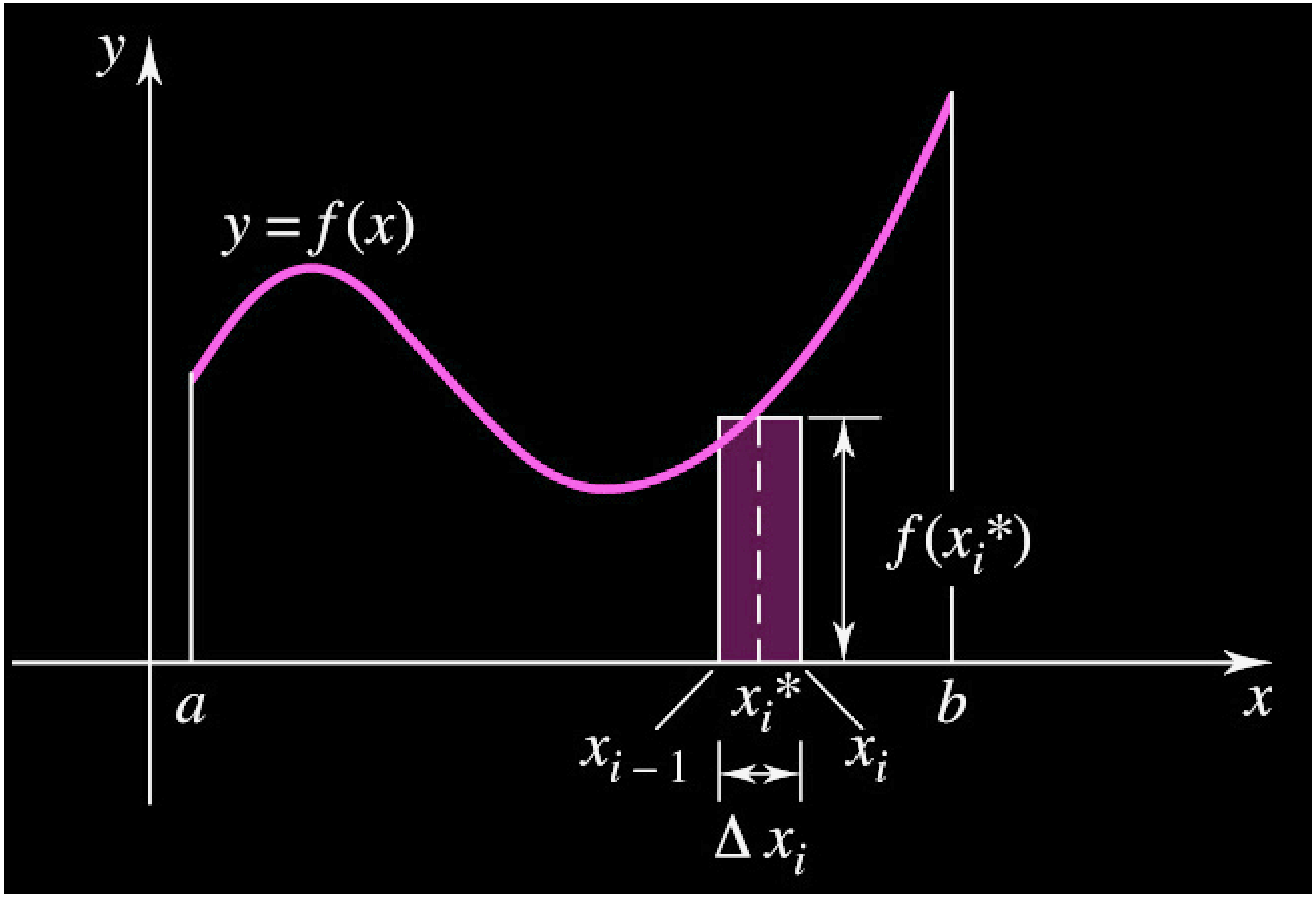
Aplicaciones de la Integral 6

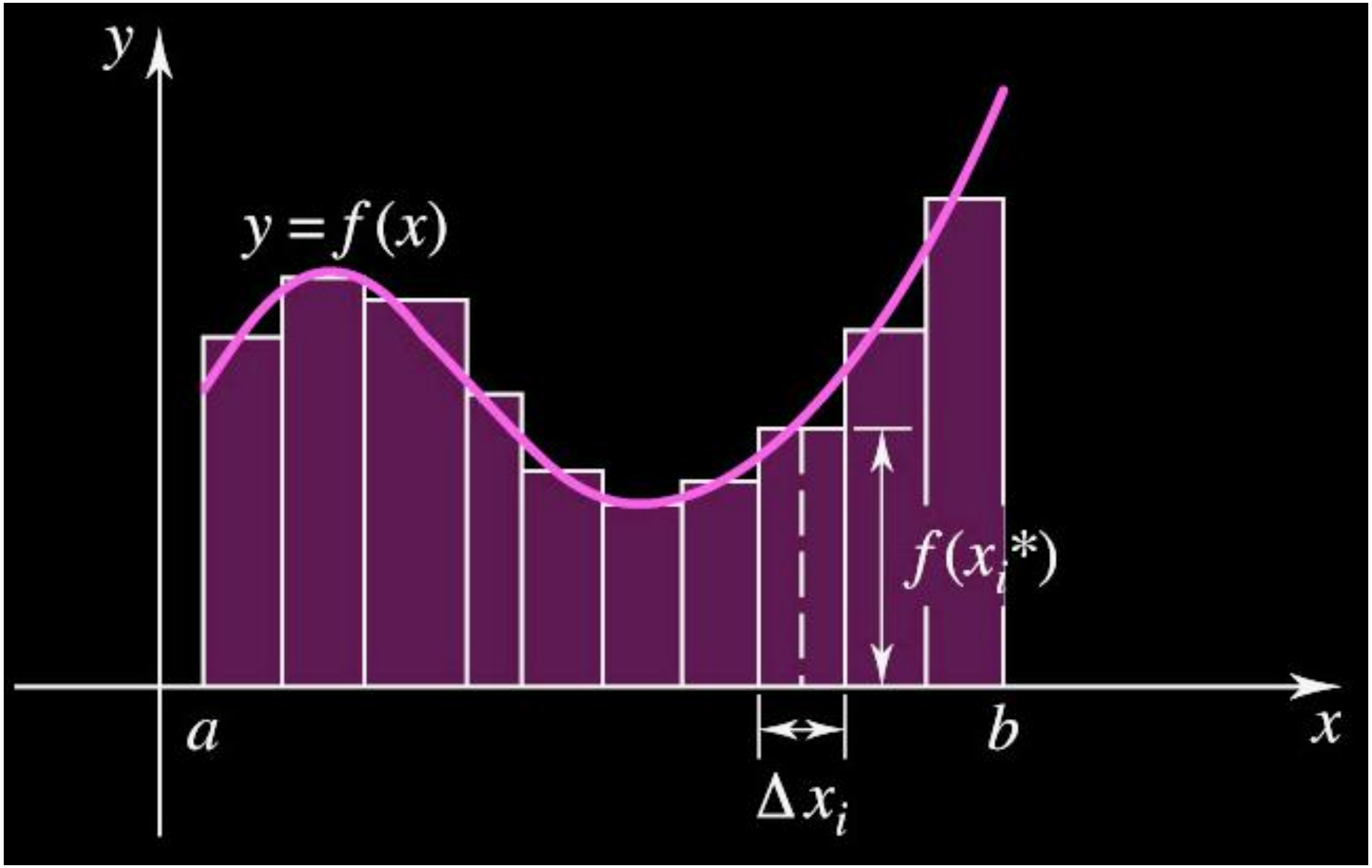
Sección 6.1

Algo más acerca del área

Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)



y
y = f(x)
f(x_i*)
a
x_i*
b
x
x_{i−1}
x_i
Δx_i


y
y = f(x)
f(xi*)
a
b
x
Δxi

6.1 ALGO MÁS ACERCA DEL ÁREA

Rectángulos representativos

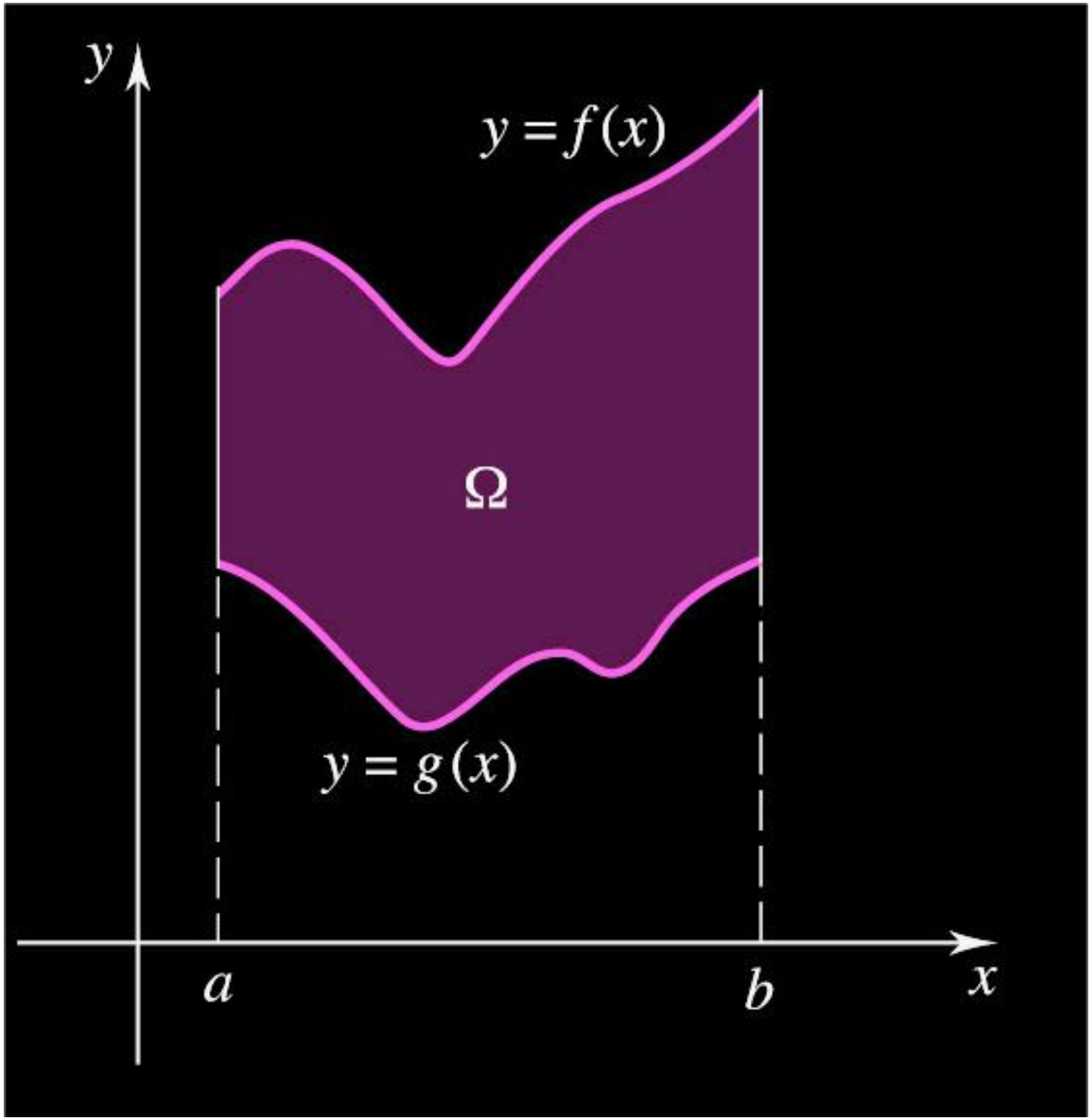
Hemos visto cómo la integral definida puede ser considerada como un límite de sumas de Riemann:

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} [f(x_1^*)\,\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x_n].$$

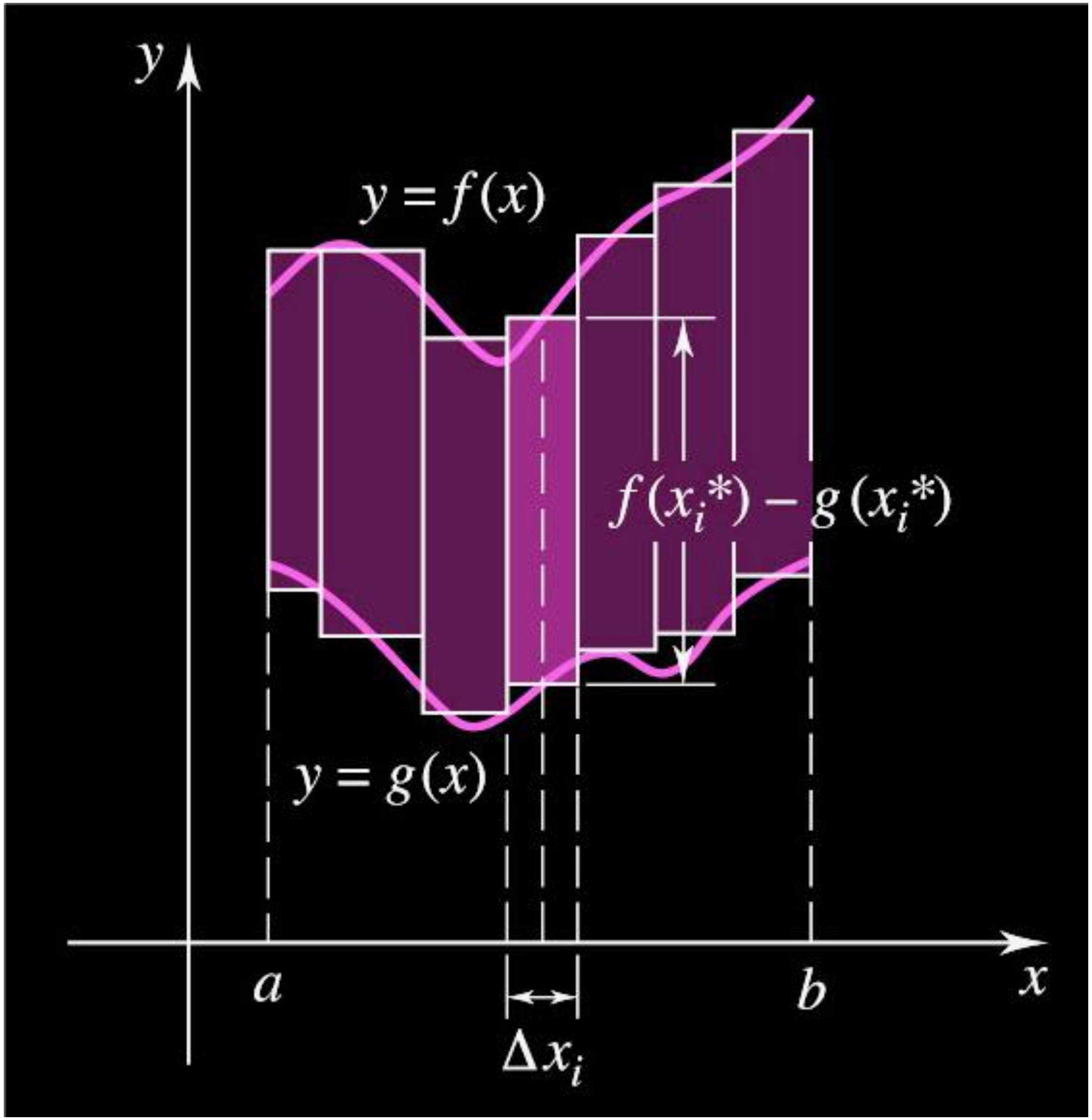
Al elegir x_i^* de manera arbitraria en $[x_{i-1}, x_i]$, se puede considerar $f(x_i^*)$ como un valor *representativo* de f en ese intervalo. Si f es positiva, el producto

$$f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

da el área del *rectángulo representativo* de la figura 6.1.1. La fórmula (1) nos dice que podemos aproximar el área por debajo de la curva tanto como deseemos sumando áreas de rectángulos representativos (figura 6.1.2).



y
y = f(x)
Ω
y = g(x)
a
b
x



y
y = f(x)
f(x_i*) − g(x_i*)
y = g(x)
a
b
x
Δx_i

La figura 6.1.3 muestra una región Ω limitada por arriba por la gráfica de una función f y limitada por abajo por la gráfica de una función g. Como vimos anteriormente, podemos calcular el área de Ω integrando respecto de x la *separación vertical*

$$f(x) - g(x)$$

desde $x = a$ hasta $x = b$:

$$\text{área } (\Omega) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

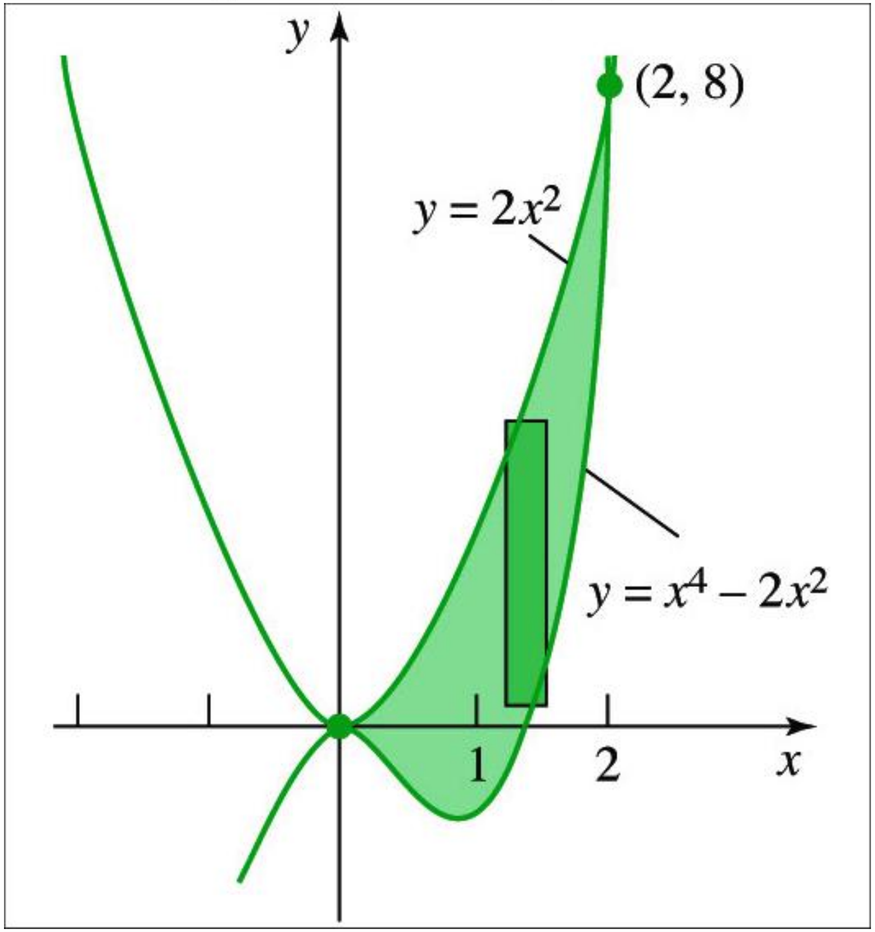
En este caso, las sumas de Riemann que permiten la aproximación tienen la forma

$$[f(x_1^*) - g(x_1^*)]\, \Delta x_1 + [f(x_2^*) - g(x_2^*)]\, \Delta x_2 + \cdots + [f(x_n^*) - g(x_n^*)]\, \Delta x_n.$$

Las dimensiones de un rectángulo representativo son ahora

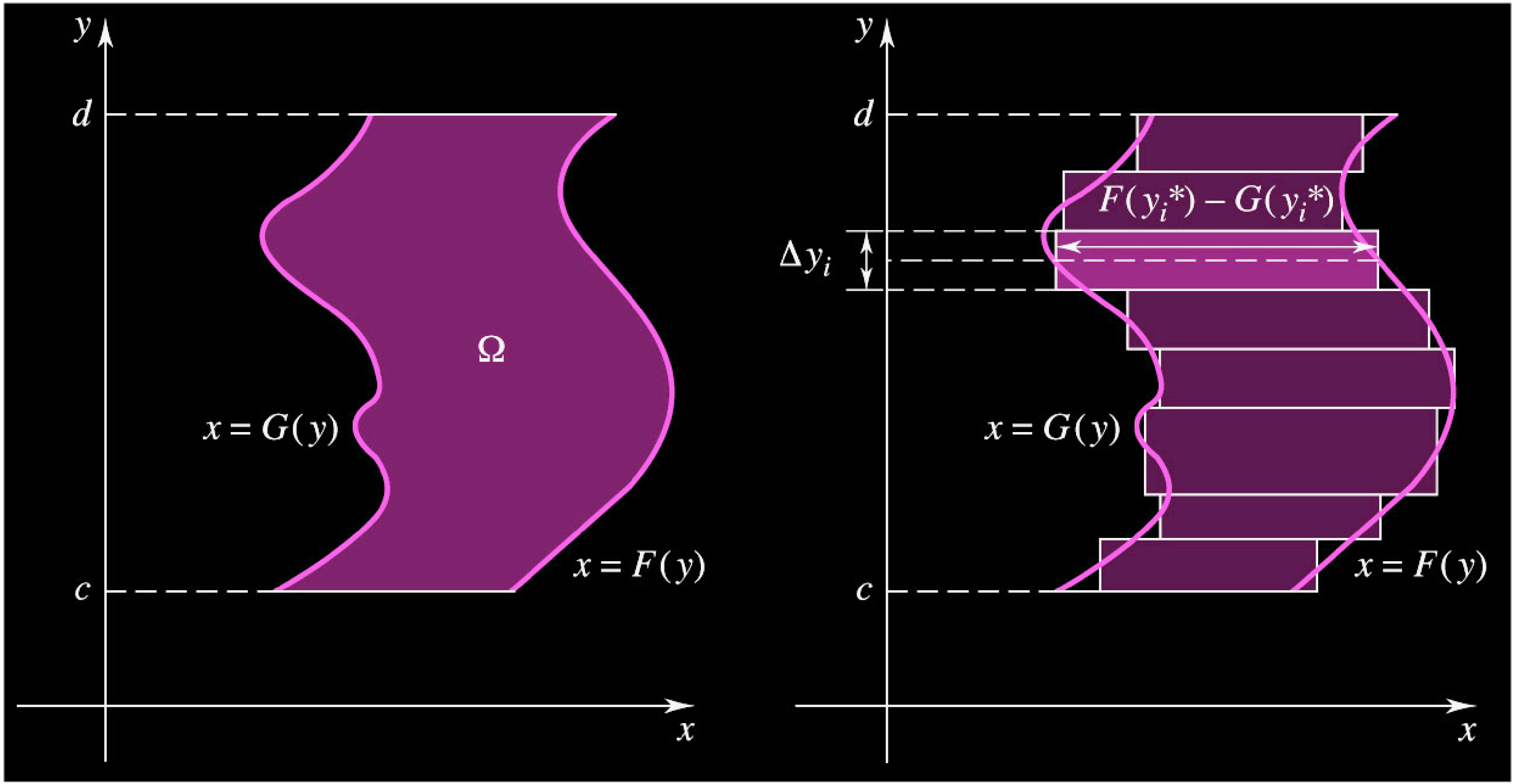
$$\text{“altura”} = f(x_i^*) - g(x_i^*) \quad \text{y} \quad \text{“anchura”} = \Delta x_i.$$

Ejemplo 1 Hallar el área de la región sombreada que se muestra en la figura 6.1.4.



Solución El área del rectángulo representativo es $[2x^2 - (x^4 - 2x^2)]\ \Delta x,\ \ 0 \leq x \leq 2$. Por tanto, el área de la región sombreada es

$$A = \int_0^2 [2x^2 - (x^4 - 2x^2)]\ dx = \int_0^2 (4x^2 - x^4)\ dx = [\tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5]_0^2 = \tfrac{64}{15}.$$


y
d
Ω
x = G(y)
c
x = F(y)
x
y
d
F(y_i*) − G(y_i*)
Δy_i
x = G(y)
c
x = F(y)
x

Áreas por integración respecto de y

En la figura 6.1.5 podemos ver una región cuyas fronteras no son funciones de x sino funciones de y. En tal caso podemos dibujar los rectángulos representativos horizontalmente y calcular el área de la región como límite de las sumas de Riemann compuestas de productos de la forma

$$[F(y_1^*) - G(y_1^*)]\ \Delta y_1 + [F(y_2^*) - G(y_2^*)]\ \Delta y_2 + \cdots + [F(y_n^*) - G(y_n^*)]\ \Delta y_n.$$

Por consiguiente, el área de la región viene dada por la integral

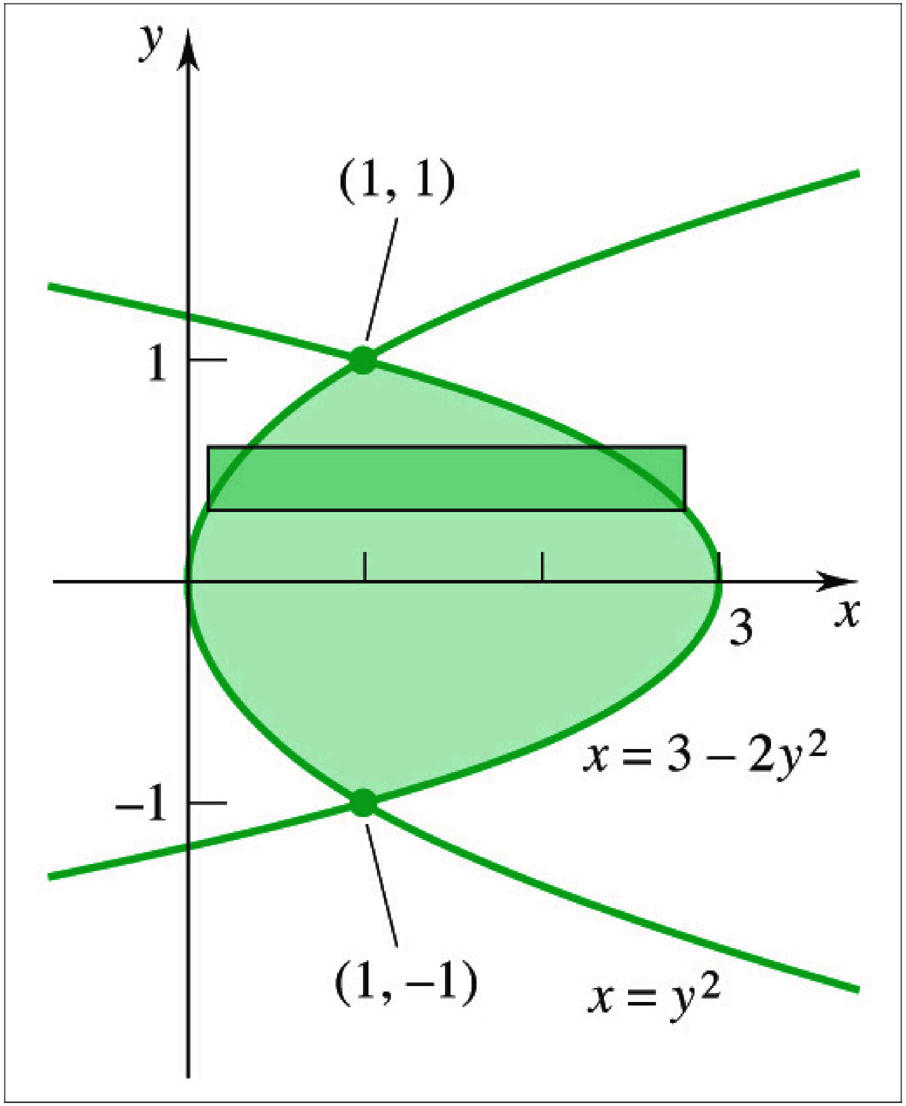
$$\int_c^d [F(y) - G(y)]\ dy.$$

Aquí estamos integrando la *separación horizontal*

$$F(y) - G(y)$$

respecto de y.

Ejemplo 2 Hallar el área de la región limitada a la izquierda por $x = y^2$ y a la derecha por $x = 3 - 2y^2$.



Solución La región está representada en la figura 6.1.6. Los puntos de intersección se hallan resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones:

$$x = y^2 \qquad \text{y} \qquad x = 3 - 2y^2$$

implica que

$$y^2 = 3 - 2y^2$$
$$3y^2 = 3 \qquad \text{y} \qquad y = \pm 1.$$

Los puntos de intersección son $(1, 1)$ y $(1, -1)$. El modo más fácil de calcular el área consiste en considerar los rectángulos representativos horizontalmente e integrar respecto de y. Podemos hallar el área de la región integrando la separación

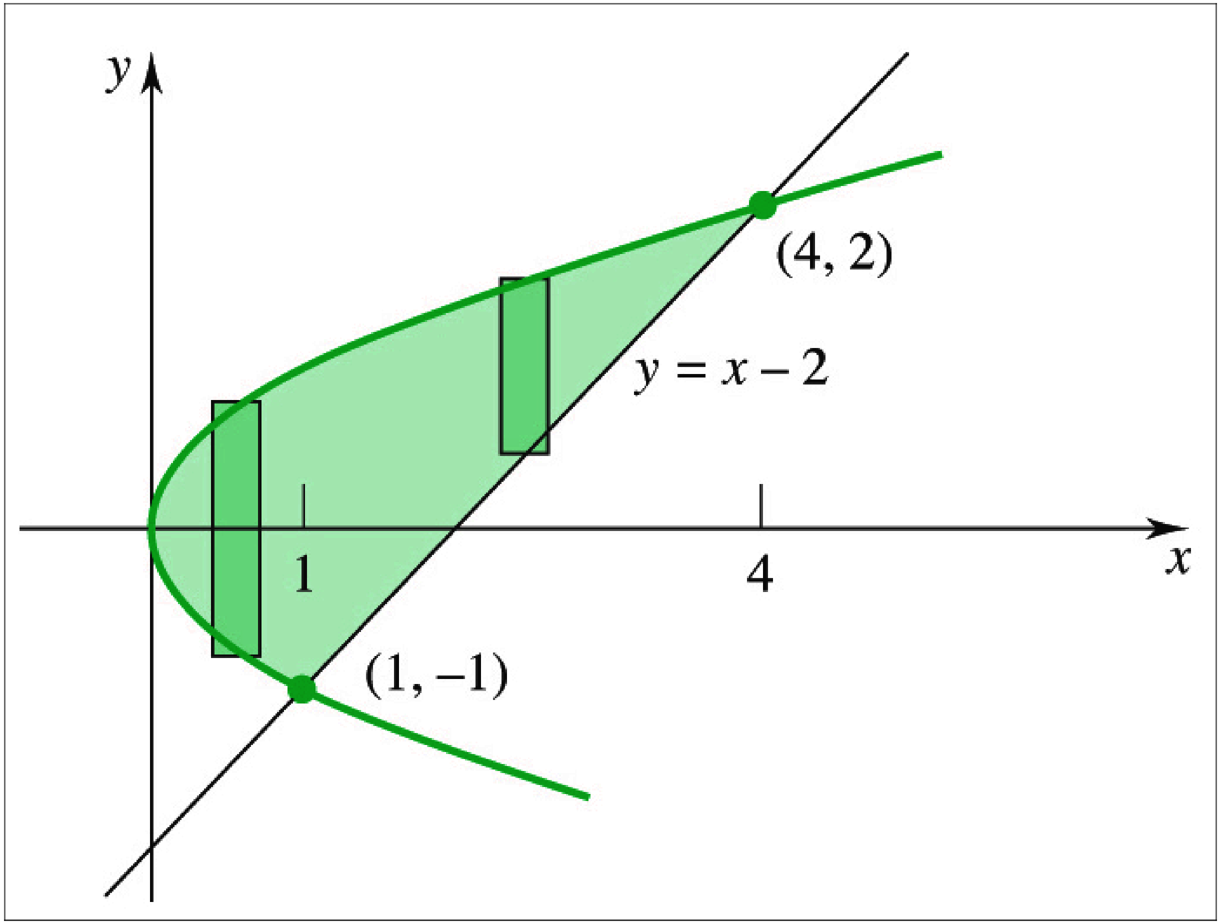
$$(3 - 2y^2) - y^2 = 3 - 3y^2 \quad \text{desde } y = -1 \text{ hasta } y = 1:$$

$$A = \int_{-1}^{1} (3 - 3y^2)\, dy = [3y - y^3]_{-1}^{1} = 4$$

NOTA: en nuestra solución no hemos aprovechado la simetría. La región es simétrica respecto al eje x (el integrando es una función par de y) y por tanto el área también viene dada por

$$A = 2\int_{0}^{1} (3 - 3y^2)\, dy = 2[3y - y^3]_{0}^{1} = 4.$$

Ejemplo 3 Calcular el área de la región limitada por las curvas $x = y^2$ y $x - y = 2$ integrando (a) respecto de x, (b) respecto de y.



Solución Podemos comprobar que las dos curvas se cortan en los puntos $(1, -1)$ y $(4, 2)$.

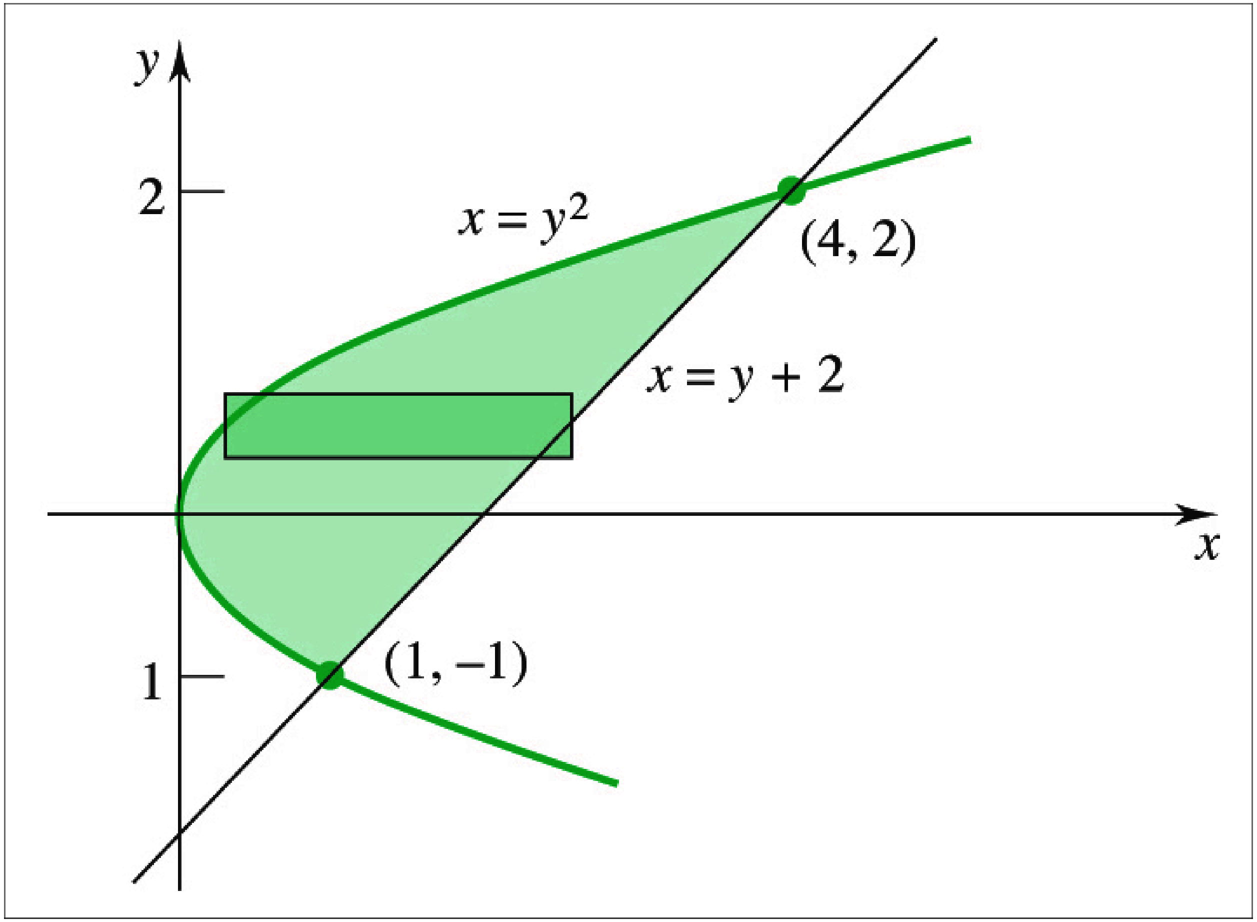
(a) Para integrar respecto de x se consideran los rectángulos representativos verticalmente. Despejando y de $x = y^2$ obtenemos $y = \pm\sqrt{x}$; $y = \sqrt{x}$ es la mitad superior de la parábola e $y = -\sqrt{x}$ es la mitad inferior. La ecuación de la recta puede escribirse como $y = x - 2$. Ver figura 6.1.7.

La frontera superior de la región es la curva $y = \sqrt{x}$. Sin embargo, la frontera inferior debe ser descrita mediante dos ecuaciones: $y = -\sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ e $y = x - 2$ desde $x = 1$ hasta $x = 4$. De ahí que necesitemos dos integrales:

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x-2)]\ dx$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{x}\ \ dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2)dx = \left[\tfrac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^4 = \tfrac{9}{2}.$$

Ejemplo 3 Calcular el área de la región limitada por las curvas $x = y^2$ y $x - y = 2$ integrando (a) respecto de x, (b) respecto de y.



(b) Para integrar respecto de y consideramos los rectángulos representativos horizontalmente. Ver figura 6.1.8. Ahora la frontera de la derecha es la recta $x = y + 2$ y la frontera de la izquierda es la curva $x = y^2$. Como y varía desde – 1 hasta 2,

$$A = \int_{-1}^{2} [(y + 2) - y^2]\, dy = \left[\tfrac{1}{2}y^2 + 2y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{2} = \tfrac{9}{2}.$$

Ejercicios sugeridos, Sección 6.1

Prácticos: 7, 10, 18, 24, 28, 29

Teóricos: 39, 40, 45, 46