nos pide calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x - x \cos x)^3 dx.$$

Un cálculo laborioso debería mostrarnos que esta integral es cero. No necesitamos realizar este cálculo. El integrando es una función impar y por tanto podemos decir inmediatamente que la integral es cero.

$$\begin{aligned} f(-x) &= [\sin(-x) - (-x)\cos(-x)]^3 \\ &= [-\sin x + x \cos x]^3 = [-(\sin x - x \cos x)]^3 \\ &= (-1)^3 (\sin x - x \cos x)^3 = -(\sin x - x \cos x)^3 = -f(x) \end{aligned}$$

35. (a) Sea f continua en $[-a, 0]$. Utilizar un cambio de variable para demostrar que

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx.$$

(b) Sea f continua en $[-a, a]$. Demostrar que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

a) $u = -x \Rightarrow x = -u$ y $dx = -du$; además,

si $x = -a \Rightarrow u = a$; si $x = 0 \Rightarrow u = 0$

$$\Rightarrow \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-u) du = \int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(-x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx \end{aligned}$$

36. Sea f una función continua en $[-a, a]$. Utilizar el ejercicio 35 para demostrar que

(a) $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ si f es impar.

(b) $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ si f es par.

a) f impar $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_0^a [f(x) - f(x)] dx = 0$$

b) f par $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_0^a [f(x) + f(x)] dx \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

Utilizar el ejercicio 36 para calcular las siguientes integrales.

38. $\int_{-3}^3 \frac{t^3}{1+t^2} dt.$

$$f(-t) = \frac{(-t)^3}{1+(-t)^2} = -\frac{t^3}{1+t^2} = -f(t) \Rightarrow f \text{ es impar}$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^3 f(t) dt = \int_{-3}^3 \frac{t^3}{1+t^2} dt = 0$$

Utilizar el ejercicio 36 para calcular las siguientes integrales.

39. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1 + x^2 - \cos x) dx.$

$$f(-x) = 1 + (-x)^2 - \cos(-x) = 1 + x^2 - \cos x = f(x) \Rightarrow f \text{ es par}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/3}^{\pi/3} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi/3} (1 + x^2 - \cos x) dx$$

$$= 2 \left[x + \frac{x^3}{3} - \sin x \right]_0^{\pi/3} = 2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{3^3} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$= \frac{2}{3} \pi + \frac{2}{81} \pi^3 - \sqrt{3}$$

Ejercicios sugeridos, Sección 5.7

Prácticos: 18, 21, 25, 26
28, 34, 38, 39

Teóricos: 6, 15, 24, 35