Aplicaciones de la Integral 6

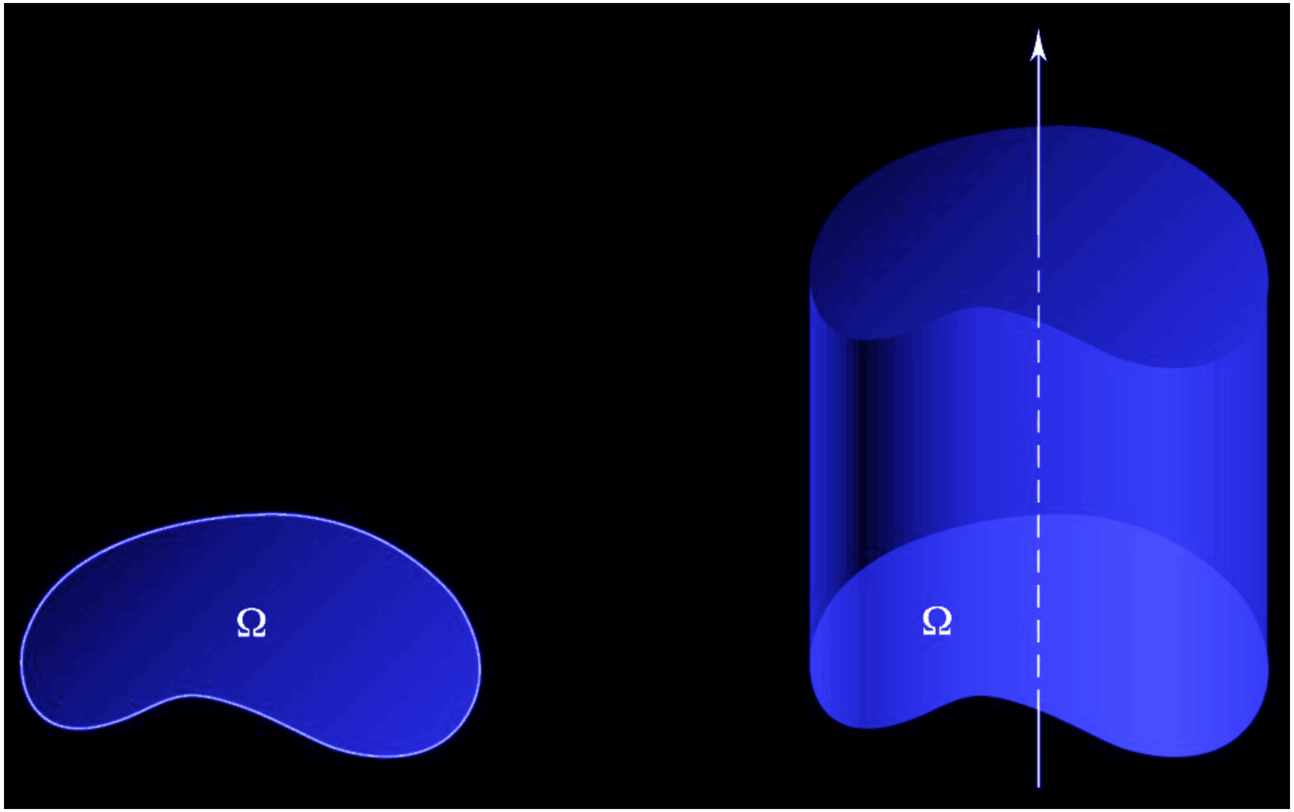
Sección 6.2

Cálculo de volúmenes por secciones paralelas: discos y arandelas

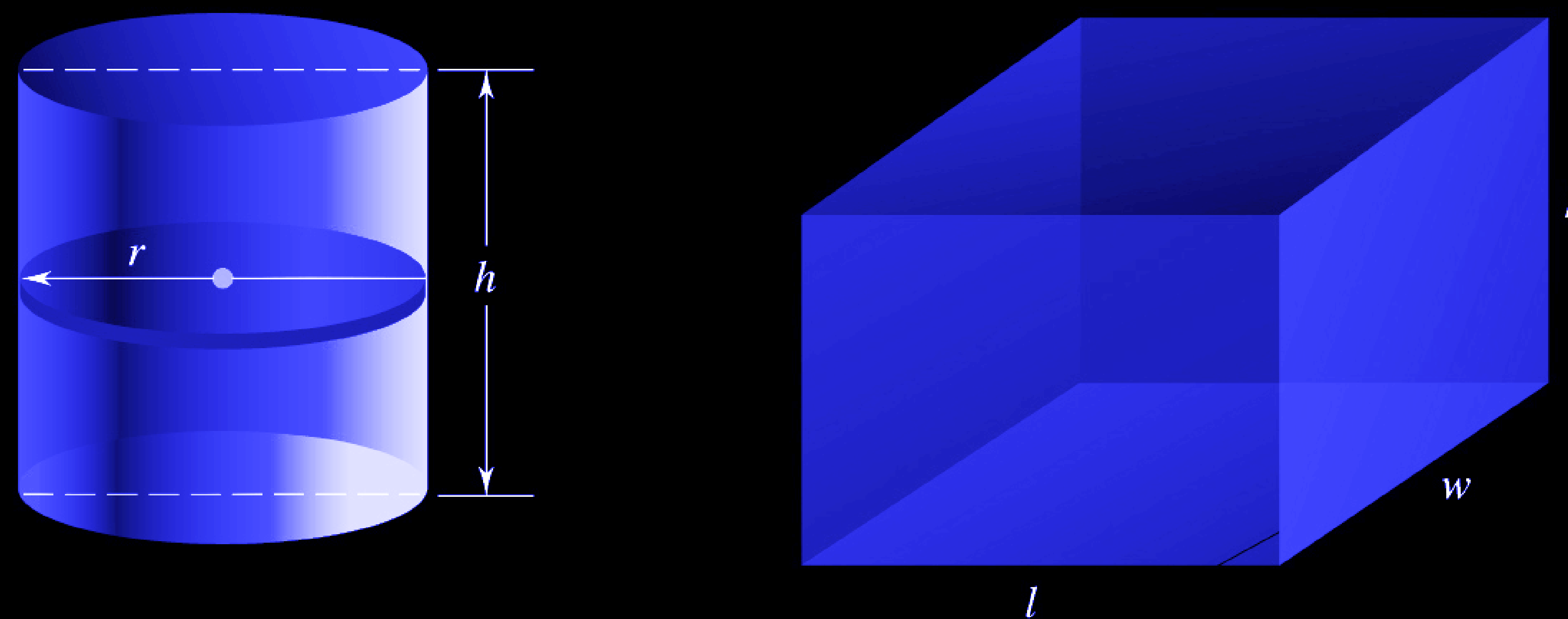
Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

En esta sección utilizaremos integrales definidas para hallar los volúmenes de ciertos sólidos tridimensionales. Para comenzar, sea Ω una región plana. Un *cilindro recto con sección transversal* Ω es un sólido formado por traslación de Ω a lo largo de una recta, o *eje*, que es perpendicular a ella. Ver figura 6.2.1. Sea A el área de Ω. Si un cilindro recto está formado por traslación de la región Ω a lo largo de una distancia h, entonces el volumen del cilindro viene dado por

$$\boxed{V = A \cdot h.}$$



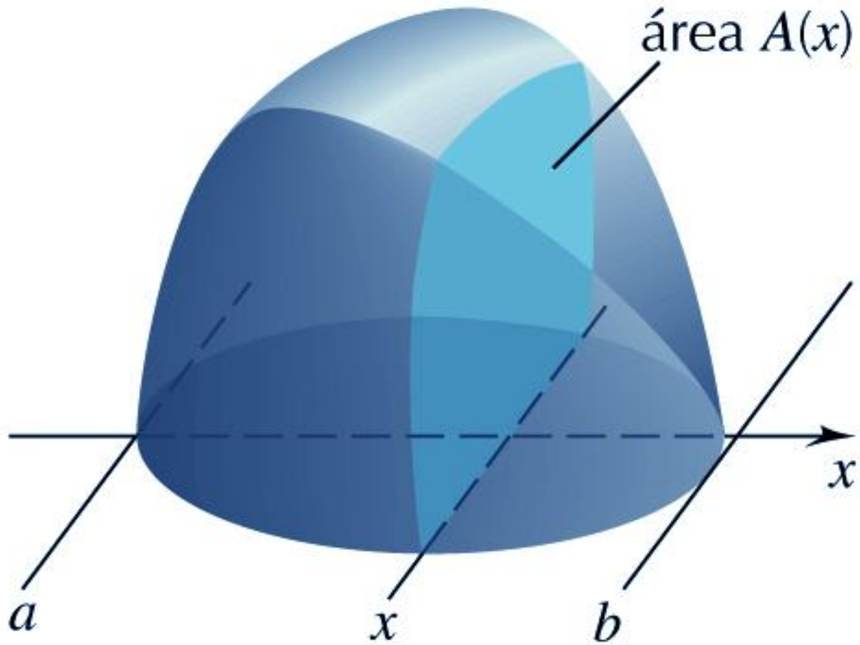
Algunos ejemplos familiares son un cilindro circular recto de radio r y altura h, y una caja rectangular de longitud l, ancho w y altura h (figura 6.2.2).



$V = \pi r^2 h =$ (área de la sección) $\cdot$ altura

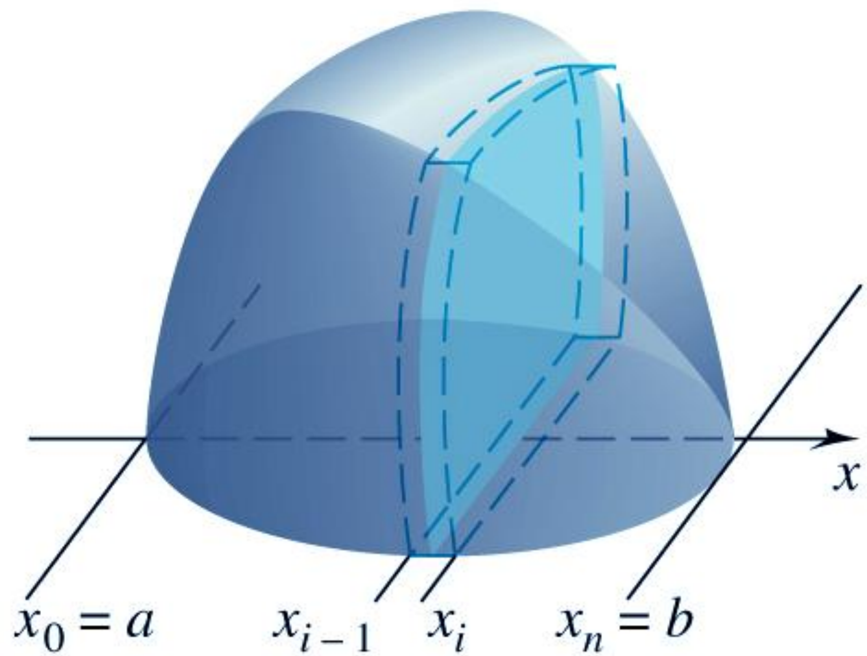
$V = l \cdot w \cdot h =$ (área de la sección) $\cdot$ altura

Para calcular el volumen de un sólido más general, introducimos un eje de coordenadas y examinamos las secciones transversales del sólido perpendiculares a dicho eje. En la figura 6.2.3 hemos representado un sólido y un eje de coordenadas considerado como eje x. Como en la figura, suponemos que el sólido está enteramente situado entre $x = a$ y $x = b$. En la figura se puede ver una sección arbitraria del sólido, perpendicular al eje x. En lo sucesivo, por $A(x)$ designamos el área de la sección transversal que tiene coordenada x.



$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Si el área de la sección transversal, $A(x)$, varía continuamente con x, podemos hallar el volumen V del sólido mediante la integración de dicha función entre a y b:



Demostración Consideremos $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. El sólido entre x_{i-1} y x_i puede ser aproximado por un cilindro cuya sección transversal tiene área $A(x_i^*)$, donde x_i^* se elige arbitrariamente dentro de $[x_{i-1}, x_i]$, y cuyo espesor es Δx_i. El volumen de este cilindro es

$$A(x_i^*)\ \Delta x_i.$$

Luego el volumen del sólido entero puede ser aproximado por sumas de la forma

$$A(x_1^*)\Delta x_1 + A(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + A(x_n^*)\Delta x_n.$$

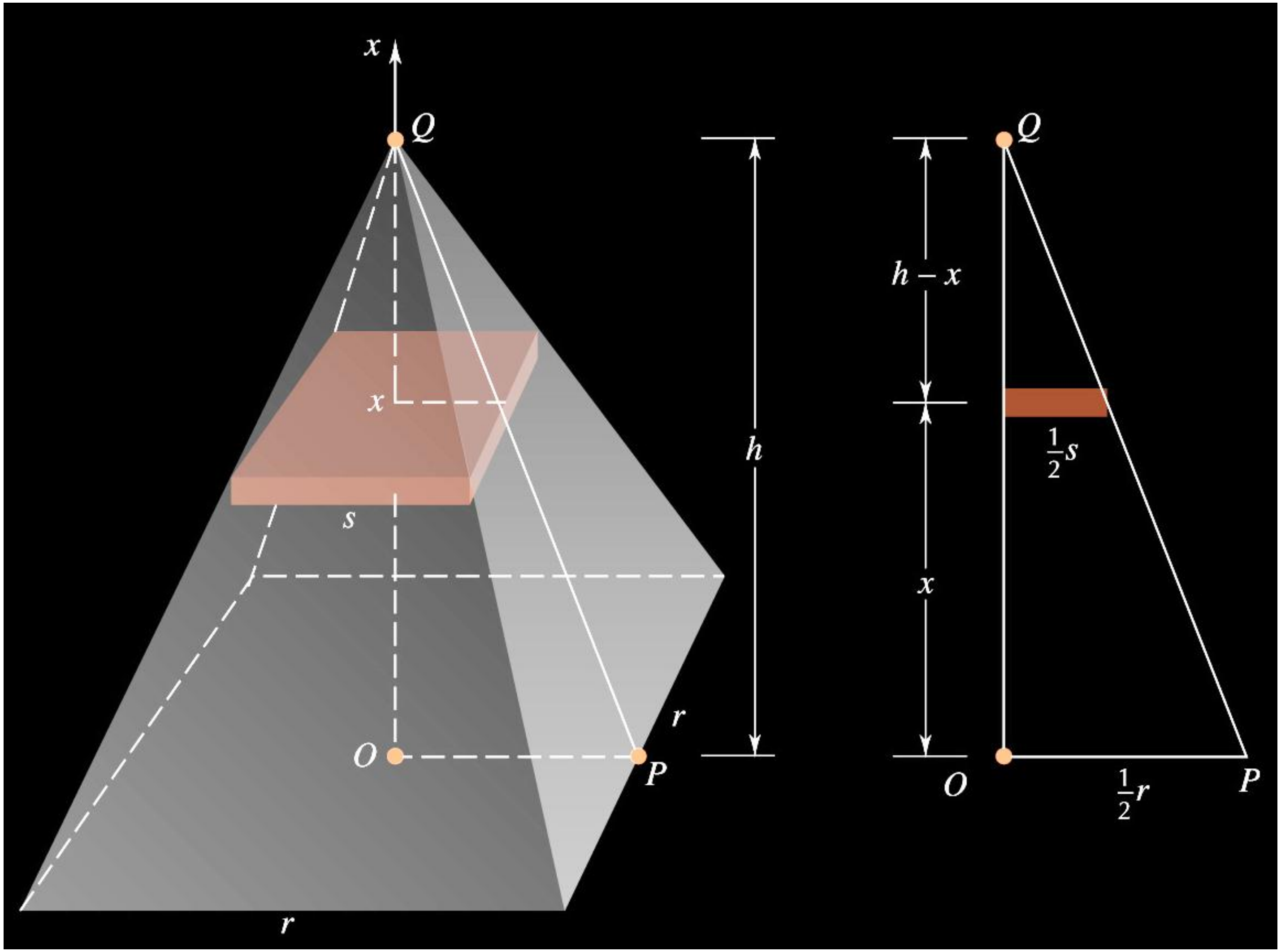
Se trata de sumas de Riemann que convergen, cuando $\|P\| \to 0$, a $\int_a^b A(x)\ dx$.

Observación Por el teorema del valor medio para integrales [ver (5.8.1)], la fórmula para el volumen de un sólido con área de la sección transversal variable $A = A(x)$ puede también ser escrita

$$\boxed{V = (\text{promedio del área de la sección transversal}) \cdot (b - a) \;=\; A_{\text{med}}(b - a).}$$

El cálculo del volumen de sólidos más generales se verá en el capítulo 16. Nos limitaremos aquí a sólidos con secciones transversales simples.

Ejemplo 1 Hallar el volumen de una pirámide cuya altura es h y cuya base es un cuadrado con lados de longitud r (figura 6.2.5a).



Solución Situar el eje x perpendicular a la base, con el origen en el centro de la base. La sección transversal con coordenada x es un cuadrado. Sea s la longitud del lado de ese cuadrado. Entonces, por triángulos semejantes (ver figura 6.2.5b), tenemos

$$\frac{\frac{1}{2}s}{h-x} = \frac{\frac{1}{2}r}{h},$$

y por tanto

$$s = \frac{r}{h}(h-x).$$

Luego el área del cuadrado en la coordenada x es $A(x) = s^2 = (r^2/h^2)(h-x)^2$ y

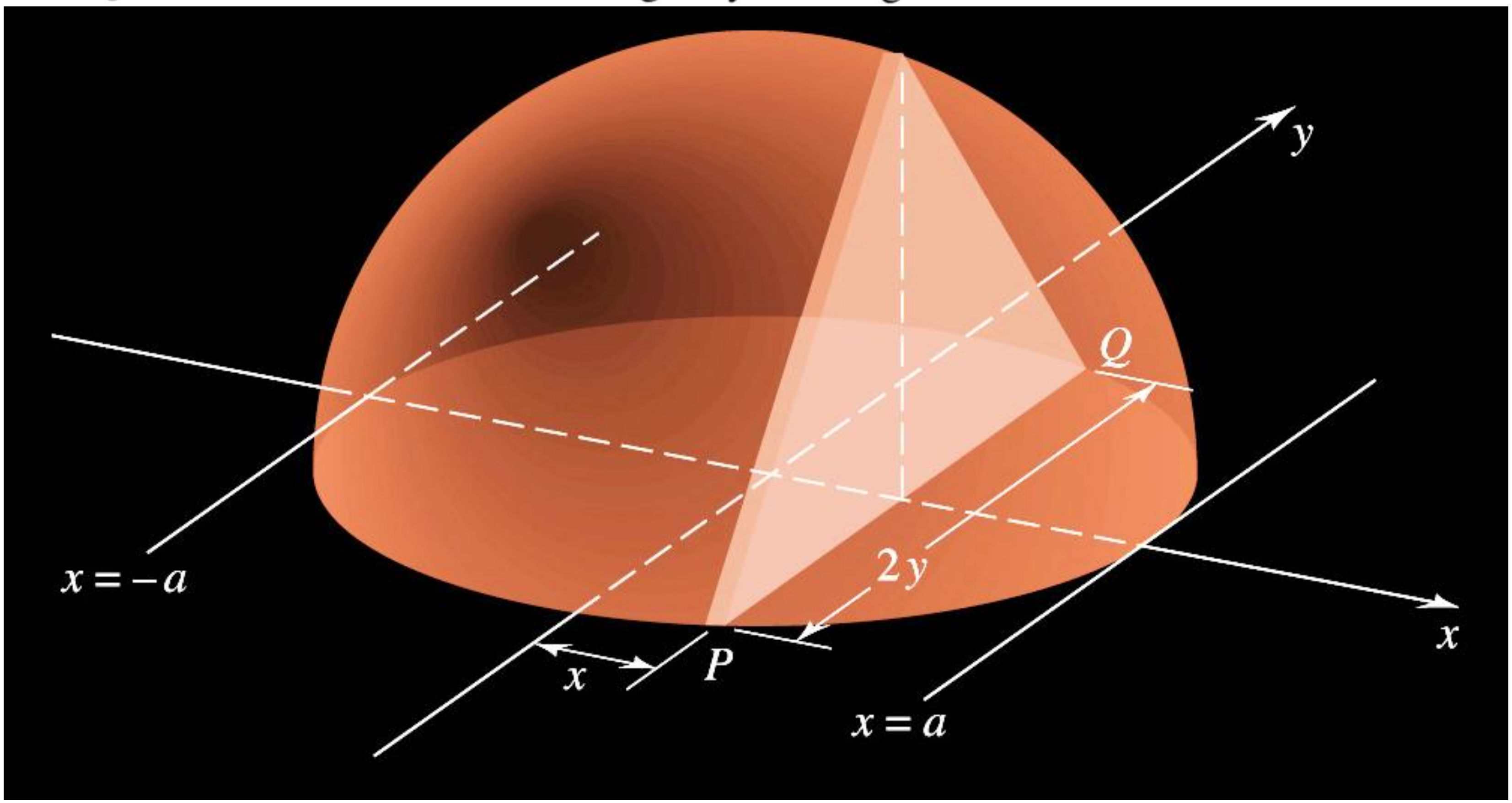
$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \frac{r^2}{h^2}\int_0^h (h-x)^2\,dx$$

$$= \frac{r^2}{h^2}\left[-\frac{(h-x)^3}{3}\right]_0^h = \tfrac{1}{3}r^2 h.$$

Ejemplo 2 La base de un sólido es la región delimitada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hallar el volumen de dicho sólido sabiendo que la sección transversal perpendicular al eje x es un triángulo isósceles con base en la región y altura igual a la mitad de la base.



Solución Sea x como en la figura 6.2.6. La sección transversal de coordenada x es un triángulo isósceles de lado $\overline{PQ}$ y altura $\frac{1}{2}\overline{PQ}$. La ecuación de la elipse puede escribirse como

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Dado que

$$\text{longitud de } \overline{PQ} = 2y = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

el área del triángulo isósceles será:

$$A(x) = \tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}\left(\frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Podemos hallar el volumen del sólido integrando $A(x)$ desde $x = -a$ hasta $x = a$:

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\, dx \quad = 2\int_0^a A(x)\, dx$$

por simetría

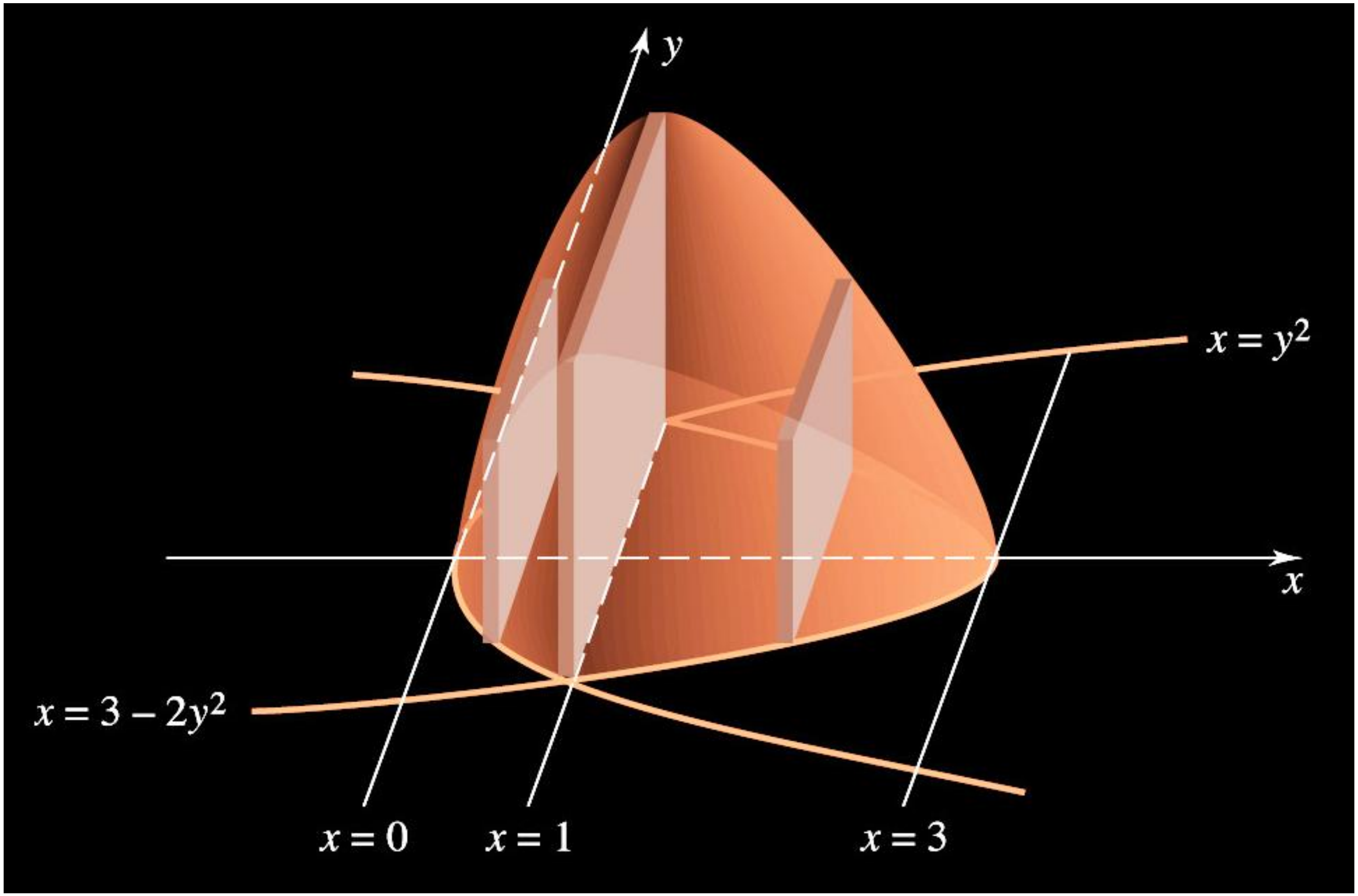
$$= \frac{2b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{2b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \tfrac{4}{3}ab^2.$$

Ejemplo 3 La base de un sólido es la región comprendida entre las parábolas

$$x = y^2 \qquad \text{y} \qquad x = 3 - 2y^2. \qquad \text{(ver ejemplo 2, sección 6.1)}$$

Hallar el volumen del sólido sabiendo que las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados.



Solución Las dos parábolas se cortan en $(1, 1)$ y $(1, -1)$ (figura 6.2.7). Entre $x = 0$ y $x = 1$, la sección transversal de coordenada x tiene por área

$$A(x) = (2y)^2 = 4y^2 = 4x.$$

(Aquí lo que medimos es el área determinada por la primera parábola $x = y^2$.) El volumen del sólido entre $x = 0$ y $x = 1$ es

$$V_1 = \int_0^1 4x\, dx = [2x^2]_0^1 = 2.$$

Entre $x = 1$ y $x = 3$, la sección transversal de coordenada x tiene por área

$$A(x) = (2y)^2 = 4y^2 = 2(3 - x) = 6 - 2x.$$

(Aquí lo que medimos es el área determinada por la segunda parábola $x = 3 - 2y^2$.) El volumen del sólido entre $x = 1$ y $x = 3$ es

$$V_2 = \int_1^3 (6 - 2x)dx = [6x - x^2]_1^3 = 4.$$

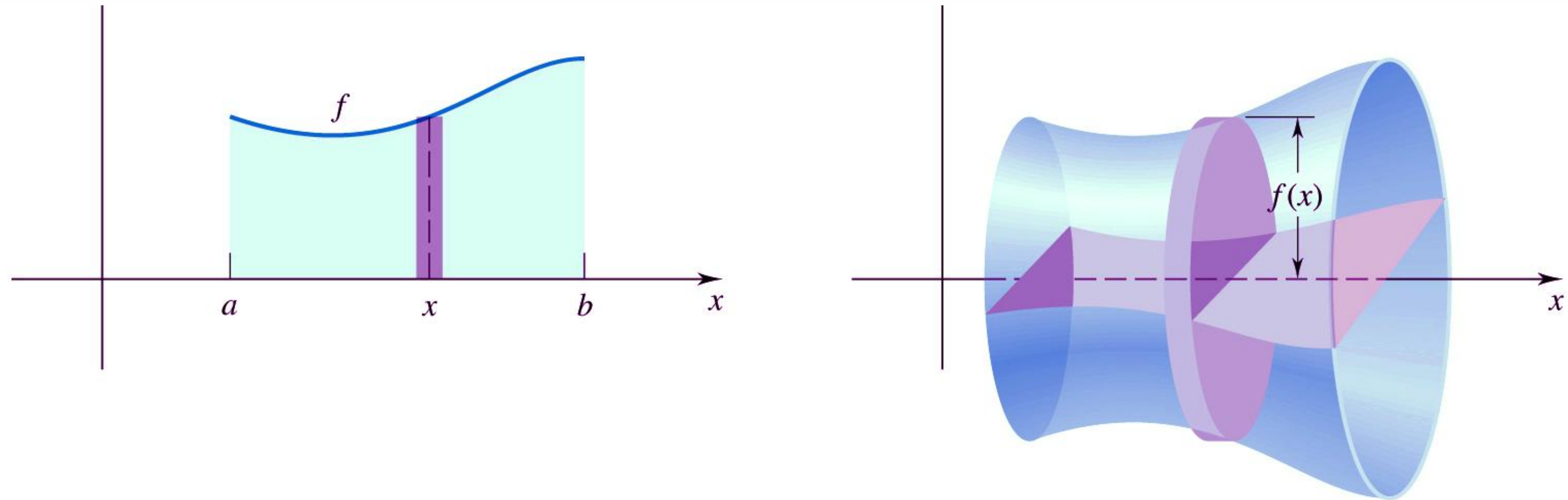
El volumen total es

$$V_1 + V_2 = 6.$$

Sólidos de revolución: método de los discos

Supongamos que f es no negativa y continua en $[a, b]$. (Ver figura 6.2.8.) Si giramos la región por debajo de la gráfica de f alrededor del eje x, obtenemos un sólido. El volumen de este sólido viene dado por la fórmula

$$\boxed{V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 \, dx.}$$

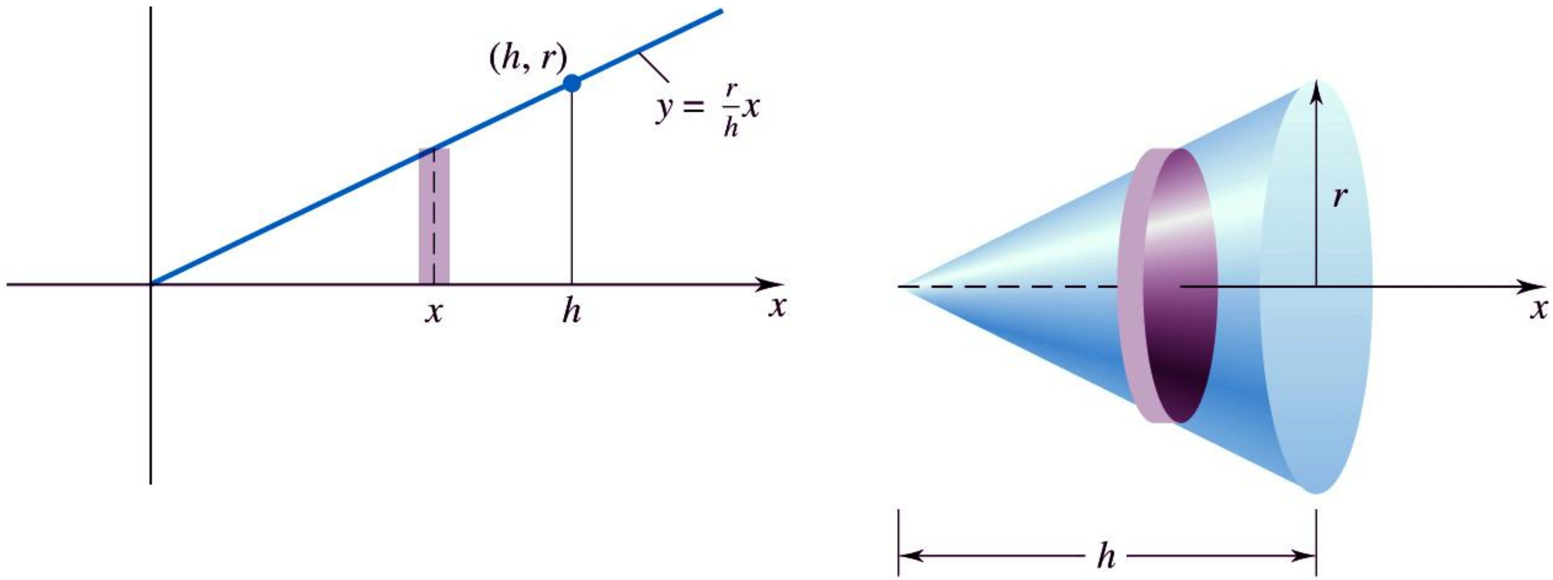


Demostración La sección transversal de coordenada x es un *disco* circular de radio $f(x)$. Luego el área de la sección transversal es $\pi\,[f(x)]^2$.

Entre los más sencillos sólidos de revolución tenemos el cono y la esfera.

Ejemplo 4 Podemos generar un cono cuyo radio de base sea r y cuya altura sea h haciendo girar alrededor del eje x la región debajo de la gráfica de

$$f(x) = \frac{r}{h}x, \qquad 0 \leq x \leq h.$$

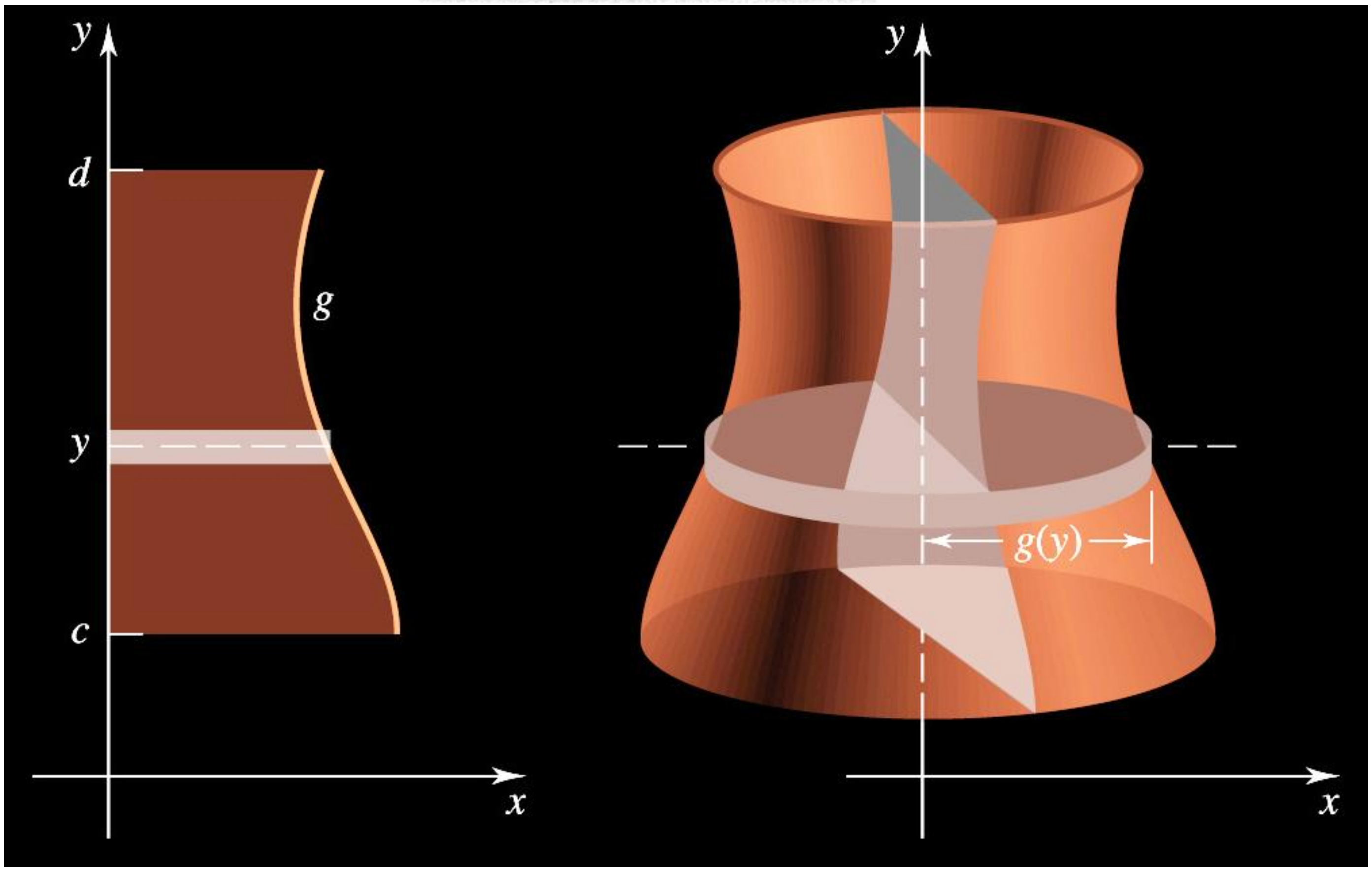


$$\text{volumen del cono} = \int_0^h \pi\left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\ dx$$

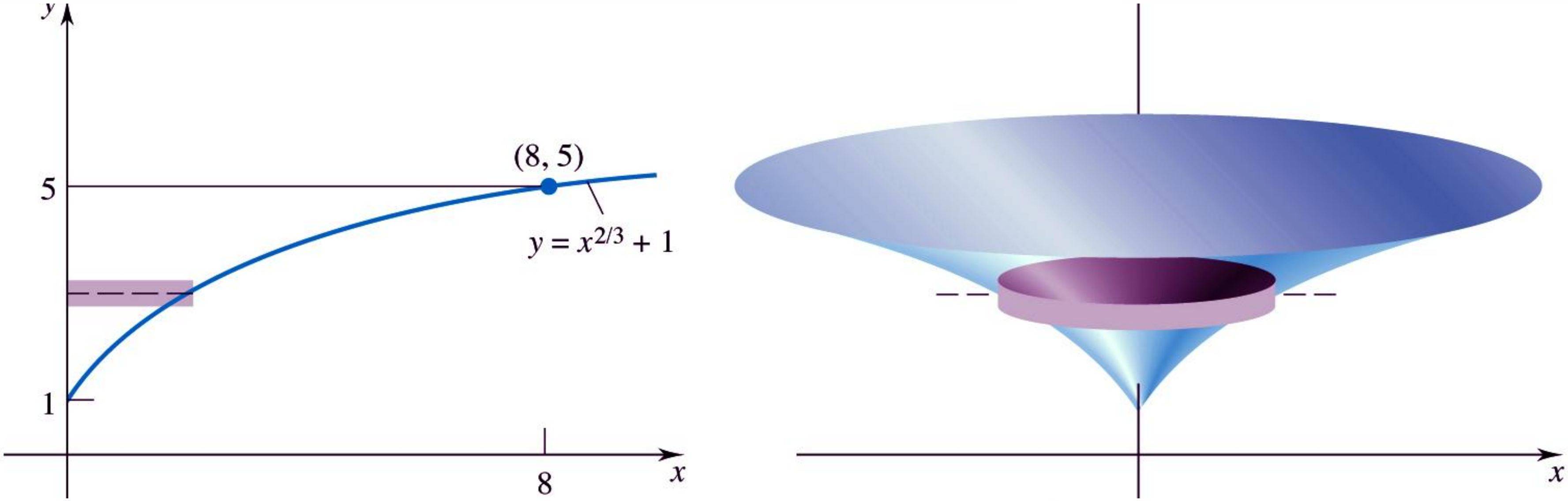
$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Supongamos que $x = g(y)$ es continua y no negativa para $c \leq y \leq d$ (ver figura 6.2.10). Si rotamos la región limitada por la gráfica de g y el eje y alrededor de este último, obtenemos un sólido tal que cada sección transversal perpendicular al eje y es un disco de área $A(y) = \pi[g(y)]^2$. Por tanto el volumen de este sólido viene dado por

$$V = \int_c^d \pi[g(y)]^2\, dy.$$



Ejemplo 6 Hallar el volumen del sólido generado por revolución de la región limitada por $y = x^{2/3} + 1,\ 0 \le x \le 8$, alrededor del eje y.



Solución Ver la figura 6.2.11. Primero resolvemos $y = x^{2/3} + 1,\ 0 \le x \le 8$, expresando x como una función de y:

$$x^{2/3} = y - 1$$

$$x = (y-1)^{3/2}, \quad 1 \le y \le 5.$$

$$V = \int_1^5 \pi[g(y)]^2\, dy = \pi\int_1^5 [(y-1)^{3/2}]^2\, dy$$

$$= \pi\int_1^5 (y-1)^3\, dy = \pi\left[\frac{(y-1)^4}{4}\right]_1^5 = 64\pi.$$

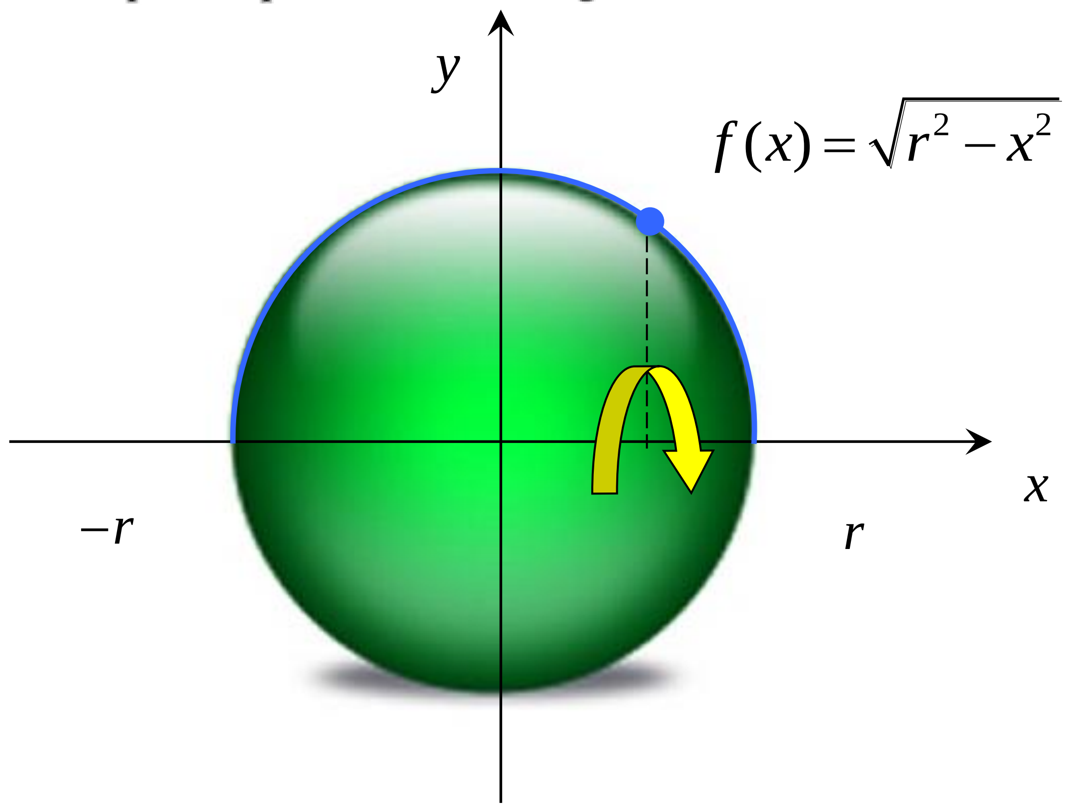
Ejemplo 5 Una esfera de radio r puede obtenerse girando alrededor del eje x la región comprendida debajo de la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad -r \leq x \leq r. \qquad \text{(dibujar una figura)}$$

Luego

$$\text{volumen de la esfera} = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Este resultado fue obtenido por Arquímedes en el siglo tercero a.C.



Arquímedes (c. 287 – 212 a. C. ~ 75 años, Siracusa, Sicilia)

- En aquel tiempo Siracusa, situada en la isla de Sicilia, era una ciudad-estado Griega independiente con una historia de 500 años.

- Estudió probablemente en Alejandría, Egipto, bajo los seguidores de Euclides; su padre fué un astrónomo de nombre Fidias quizá emparentado con el rey Hierón II de Siracusa. No se se sabe si era casado o haya tenido hijos.

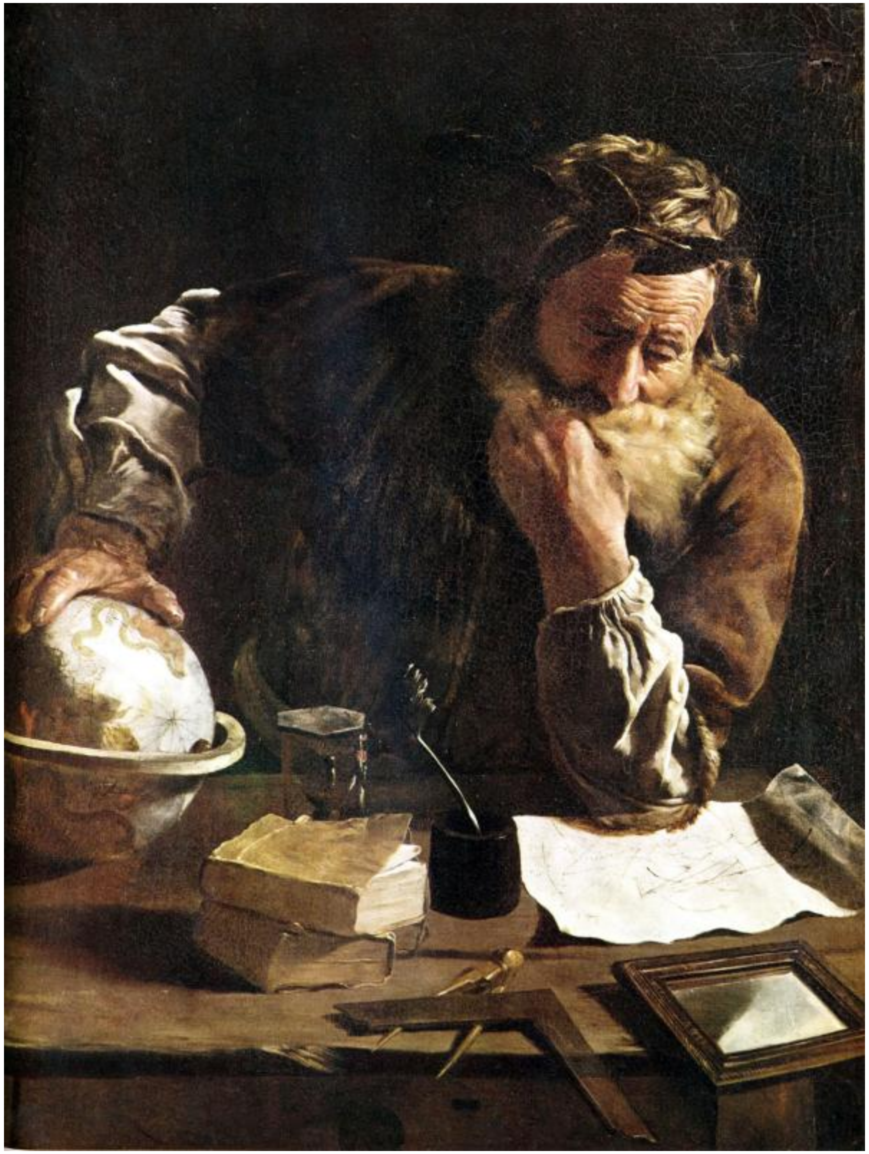
- En la ciencia inició la hidrostática, la mecánica estática y la medición del volumen o densidad de un objeto; se le reconoce como el primer geómetra en tratar problemas de cálculo integral y de física-matemática.

<u>Arquímedes (c. 287 – 212 a. C. Siracusa, Sicilia :: ~ 75 años)</u>

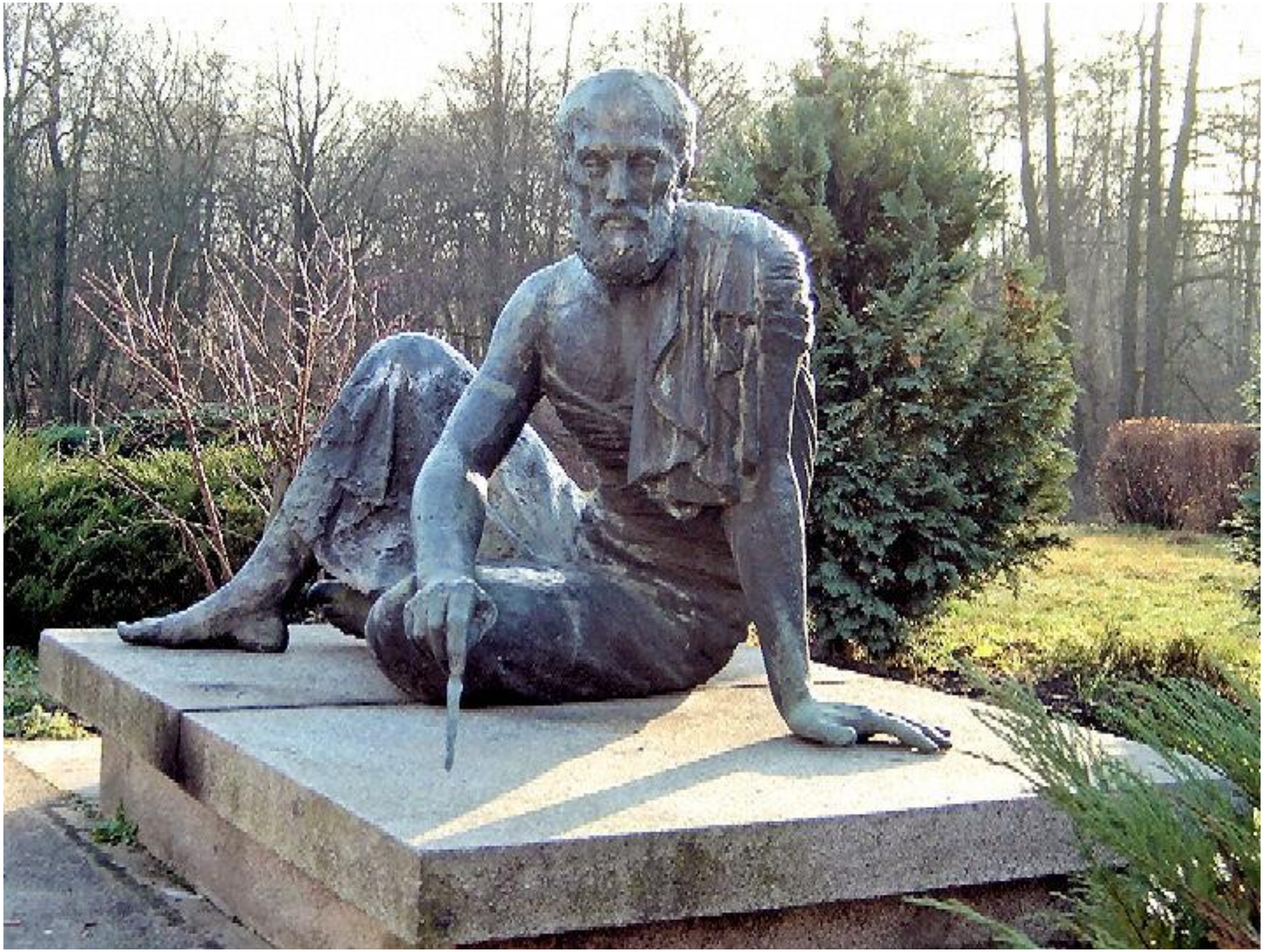
- Inventó diversas máquinas de guerra para la defensa de Siracusa, como sistemas de poleas compuestas, garras o espolones mecánicos y espejos incendiarios (poco probable); otras invenciones prácticas fueron el planetario y un tornillo para subir agua.

- Principales obras: *Sobre el Equilibrio de Planos*, *Cuadratura de la Parábola*, *Sobre la Esfera y el Cilindro*, *Sobre Espirales*, *Sobre Conoides y Esferoides*, *Sobre los Cuerpos Flotantes*, *La Medida de un Círculo*, *El Contador de Arena* y el *Método de Problemas Mecánicos*.

- Murió en Siracusa cuando fué asaltada y saqueada por el ejército Romano; fue muerto por una soldado romano que no sabía quien era. Marcelo, el general Romano que dirigió el asedio sintió su muerte y le mando enterrar con honores.



“Arquímedes Pensativo” por Fetti (1620)



Estatua de bronce de Arquímedes en el *Observatorio Archenhold* en Berlín, esculpida por Gerhard Thieme y develada en 1972.

Busto de mármol de Arquímedes por el escultor siciliano Luciano Campisi (1859-1933). Se encuentra en *Latomia dei Capuccini, Siracusa* (Italia).

Un *grabado* de la muerte de Arquímedes, copia de una pintura
del pintor francés Gustave Courtois (1853-1923).

Una ilustración moderna de la muerte de Arquímedes en una hoja de papiro del *Centro del Papiro* en Siracusa, Sicilia.

“Y aunque el realizó mucho descubrimientos excelentes, se dice que pidió a sus parientes y amigos colocar sobre la tumba en la que fuera enterrado, un cilindro encerrando una esfera con una inscripción que mostrara la proporción por la cual el sólido exterior excede al contenido.”

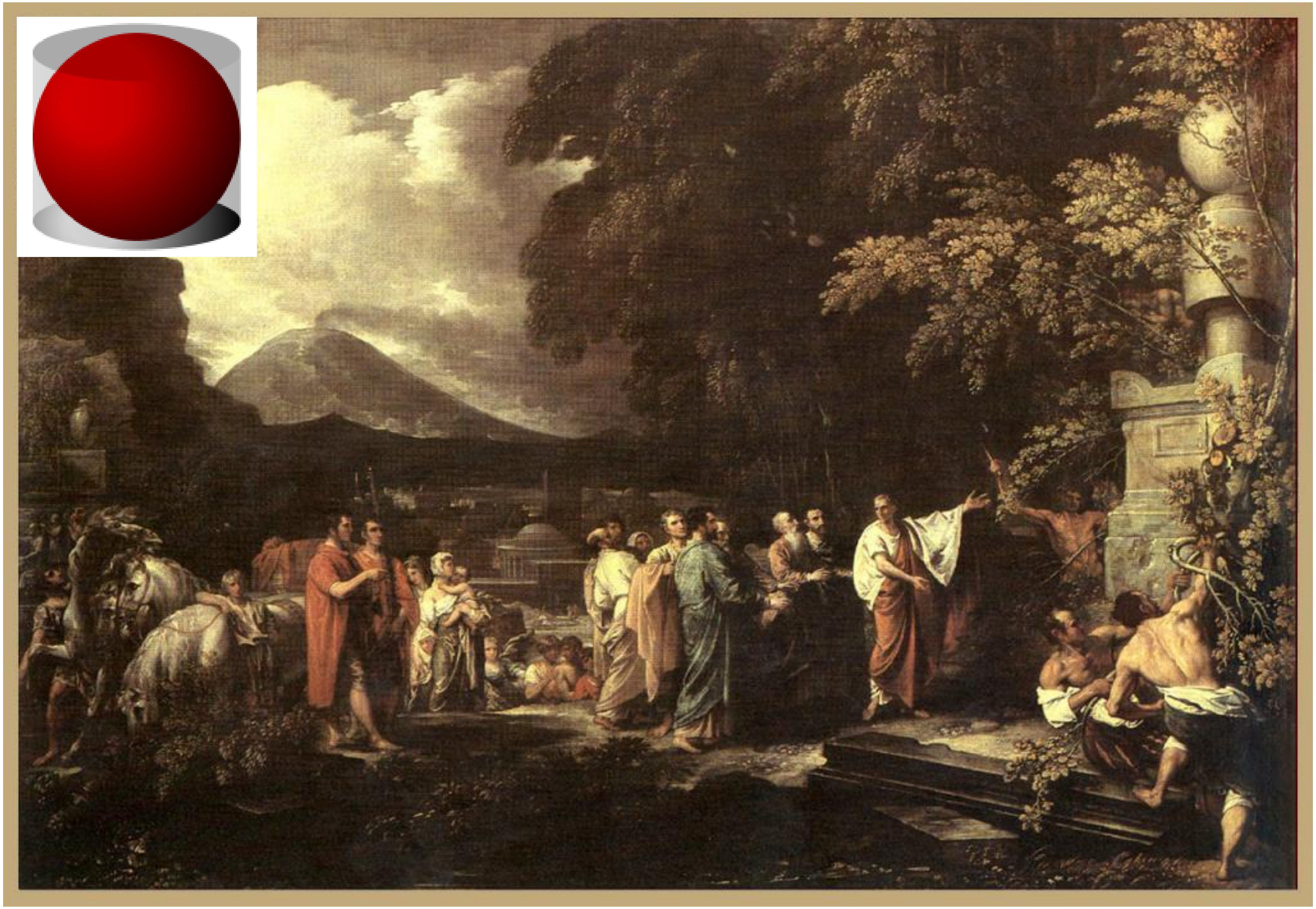
Citado de Plutarco (d.C. 45 - 120 ~ 75 años) en *Vidas Paralelas: Marcelo*

En su trabajo *Sobre La Esfera y el Cilindro*, Arquímedes demostró que la razón del volumen de una esfera al volumen del cilindro que la contiene es 2:3. En el mismo trabajo también probó que la razón del área de la superficie de una esfera al área de la superficie del cilindro que la contiene, junto con sus círculos extremos, es la misma 2:3. Ya que las expresiones para el volumen y el área de la superficie de un cilindro eran conocidas antes de su tiempo, los resultados de Arquímedes establecieron las primeras expresiones exactas para el volumen y la superficie de una esfera.

La *E*sfera inscrita en un *C*ilindro
y las proporciones entre sus
volúmenes V y sus superficies S

$$\frac{V(E)}{V(C)} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(\pi r^2)(2r)} = \frac{4\pi r^3}{6\pi r^3} = \frac{4}{6} \quad \Rightarrow \quad \nu_{EC} = \frac{2}{3}$$

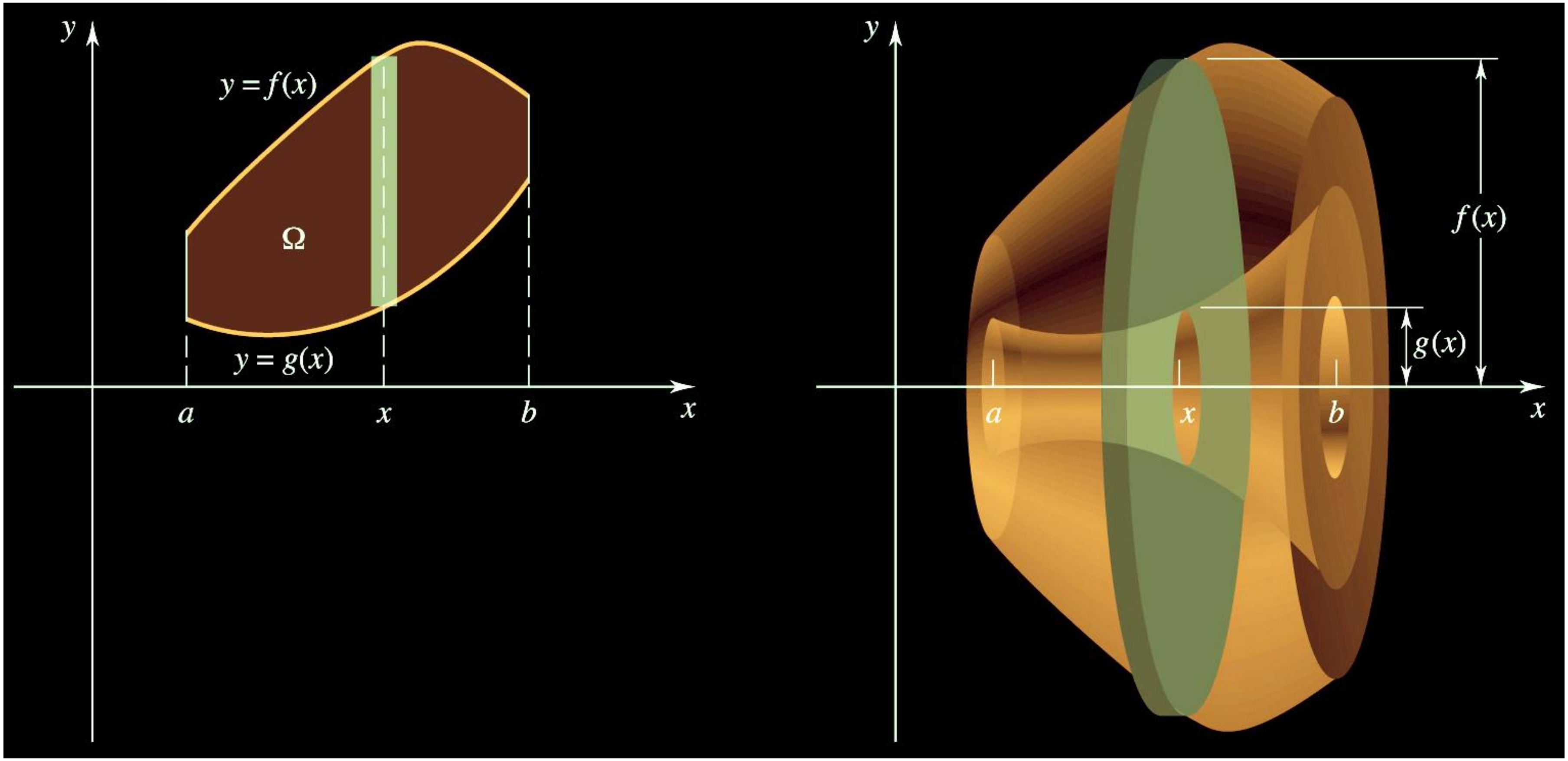
$$\frac{S(E)}{S(C)} = \frac{4\pi r^2}{(2\pi r)(2r) + 2(\pi r^2)} = \frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} = \frac{4}{6} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{EC} = \frac{2}{3}$$



Pintura al óleo “Cicerón descubriendo la tumba de Arquímedes” por el pintor americano Benjamin West (1738-1820), pintada en 1797.

Sólidos de revolución: método de las arandelas

El método de las arandelas constituye una ligera generalización del método de los discos. Supongamos que f y g son dos funciones continuas no negativas tales que $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$. (Véase la figura 6.2.12.) Si hacemos girar la región Ω alrededor del eje x obtenemos un sólido.



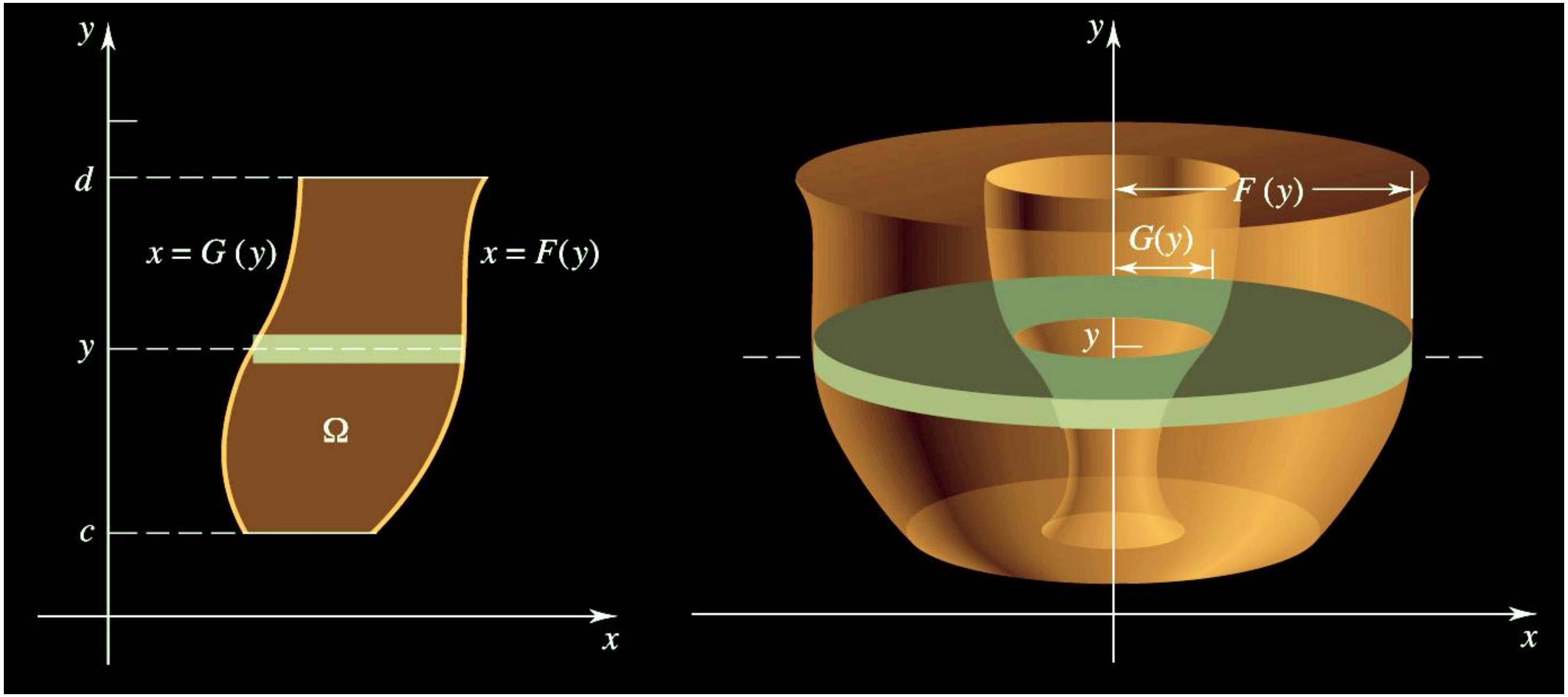
Demostración La sección transversal de coordenada x es una *arandela* de radio exterior $f(x)$, radio interior $g(x)$ y área igual a

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2 = \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2).$$

Podemos obtener el volumen del sólido integrando esta función desde a hasta b.

$$\boxed{V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx.}$$

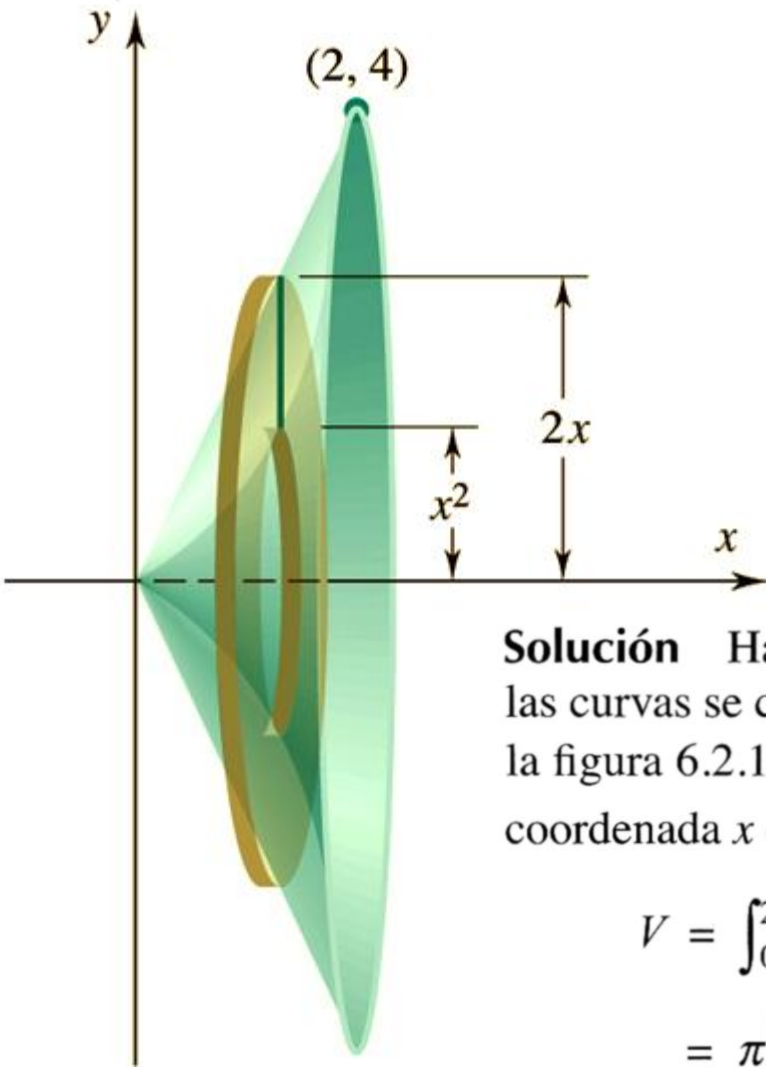
(método de las arandelas respecto del eje x)



Supongamos ahora que las fronteras son funciones de y en lugar de x. (Ver la figura 6.2.13.) Haciendo girar Ω *alrededor del eje y*, obtenemos un sólido de revolución. Resulta claro, según (6.2.4), que

$$\boxed{V = \int_c^d \pi([F(y)]^2 - [G(y)]^2)\, dy.} \qquad \text{(método de las arandelas respecto del eje } y\text{)}$$

Ejemplo 7 Hallar el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región comprendida entre $y = x^2$ e $y = 2x$ alrededor del eje x.

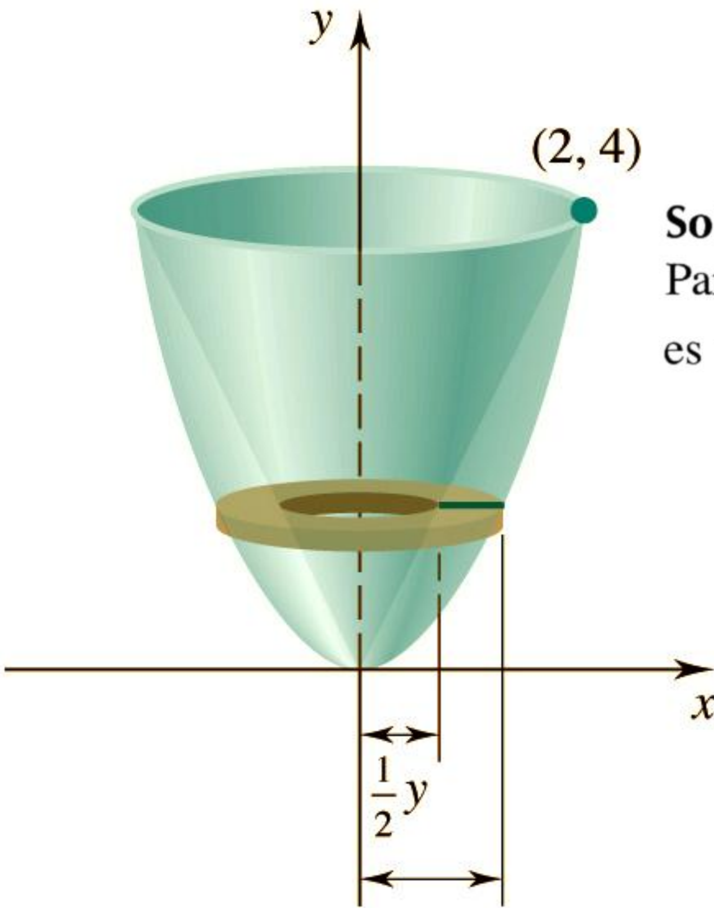


Solución Haciendo $x^2 = 2x$, obtenemos $x = 0, 2$. Por tanto, las curvas se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$. Fijémonos en la figura 6.2.14. Para cada x entre 0 y 2, la sección transversal de coordenada x es una arandela de radio exterior $2x$ y radio interior x^2.

$$V = \int_0^2 \pi[(2x)^2 - (x^2)^2]\ dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - x^4)\ dx$$

$$= \pi\left[\tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \tfrac{64}{15}\pi.$$

Ejemplo 8 Hallar el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región comprendida entre $y = x^2$ e $y = 2x$ alrededor del eje y.



Solución El sólido está representado en la figura 6.2.15. Para cada y entre 0 y 4, la sección transversal de ordenada y es una arandela de radio exterior $\sqrt{y}$ y de radio interior $\frac{1}{2}y$.

$$V = \int_0^4 \pi[(\sqrt{y})^2 - (\tfrac{1}{2}y)^2]\, dy = \pi\int_0^4 (y - \tfrac{1}{4}y^2)\, dy$$

$$= \pi[\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{12}y^3]_0^4 = \tfrac{8}{3}\pi.$$

Observación Estos dos últimos problemas tienen que ver con los sólidos generados al hacer girar una misma región en torno a dos ejes *distintos*. Obsérvese que los sólidos son distintos y tienen volúmenes distintos.

Ejercicios sugeridos, Sección 6.2

Prácticos: 8, 12, 15, 27, 29, 35

Teóricos: 37, 40, 46, 48