Aplicaciones de la Integral 6

Sección 6.3

Cálculo de volúmenes por el método de capas

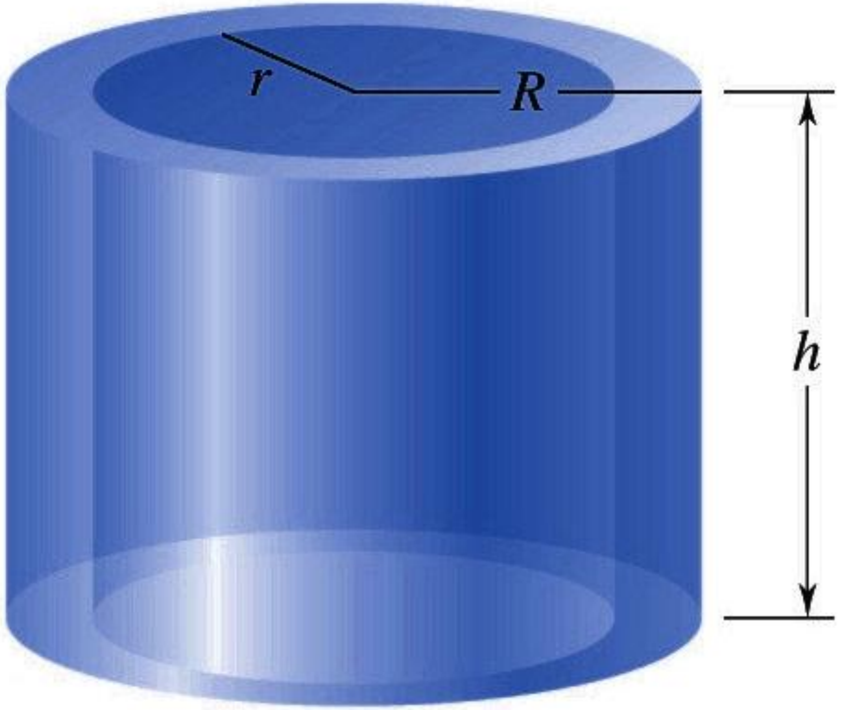
Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

6.3 CÁLCULO DE VOLÚMENES POR EL MÉTODO DE LAS CAPAS

Para describir el método de las capas para el cálculo de volúmenes, empezaremos considerando un cilindro de radio R y altura h del cual se extrae un cilindro interior de radio r (figura 6.3.1).

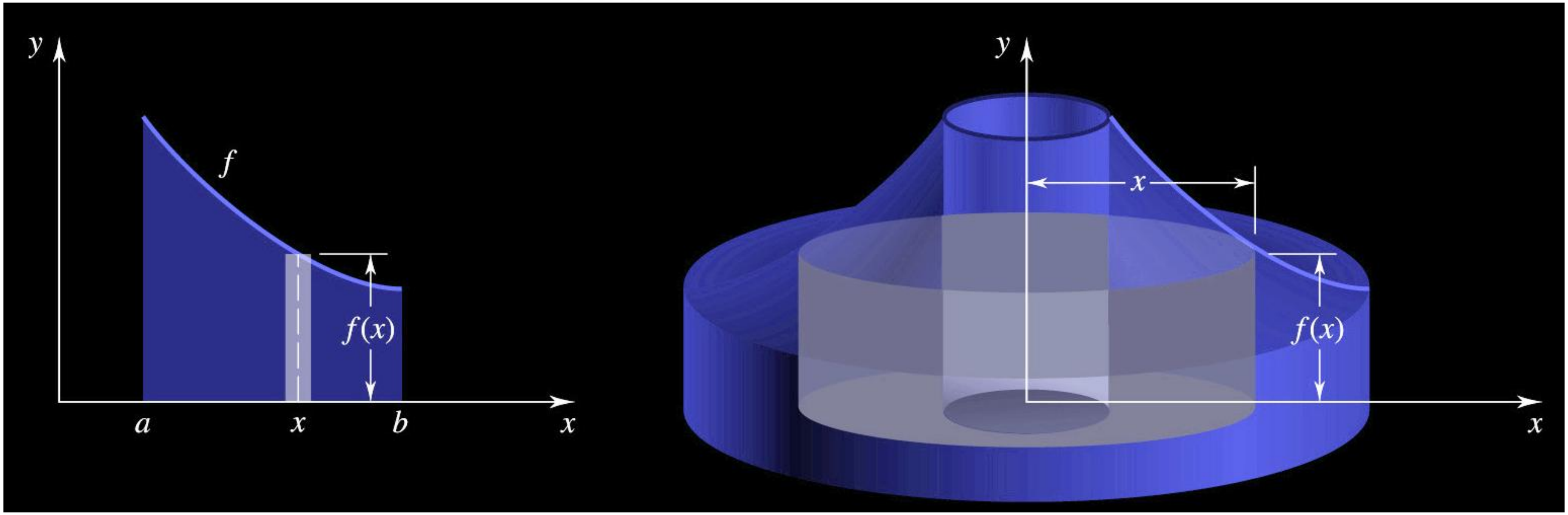
Dado que el cilindro de partida tiene un volumen igual a $\pi R^2 h$ y que la parte extraída tiene un volumen igual a $\pi r^2 h$, la capa cilíndrica restante tiene un volumen igual a

$$\boxed{\pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R+r)(R-r).}$$

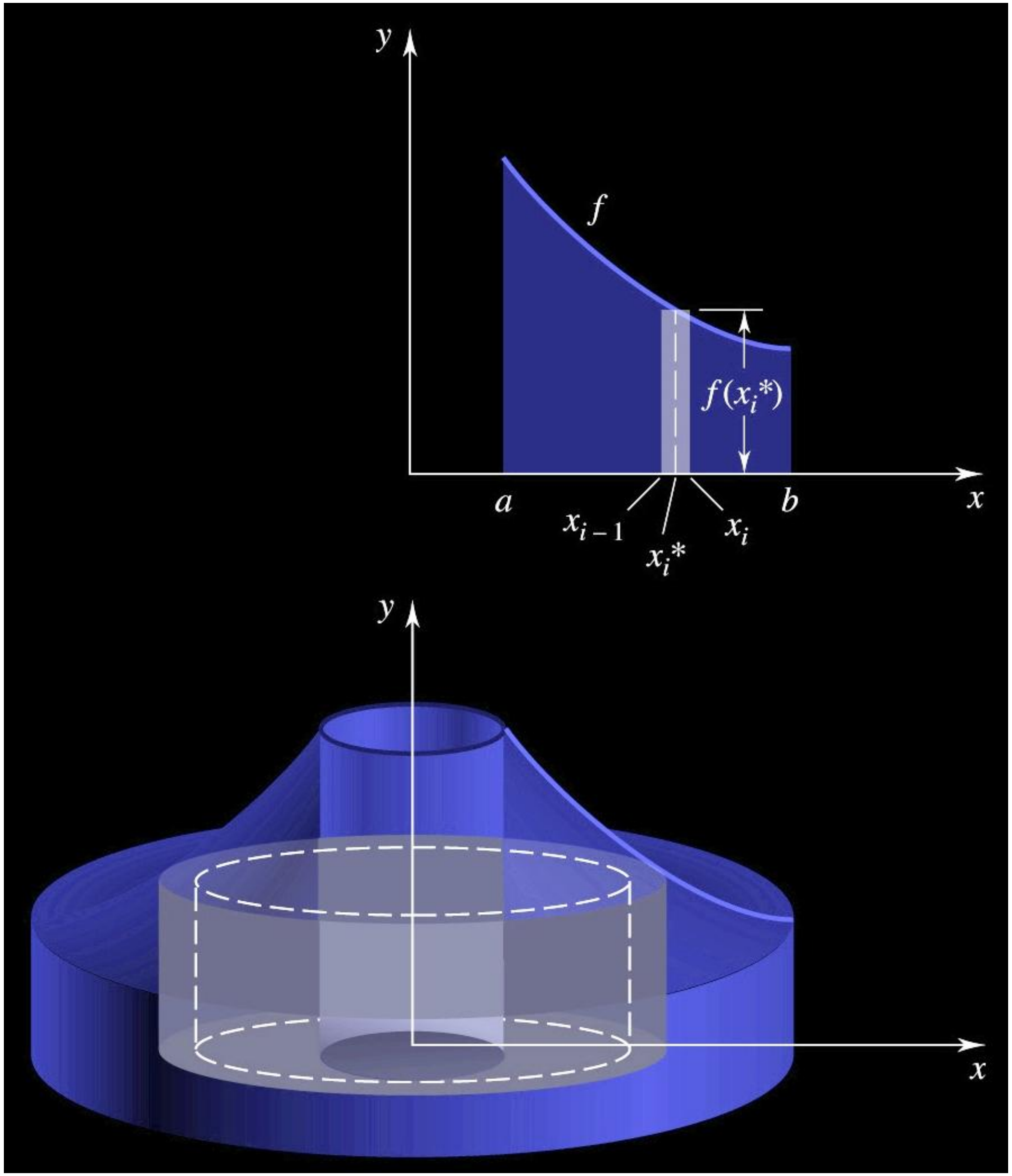


Consideremos ahora una función f, no negativa y continua en un intervalo $[a, b]$ que no contenga el origen en su interior. Por conveniencia, supondremos que $a \geq 0$. Si la región debajo de la gráfica gira alrededor del eje y, genera un sólido T (figura 6.3.2). El volumen de este sólido viene dado por *la fórmula del método de las capas*:

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx.}$$



Cuando la región debajo de la gráfica de f gira alrededor del eje y, el segmento de recta situado a x unidades a partir del eje y engendra un cilindro de radio x, altura $f(x)$ y área lateral igual a $2\pi x f(x)$. La fórmula del método de las capas expresa el volumen de un sólido de revolución como la integral definida de a a b de las áreas laterales de estos cilindros.



y
f
$f(x_i^*)$
a
x_{i-1}
x_i^*
x_i
b
x
y
x

Demostración Consideremos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ y fijémonos en lo que ocurre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Recordemos que para formar una suma de Riemann podemos escoger como x_i^* cualquier punto de $[x_{i-1}, x_i]$. Por conveniencia tomamos x_i^* como el punto intermedio $\frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. El rectángulo representativo de altura $f(x_i^*)$ y base Δx_i (ver figura 6.3.2) genera una capa cilíndrica de altura $h = f(x_i^*)$, radio interior $r = x_{i-1}$ y radio exterior $R = x_i$. Podemos utilizar (6.3.1) para calcular el volumen de esta capa. Dado que

$$h = f(x_i^*) \qquad \text{y} \qquad R + r = x_i + x_{i-1} = 2x_i^* \qquad \text{y} \qquad R - r = \Delta x_i,$$

el volumen de esta capa es

$$\pi h(R + r)(R - r) = 2\pi x_i^* f(x_i^*)\ \Delta x_i.$$

El volumen del sólido puede aproximarse sumando los volúmenes de estas capas:

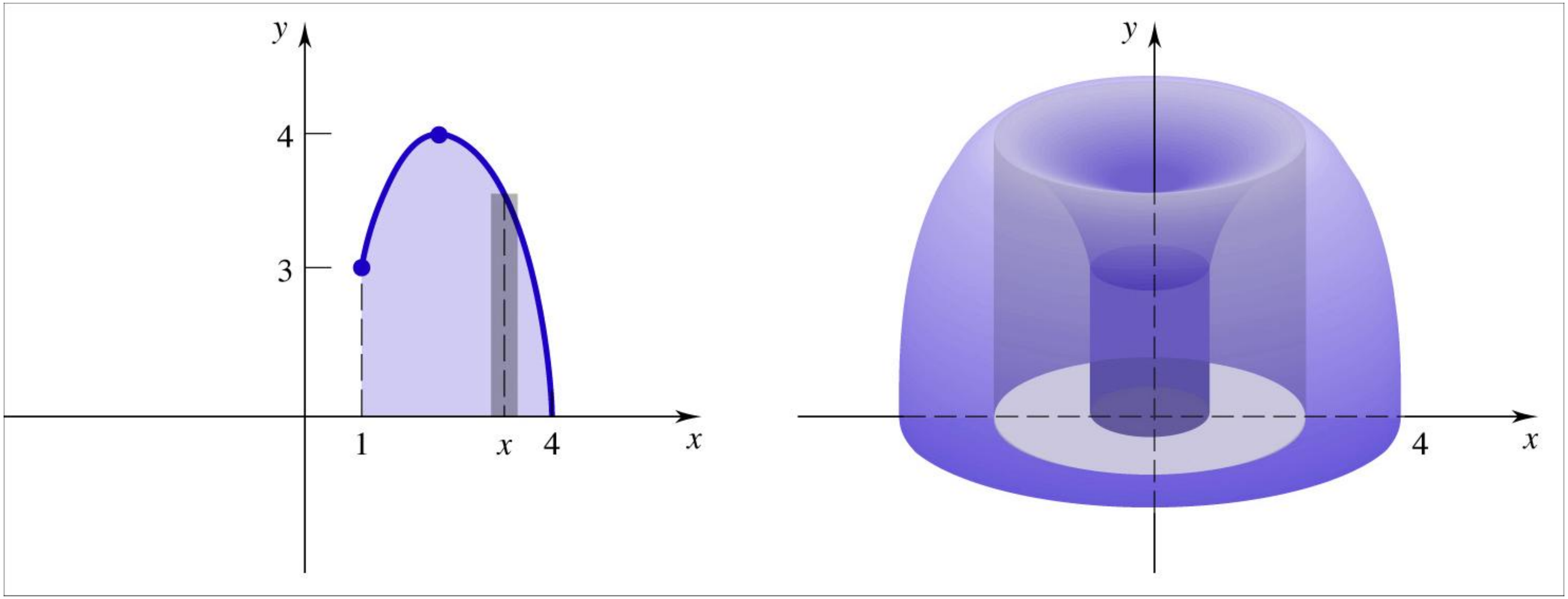
$$V \cong 2\pi x_1^* f(x_1^*)\ \Delta x_1 + 2\pi x_2^* f(x_2^*)\ \Delta x_2 + \cdots + 2\pi x_n^* f(x_n^*)\ \Delta x_n.$$

La suma de la derecha es una suma de Riemann que converge a

$$\boxed{\int_a^b 2\pi x f(x)\ dx}$$

cuando $\|P\| \to 0$.

Ejemplo 1 La región limitada por $f(x) = 4x - x^2$ y el eje x entre $x = 1$ y $x = 4$ se rota alrededor del eje y. Hallar el volumen del sólido que se genera.



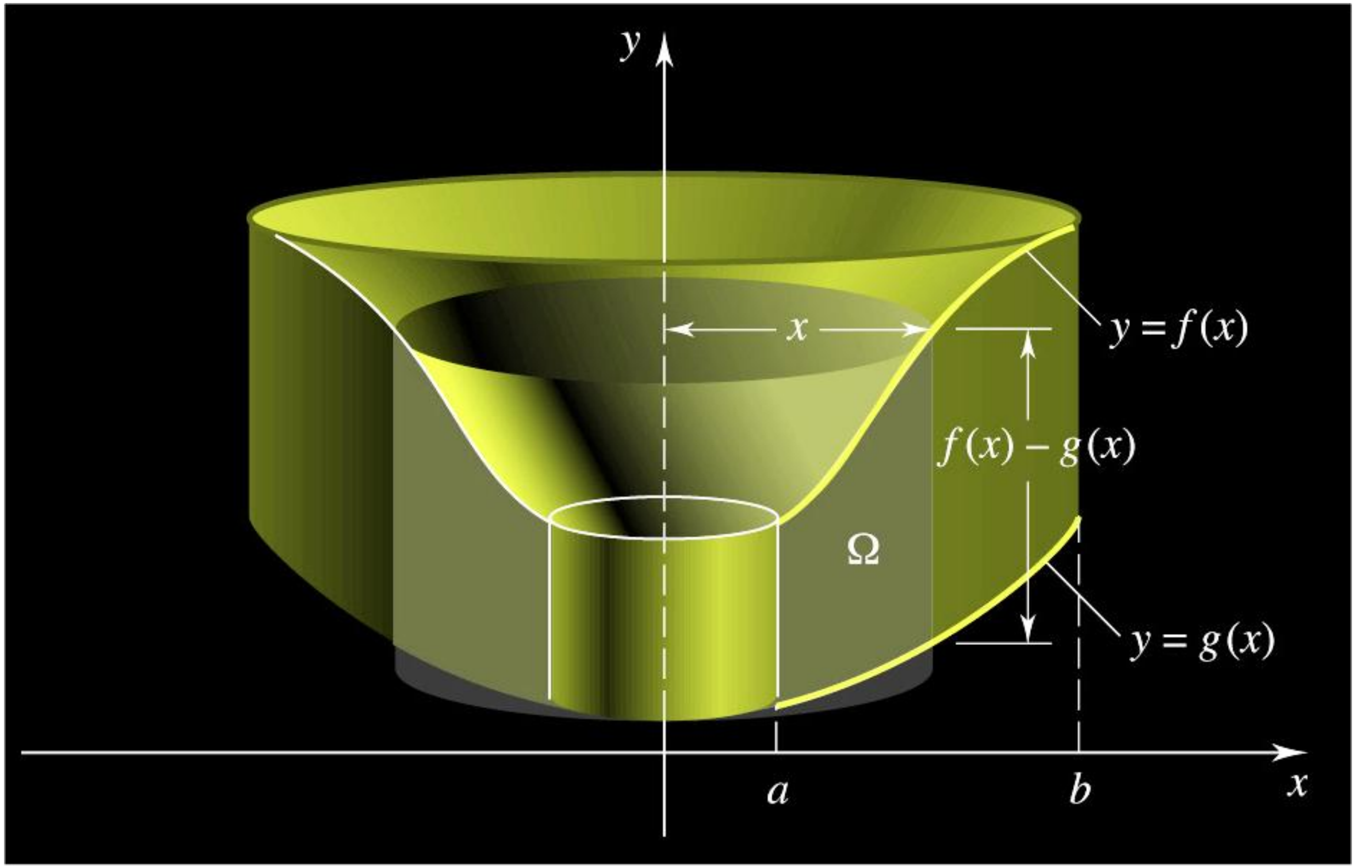
Solución Ver la figura 6.3.4. El segmento de recta a x unidades del eje y, $1 \le x \le 4$, genera un cilindro de radio x, altura $f(x)$ y área lateral $2\pi x f(x)$. Luego, por (6.3.2),

$$V = \int_1^4 2\pi x(4x - x^2)\ dx = 2\pi\int_1^4 (4x^2 - x^3)\ dx = 2\pi\left[\tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_1^4$$
$$= 2\pi\left[\tfrac{256}{3} - 64\right] - 2\pi\left[\tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{4}\right] = \tfrac{81}{2}\pi.$$

La fórmula del método de las capas es susceptible de ser generalizada. Con Ω como en la figura 6.3.5, el volumen engendrado haciendo girar Ω alrededor del eje y viene dado por la fórmula

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\, dx.} \qquad \text{(método de las capas respecto del eje } y\text{)}$$

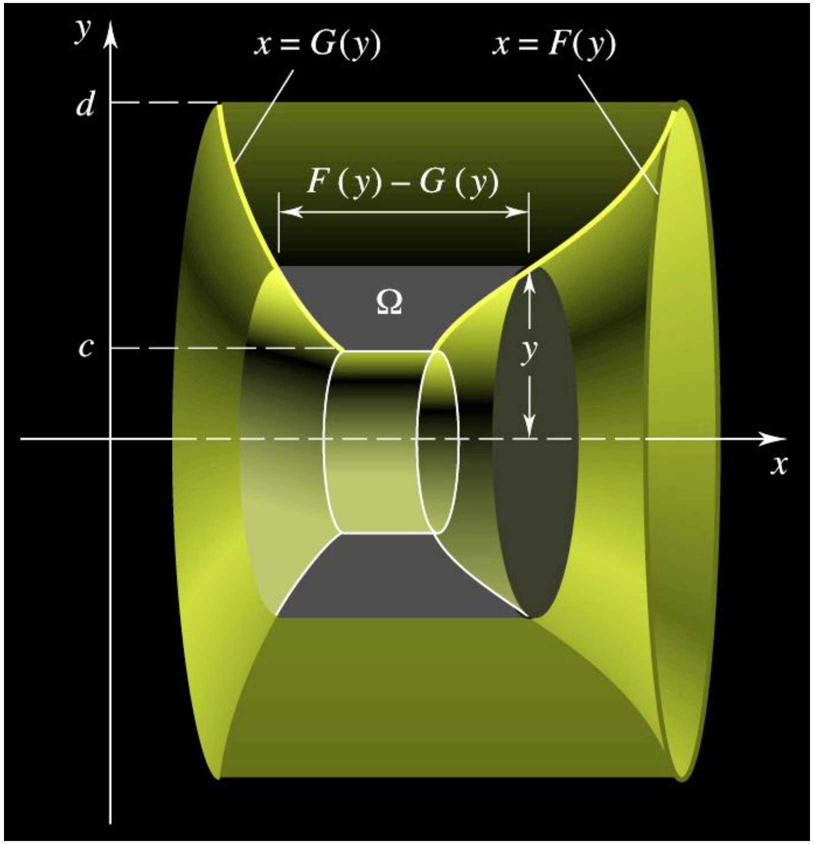
El integrando $2\pi x\,[f(x) - g(x)]$ es el área lateral del cilindro de la figura 6.3.5.



También podemos aplicar el método de las capas a sólidos engendrados al hacer girar una región alrededor del eje x. Véase la figura 6.3.6. En este caso, las fronteras curvas son funciones de y en lugar de x. Tenemos

$$\boxed{V = \int_c^d 2\pi y[F(y) - G(y)]\,dy.} \qquad \text{(método de las capas respecto del eje } x\text{)}$$

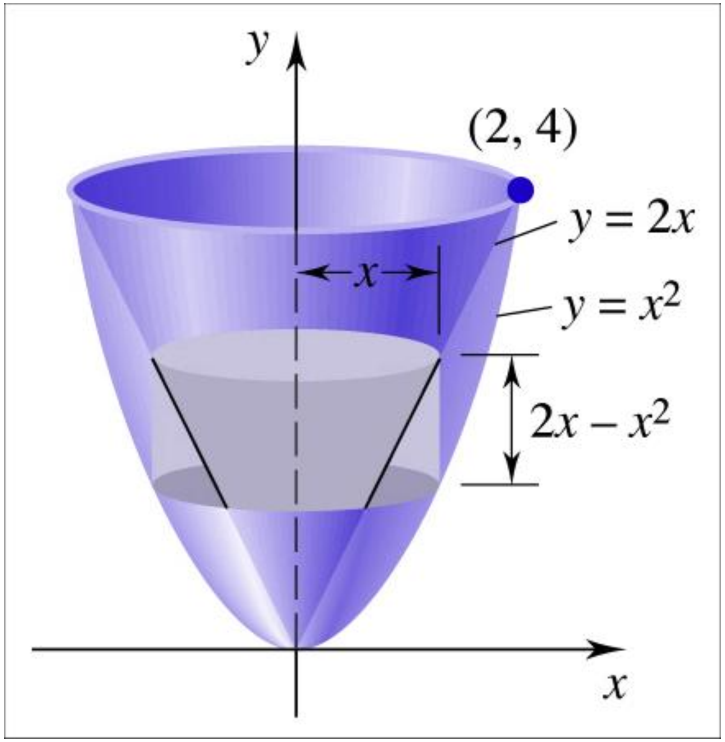
El integrando $2\pi x\,[F(y) - G(y)]$ es el área lateral del cilindro de la figura 6.3.6.



Ejemplo 2 Hallar el volumen generado al girar la región comprendida entre

$$y = x^2 \qquad \text{e} \qquad y = 2x$$

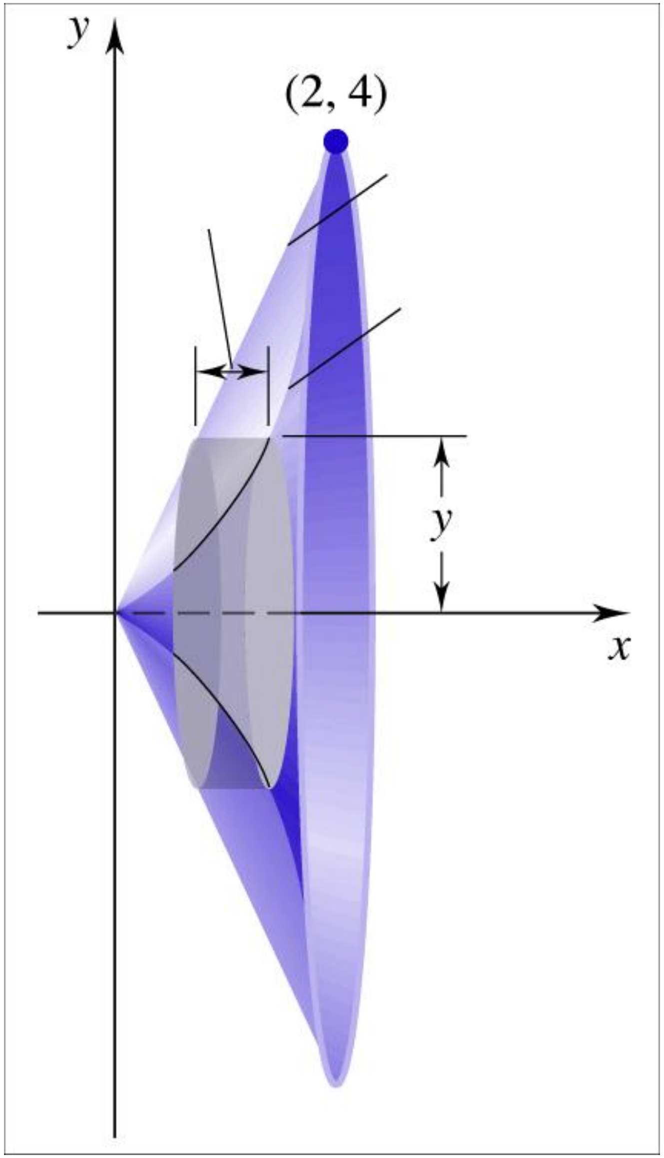
alrededor del eje y.



Solución Nos referimos a la figura 6.3.7. Para cada x entre 0 y 2, el segmento de recta situado a x unidades a partir del eje y engendra un cilindro de radio x, altura $(2x - x^2)$ y área lateral $2\pi x(2x - x^2)$. Por (6.3.3) tenemos

$$V = \int_0^2 2\pi x(2x - x^2)\ dx = 2\pi\int_0^2 (2x^2 - x^3)\ dx = 2\pi\left[\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \tfrac{8}{3}\pi.$$

Ejemplo 3 Hallar el volumen del sólido engendrado al girar la región entre



$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = 2x \quad \text{alrededor del eje } x.$$

Solución Empezaremos por expresar estas fronteras en función de y. Podemos escribir $x = \sqrt{y}$ para la frontera de la derecha y $x = \frac{1}{2}y$ para la frontera izquierda (ver figura 6.3.8). La capa de radio y tiene por altura $(\sqrt{y} - \frac{1}{2}y)$. Luego, por (6.3.4), tenemos que

$$V = \int_0^4 2\pi y(\sqrt{y} - \tfrac{1}{2}y)\,dy$$

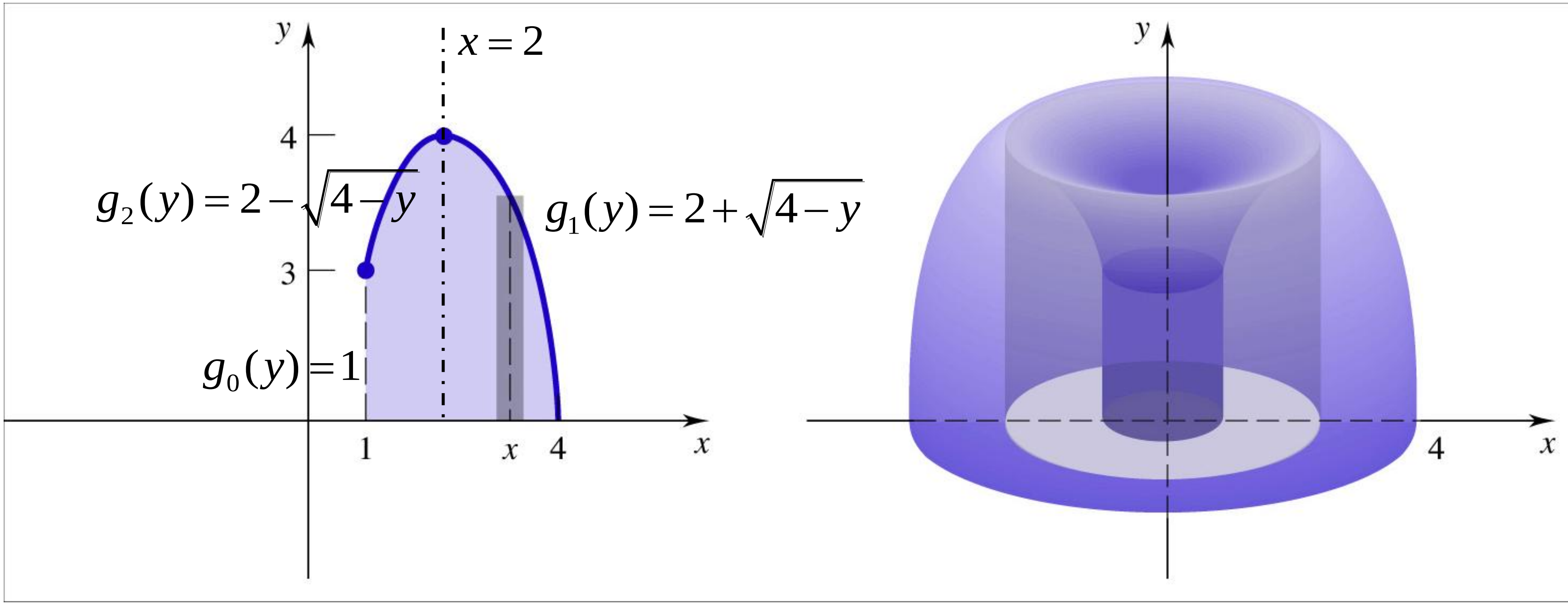
$$= \pi \int_0^4 (2y^{3/2} - y^2)\,dy$$

$$= \pi\left[\tfrac{4}{5}y^{5/2} - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^4 = \tfrac{64}{15}\pi.$$

Observación En la sección 6.2 hemos calculado el volumen de estos sólidos (y obtuvimos los mismos resultados) por el método de las arandelas. De estos ejemplos surge una cuestión obvia: ¿cuál de los tres métodos —de discos, de arandelas o de capas— debe utilizarse para resolver un problema particular? Como es de suponer, el "mejor" método depende del problema. Dado que un disco es un caso especial de una arandela, habrá que decidir entre el método de las capas o el de las arandelas. Para los sólidos de los ejemplos 2 y 3, estos métodos son esencialmente equivalentes. Por otro lado, si intentamos calcular el volumen del sólido del ejemplo 1 por el método de las arandelas, éste nos conducirá a la expresión

$$V = \int_0^3 (\pi[g_1(y)]^2 - \pi[1]^2)\ dy + \int_3^4 (\pi[g_1(y)]^2 - \pi[g_2(y)]^2)\ dy, \quad \text{(ver figura 6.3.4)}$$

donde $x = g_1(y)$ y $x = g_2(y)$ son las funciones obtenidas al resolver $y = 4x - x^2$ en x. Pese a que las dos funciones g_1 y g_2 pueden determinarse y las integrales calcularse, hacerlo no es trivial. ¡Inténtese! En general, podría no ser posible resolver una ecuación $y = f(x)$ en x o una ecuación $x = g(y)$ en y. La elección del método que se debe aplicar a un problema particular dependerá de la región que se está rotando, del eje de revolución y de la flexibilidad que tengamos para expresar las funciones implicadas en función de x o de y, según sea necesario.



Despejamos x en función de y para obtener las funciones $g_1(y)$ y $g_2(y)$ que corresponden a la rama derecha e izquierda de la parábola respecto de la recta vertical $x = 2$

$$y = 4x - x^2 = -x^2 + 4x \Rightarrow -y = x^2 - 4x \Rightarrow 4 - y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{4-y}$$

$$\therefore\ g_{12}(y) = x = 2 \pm \sqrt{4-y} \Rightarrow g_1(y) = 2 + \sqrt{4-y}\ \forall y \in [0,4] \wedge g_2(y) = 2 - \sqrt{4-y}\ \forall y \in [3,4]$$

Además el segmento vertical que une los puntos (1,0) y (1,3) corresponde a la función constante $g_0(y) = 1 = x$ al integrar con respecto a y que satisface la desigualdad

$$g_0(y) \le g_1(y)\ \forall y \in [0,3] \quad \text{además,} \quad g_2(y) \le g_1(y)\ \forall y \in [3,4]$$

$$V = \int_0^3 [\pi g_1^2(y) - \pi g_0^2(y)]dy + \int_3^4 [\pi g_1^2(y) - \pi g_2^2(y)]dy$$

$$= \pi \quad \int_0^3 [g_1^2(y) - g_0^2(y)]dy + \int_3^4 [g_1^2(y) - g_2^2(y)]dy \quad = \pi(V_{10} + V_{12})$$

$$\Rightarrow V_{10} = \int_0^3 [g_1^2(y) - g_0^2(y)]dy = \int_0^3 [(2+\sqrt{4-y})^2 - 1]dy \quad = \int_0^3 (7 + 4\sqrt{4-y} - y)dy$$

$$= \int_0^3 (7-y)dy + 4\int_0^3 \sqrt{4-y}\,dy = \int_0^3 (7-y)dy + 4\int_1^4 \sqrt{v}\,dv = \left[7y - \frac{y^2}{2}\right]_0^3 + \frac{8}{3}\left[v\sqrt{v}\right]_1^4$$

$$= \left(21 - \frac{9}{2}\right) + \frac{8}{3} \quad 4\sqrt{4} - 1 \quad = \frac{33}{2} + \frac{56}{3} = \frac{99}{6} + \frac{112}{6} = \frac{211}{6}$$

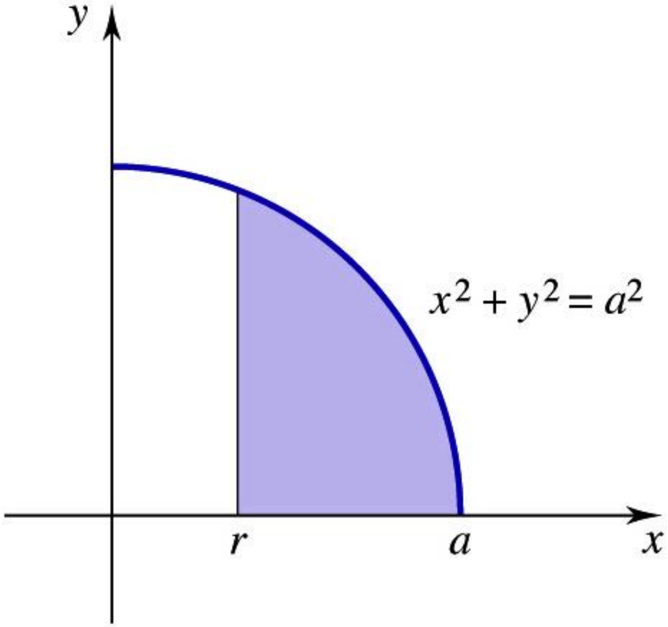
$$\Rightarrow V_{12} = \int_3^4 [g_1^2(y) - g_2^2(y)]dy = \int_3^4 [(2+\sqrt{4-y})^2 - (2-\sqrt{4-y})^2]dy$$

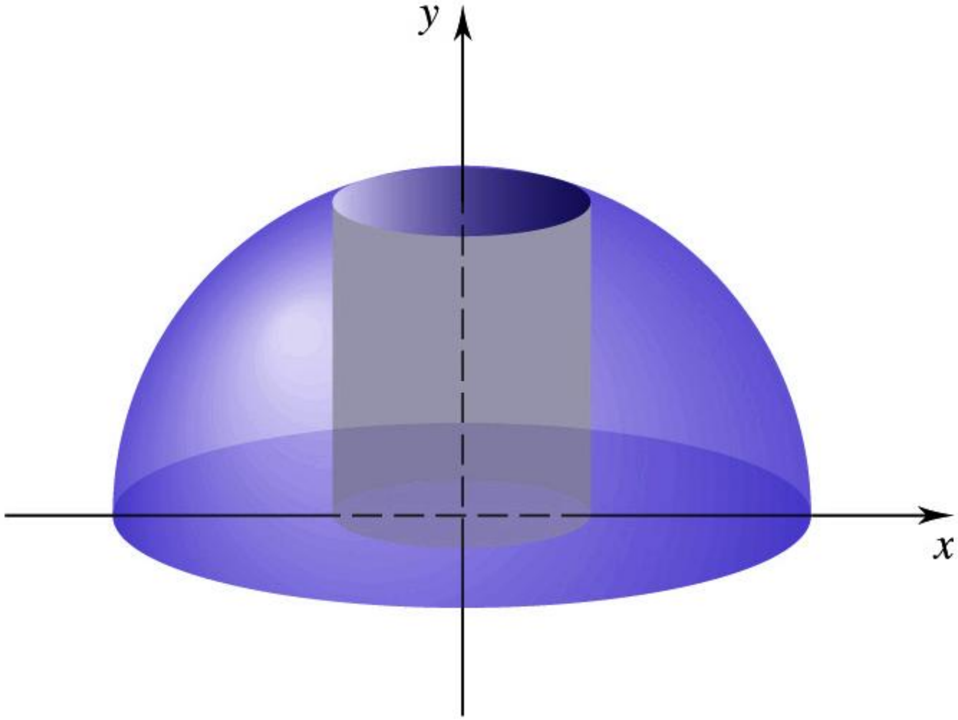
$$= \int_3^4 [(2+\sqrt{4-y}) + (2-\sqrt{4-y})][(2+\sqrt{4-y}) - (2-\sqrt{4-y})]dy = 8\int_3^4 \sqrt{4-y}\,dy$$

$$= 8\int_0^1 \sqrt{v}\,dv = \frac{16}{3}\left[v\sqrt{v}\right]_0^1 = \frac{16}{3} = \frac{32}{6}$$

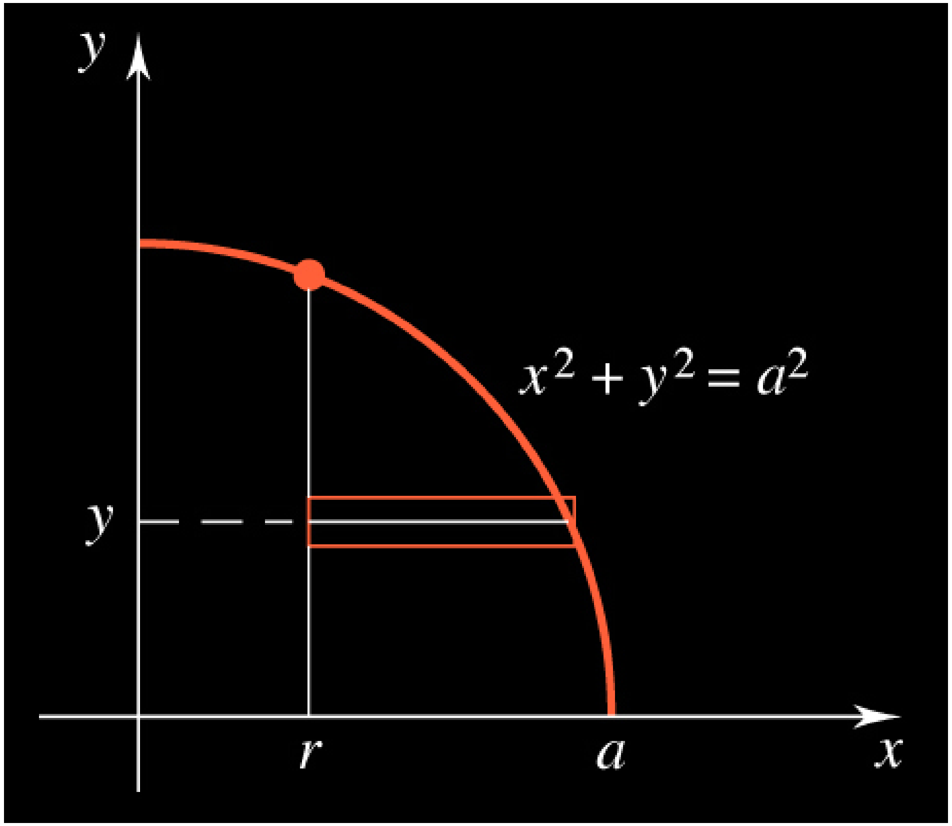
$$\therefore \quad V = \pi(V_{10} + V_{12}) = \pi\left(\frac{211}{6} + \frac{32}{6}\right) = \frac{243}{6}\pi = \frac{81}{2}\pi$$

Ejemplo 4 A través del centro de una semiesfera de radio a se taladra un agujero redondo de radio r ($r < a$). Hallar el volumen de la porción de semiesfera que queda.





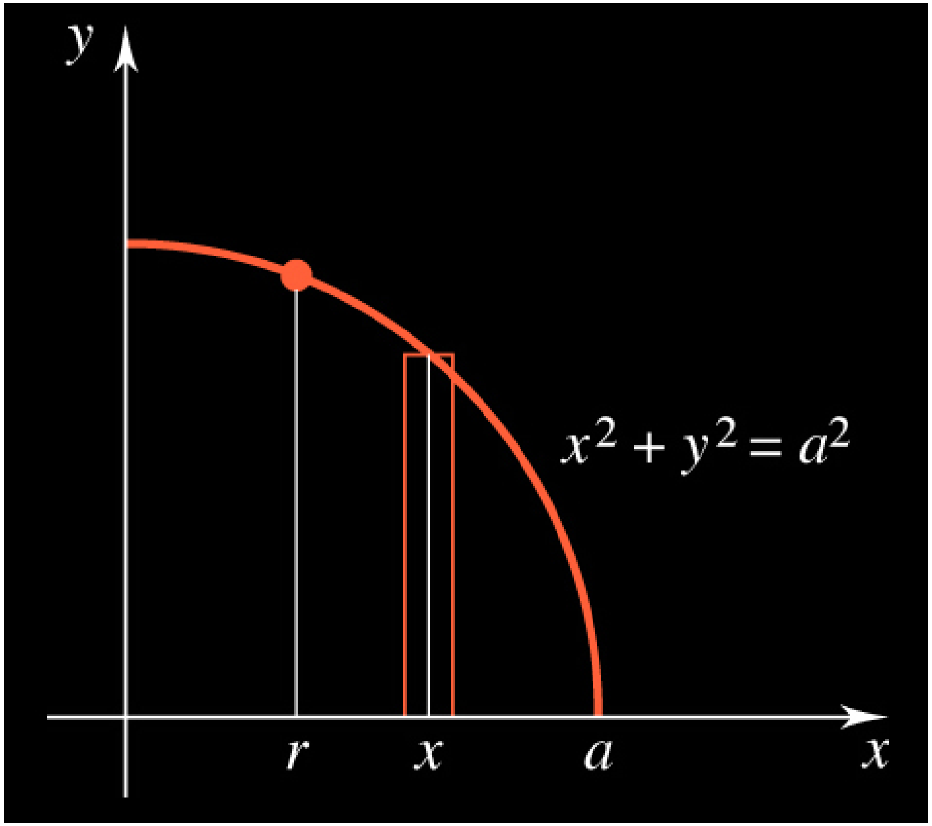
Solución Una semiesfera de radio a puede ser generada rotando alrededor del eje y la región del primer cuadrante limitada por $x^2 + y^2 = a^2$. Ver figura 6.3.9a. La porción de semiesfera que queda después de taladrar el agujero es el sólido generado al rotar alrededor del eje y la región sombreada (figura 6.3.9b).



(a) $\boxed{\text{Método de la arandela.}}$ Ver figura 6.3.10.

$$V = \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} \left(\pi\left[\sqrt{a^2-y^2}\right]^2 - \pi r^2\right) dy = \pi \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} (a^2 - r^2 - y^2)\, dy$$

$$= \pi\left[(a^2 - r^2)y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{a^2-r^2}} = \tfrac{2}{3}\pi(a^2 - r^2)^{3/2}.$$

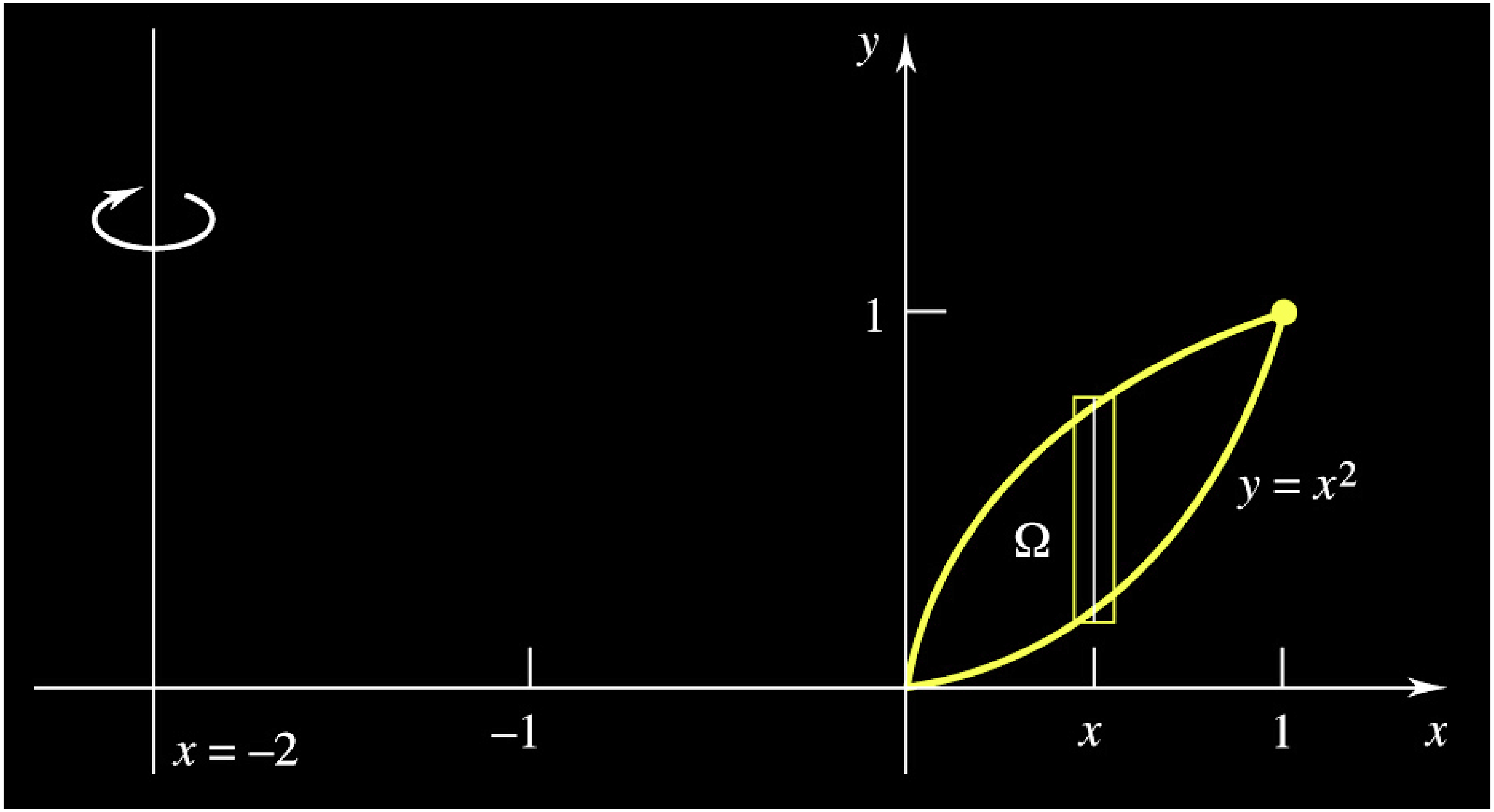


(b) $\boxed{\text{Método de las capas.}}$ Ver figura 6.3.11. $V = \int_r^a 2\pi x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

Sea $u = a^2 - x^2$. Entonces $du = -2x\,dx$ y $u = a^2 - r^2$ en $x = r$, $u = 0$ en $x = a$. Por tanto

$$V = \int_r^a 2\pi x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\pi\int_{a^2-r^2}^{0} u^{1/2}\,du = \pi\int_0^{a^2-r^2} u^{1/2}\,du$$
$$= \pi\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^{a^2-r^2} = \tfrac{2}{3}\pi(a^2 - r^2)^{3/2}.$$

Ejemplo 5 La región Ω comprendida entre $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2, 0 \le x \le 1$, se rota alrededor de la recta $x = -2$ (ver figura 6.3.12). Hallar el volumen del sólido que se genera.



Solución Utilizando el método de las capas, para cada x en $[0, 1]$ el segmento de recta en x genera un cilindro de radio $x + 2$, altura $\sqrt{x} - x^2$ y área lateral $2\pi(x + 2)(\sqrt{x} - x^2)$. Por tanto el volumen del sólido de revolución es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(x+2)(\sqrt{x} - x^2)\ dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} + 2x^{1/2} - x^3 - 2x^2)\ dx \\ &= 2\pi\ [\tfrac{2}{5}x^{5/2} + \tfrac{4}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{49}{30}\pi. \end{aligned}$$

Ejercicios sugeridos, Sección 6.3

Prácticos: 5, 12, 24, 25, 28, 39

Teóricos: 31, 33, 34, 43, 44, 45