Integración 5

Sección 5.8

Teoremas del valor medio para integrales y valor promedio

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

5.8 TEOREMAS DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES; VALOR MEDIO O PROMEDIO

Empezaremos con un resultado cuya demostración se pedía al lector en el ejercicio 29 de la sección 5.2.

TEOREMA 5.8.1 PRIMER TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Si f es continua en $[a, b]$, existe un número c en (a, b) tal que

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).}$$

A este número se le llama *valor medio o promedio de f en $[a, b]$*.

Se verifica entonces la siguiente identidad:

(5.8.2)
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (\textit{valor promedio de } f \textit{ en } [a, b]) \cdot (b-a).}$$

Esta identidad nos suministra un instrumento poderoso e intuitivo para entender la integral definida.

Fijémonos por un instante en el área. Si f es constante y positiva en $[a, b]$, entonces Ω, la región por debajo de la gráfica, es un rectángulo. Su área viene dada por la fórmula

$$\text{área de } \Omega = (\text{valor constante de } f \text{ en } [a, b]) \cdot (b - a). \qquad \text{(figura 5.8.1)}$$

Si f puede variar de manera continua en $[a, b]$, tenemos que

$$\text{área de } \Omega = \int_a^b f(x)\, dx,$$

lo cual puede escribirse

$$\boxed{\textit{Área de } \Omega = (\textit{valor promedio de } f \textit{ en } [a, b]) \cdot (b - a).} \qquad \text{(figura 5.8.2)}$$

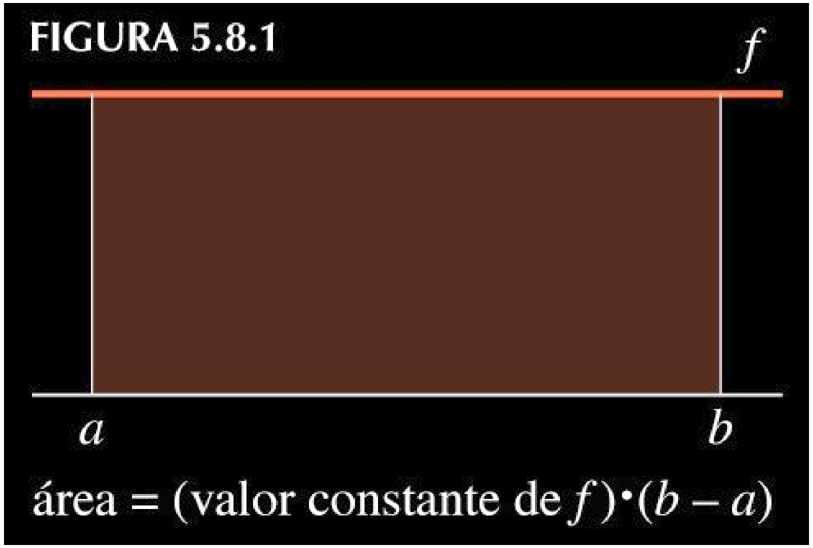
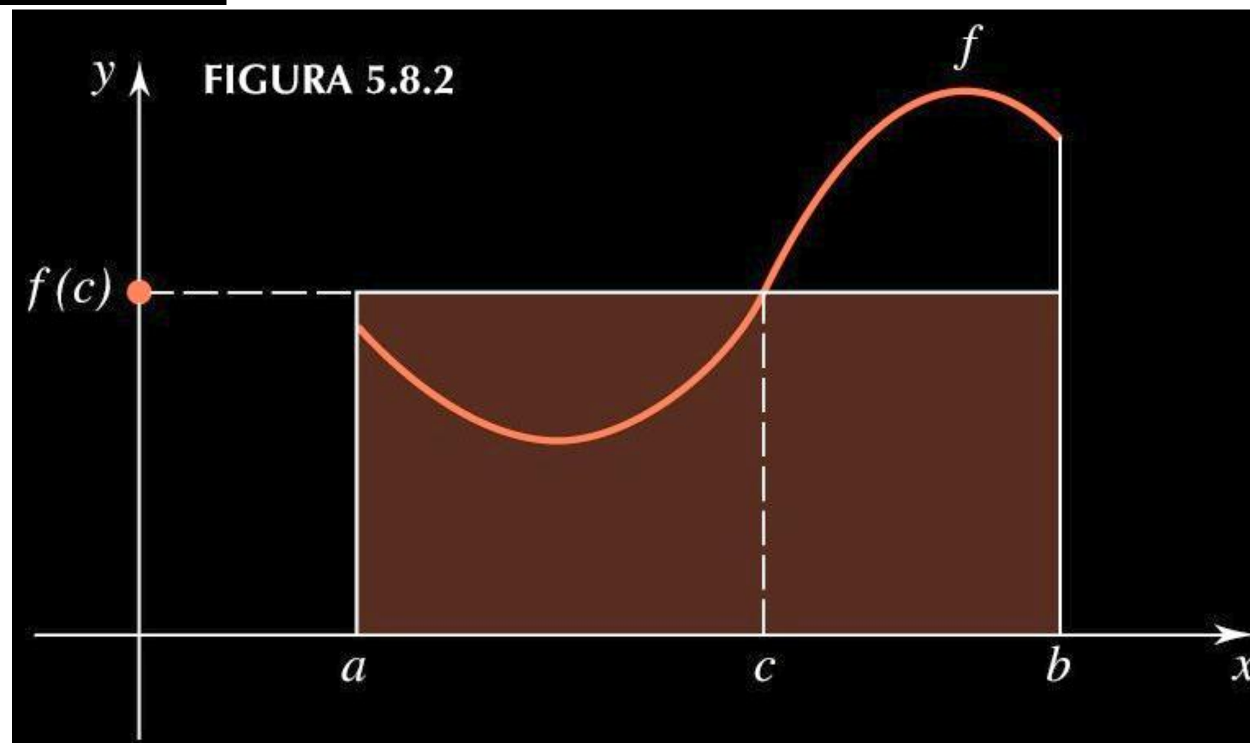


FIGURA 5.8.1
f
a
b
área = (valor constante de f)•(b – a)


y
FIGURA 5.8.2
f
f (c)
a
c
b
x

Fijémonos ahora en el movimiento. Si un objeto se desplaza a lo largo de una recta con velocidad constante $|v|$ durante el intervalo de tiempo $[a, b]$, se verifica que

$$\text{distancia recorrida} = (\text{valor constante de } |v| \text{ en } [a, b]) \cdot (b - a).$$

Si la velocidad $|v|$ varía, tenemos

$$\text{distancia recorrida} = \int_a^b |v(t)|\, dt,$$

que también podemos escribir

$$\boxed{\textit{distancia recorrida} = (\textit{promedio de } |v| \textit{ en } [a, b]) \cdot (b - a).}$$

Tomamos un intervalo $[a, b]$ y calculamos el valor medio de la función más simple posible en ese intervalo. Por conveniencia, indicamos con f_{med} el valor medio de f en $[a, b]$. Despejando f_{med} de la identidad (5.8.2), tenemos

$$\boxed{f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.}$$

El valor medio de una función constante $f(x) = k$ es, por supuesto, k:

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b k\,dx = \frac{k}{b-a}[x]_a^b = \frac{k}{b-a}(b-a) = k.$$

El valor medio de $f(x) = x$ en $[a, b]$ es $\frac{1}{2}(b+a)$:

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) = \tfrac{1}{2}(b+a).$$

¿Cuál es el valor medio de $f(x) = x^2$?

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b^2+ab+a^2)(b-a)}{3}\right] = \underline{\tfrac{1}{3}(b^2+ab+a^2)}.$$

Por tanto, el valor medio de $f(x) = x^2$ en $[a, b]$ es $\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$ (ver ejemplo 6 en la sección 5.1.). En $[1, 3]$ los valores de x^2 varían de 1 a 9; el valor medio es $\frac{13}{3}$.

Existe una extensión del teorema 5.8.1 muy útil de cara a las aplicaciones, como se verá más adelante:

TEOREMA 5.8.3 SEGUNDO TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y g es no negativa, existe un número c en (a, b) para el cual se verifica

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

El número $f(c)$ se denomina *media ponderada o promedio ponderado de f en $[a, b]$ respecto de g*.

Demostraremos este teorema (con lo cual dispondremos de una prueba para el teorema 5.8.1)

Demostración del teorema 5.8.3 Dado que f es continua en $[a, b]$, f toma un valor mínimo m en $[a, b]$ y un valor máximo M. Dado que g es no negativa en $[a, b]$, tenemos que

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } [a, b].$$

Luego

$$\int_a^b mg(x)\, dx \le \int_a^b f(x)g(x)\, dx \le \int_a^b Mg(x)\, dx$$

y

$$m\int_a^b g(x)\, dx \le \int_a^b f(x)g(x)\, dx \le M\int_a^b g(x)\, dx \; .$$

Sabemos que $\int_a^b g(x)\, dx \ge 0$. Si $\int_a^b g(x)\, dx = 0$, entonces también tenemos que $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$ y el teorema se verifica para cualquier elección de c en (a, b). Si $\int_a^b g(x)\, dx > 0$, entonces

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} \le M$$

y por el teorema del valor intermedio (teorema 2.6.1) existe un c en (a, b) para el cual

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} .$$

Evidentemente, se verifica entonces que

$$f(c)\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)g(x)\, dx .$$

[No existe razón alguna para preocuparse por el teorema 5.8.1. Se trata del teorema 5.8.3 con $g(x)$ idénticamente igual a 1.]

La masa de una varilla Imaginarse una varilla fina (un alambre fino de grosor despreciable) colocada en el eje x entre los puntos $x = a$ y $x = b$. Si la *densidad de masa* de la varilla (la masa por unidad de longitud) es constante, su masa M es simplemente el producto de la densidad λ por la longitud de la varilla: $M = \lambda\,(b - a)$[†]. Si la densidad λ varía de manera continua a lo largo de la varilla, es decir si $\lambda = \lambda(x)$, entonces la masa de la varilla es el producto del promedio de la densidad por la longitud de la varilla:

$$M = (\text{promedio de la densidad}) \times (\text{longitud}).$$

Es una integral:

(5.8.4) $$\boxed{M = \int_a^b \lambda(x)\, dx.}$$

[†] El símbolo λ es la letra griega "lambda".

El centro de masa de una varilla Seguimos con la misma varilla. Si ésta es homogénea (densidad constante), entonces su centro de masa es, sencillamente, el punto intermedio:

$$x_M = \tfrac{1}{2}(a+b) \qquad \text{(el promedio de } x \text{ desde } a \text{ hasta } b\text{)}$$

Si la varilla no es homogénea, el centro de masa sigue siendo un promedio, sólo que esta vez se trata de un promedio ponderado, *el promedio ponderado de x, desde a hasta b, respecto de la densidad*; concretamente, x_M es el punto para el cual

$$x_M \int_a^b \lambda(x)\,dx = \int_a^b x\lambda(x)\,dx.$$

Dado que la integral de la izquierda es sencillamente M, tenemos

(5.8.5)
$$\boxed{x_M M = \int_a^b x\lambda(x)\,dx.}$$

Ejemplo 1 Una varilla de longitud L está colocada sobre el eje x desde $x = 0$ hasta $x = L$. Hallar la masa de la varilla y su centro de masa suponiendo que la densidad de la varilla es proporcional a la distancia al extremo $x = 0$ de la varilla.

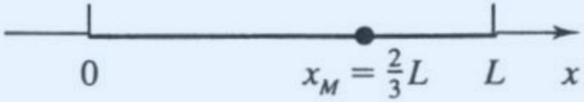
Solución Aquí, $\lambda(x) = kx$ donde k es una constante positiva. Luego

$$M = \int_0^L kx\,dx = \left[\tfrac{1}{2}kx^2\right]_0^L = \tfrac{1}{2}kL^2$$

y

$$x_M M = \int_0^L x(kx)\,dx = \int_0^L kx^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}kx^3\right]_0^L = \tfrac{1}{3}kL^3.$$

Dividiendo por M obtenemos $x_M = \frac{2}{3}L$.



En este caso el centro de masa está situado a la derecha del punto intermedio. Esto tiene sentido: después de todo, la densidad crece cuando uno se desplaza de izquierda a derecha. Luego hay más masa situada a la derecha que a la izquierda del punto intermedio.

Ejercicios sugeridos, Sección 5.8

Prácticos: 5, 9, 10, 12
21, 22, 28, 32

Teóricos: 17, 18, 24, 30

TEMAS IMPORTANTES DEL CAPÍTULO

5.1 La integral definida de una función continua

partición (p. 259)
integral definida (p. 261)
método de Darboux (p. 264
suma superior; suma inferior (p. 260)
límites de integración; integrando (p. 261)
sumas de Riemann (p. 265)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} [f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n].$$

5.2 La función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

aditividad de la integral (p. 270)

$\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$ si f es continua (p. 273)

5.3 El teorema fundamental del cálculo integral

antiderivada (p. 278)
tabla de antiderivadas (p. 280)
linealidad de la integral (p. 282)
teorema fundamental (p. 279)

5.4 Algunos problemas de área

Si f y g son continuas y si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$$

nos da el área de la región comprendida entre las gráficas de f y g sobre $[a, b]$.

área orientada (p. 289)

5.5 Integrales indefinidas

integral indefinida; constante de integración (p. 292)
tabla de integrales indefinidas (p. 293)
algunos problemas de movimiento (p. 294)

$$\int_a^b |v(t)|\ dt = \text{distancia recorrida entre los instantes } t = a \text{ y } t = b$$

$$\int_a^b v(t)\ dt = \text{desplazamiento neto entre los instantes } t = a \text{ y } t = b.$$

ecuación del movimiento lineal con aceleración constante (p. 297)

5.6 Cambio de variable

Una integral de la forma $\int f(g(x))g'(x)\ dx$ puede escribirse en la forma $\int f(u)\ du$ haciendo

$$u = g(x), \quad du = g'(x)\ dx.$$

Para las integrales definidas,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du.$$

5.7 Otras propiedades de la integral definida

La integral de una función no negativa es no negativa; la integral de una función positiva es positiva; la integral preserva el orden (pp. 308-309)

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx, \qquad \frac{d}{dx}\left(\int_a^u f(t)\ dt\right) = f(u)\ \frac{du}{dx}.$$

5.8 Teoremas del valor medio para integrales; valor medio o promedio

primer teorema del valor medio para integrales (p. 314)

promedio (p. 314)

segundo teorema del valor medio para integrales (p. 315)

media ponderada o promedio ponderado (p. 315)

masa de una varilla (p. 316)

centro de masa de una varilla (p. 316)