

Aplicaciones de la Integral 6

Sección 6.4

Centroide de una región: teorema de Pappus

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

Centroide de una región

En la sección 5.8 hemos visto cómo calcular el centro de masa de una varilla. Supongamos ahora que tenemos una fina distribución de materia, una *lámina*, depositada en el plano xy y cuya forma es la de una región Ω (ver figura 6.4.1). Si la densidad de masa de la lámina varía de un punto a otro, la determinación del centro de masa de la lámina precisa de una integración doble (ver capítulo 16). Sin embargo, si la densidad es constante en Ω , el centro de masa de la lámina sólo depende de la forma de Ω y determina un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ que llamaremos *centroide* de Ω . Salvo que la forma de Ω sea muy complicada, podemos determinar su centroide por una integración ordinaria en una variable.

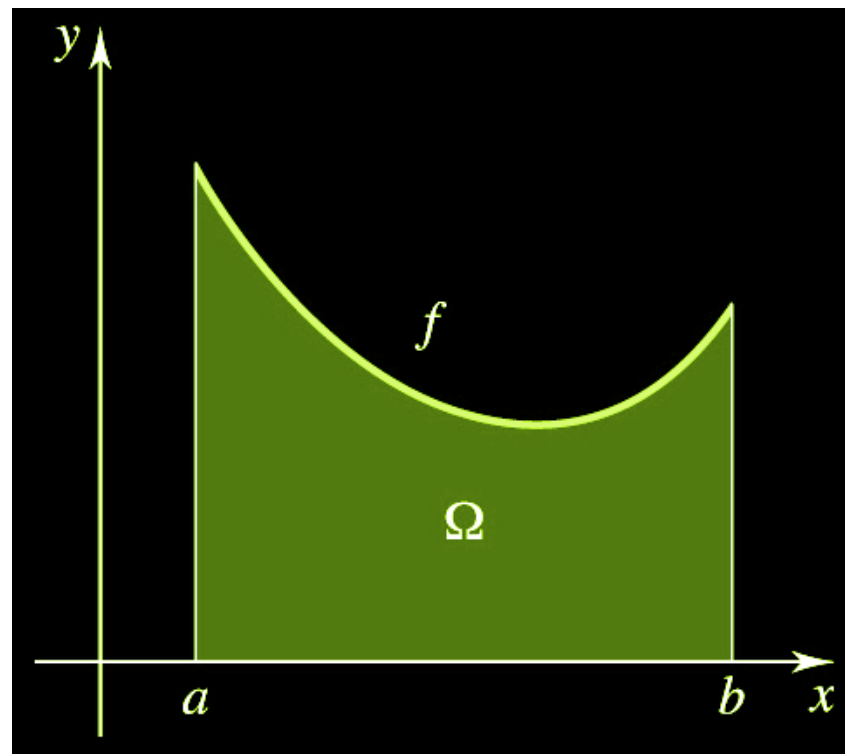


Recurriremos a dos principios para hallar el centroide de una región Ω . El primero es obvio. Tomaremos el segundo de la física; este resultado se justifica muy bien a partir de una integración doble.

Principio 1: Simetría Si la región posee un eje de simetría, el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ pertenece a dicho eje. En particular, si la región posee un centro, ese centro ha de ser el centroide.

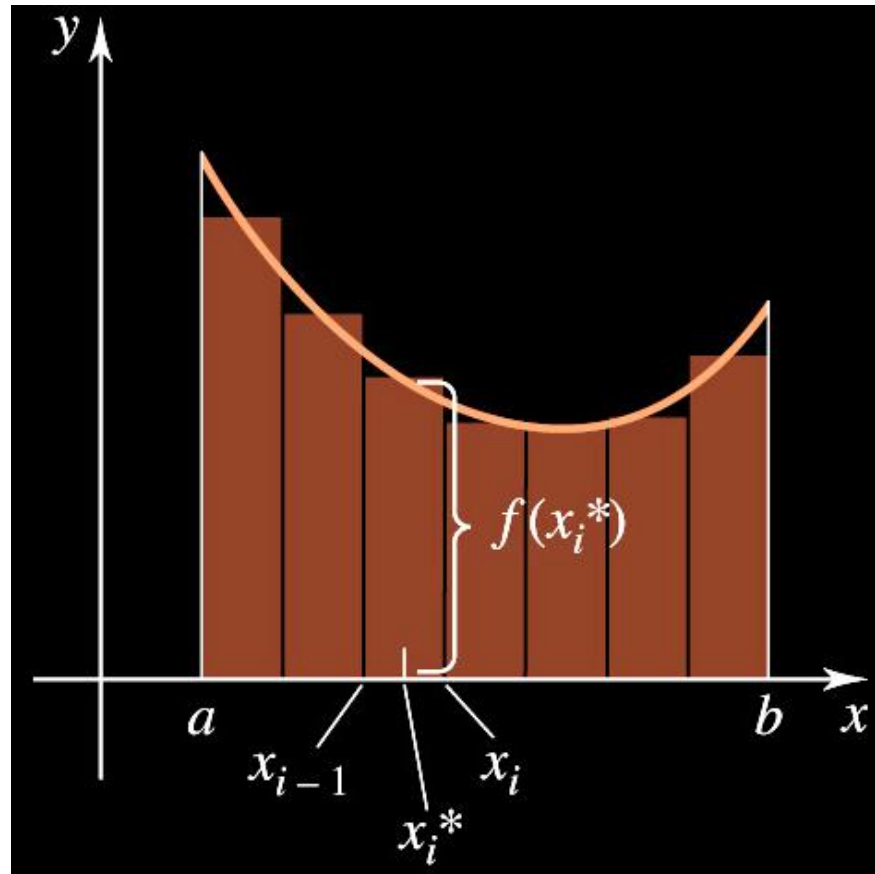
Principio 2: Aditividad Si una región de área A está formada por un número finito de partes de áreas $A_1, \dots, A_n$ y centroides $(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \dots, (\bar{x}_n, \bar{y}_n)$, se verifica que

$$\bar{x}A = \bar{x}_1A_1 + \dots + \bar{x}_nA_n \quad \text{e} \quad \bar{y}A = \bar{y}_1A_1 + \dots + \bar{y}_nA_n.$$



Estamos ahora en condiciones de utilizar las técnicas del cálculo necesarias. En la figura 6.4.2 está representada la región Ω debajo de la gráfica de una función continua f . Sea A el área de Ω . El centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de Ω puede obtenerse a partir de las siguientes fórmulas:

$$\bar{x}A = \int_a^b xf(x) \, dx, \quad \bar{y}A = \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 \, dx.$$



Demostración Para obtener dichas fórmulas, consideremos una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$. Ésta subdivide $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Tomemos como x_i^* el punto intermedio de $[x_{i-1}, x_i]$ y formemos los rectángulos correspondientes R_i representados en la figura 6.4.3. El área de R_i es $f(x_i^*) \Delta x_i$ y el centroide de R_i es su centro $(x_i^*, \frac{1}{2}f(x_i^*))$. Por (6.4.1), el centroide $(\bar{x}_P, \bar{y}_P)$ de la unión de esos rectángulos debe verificar:

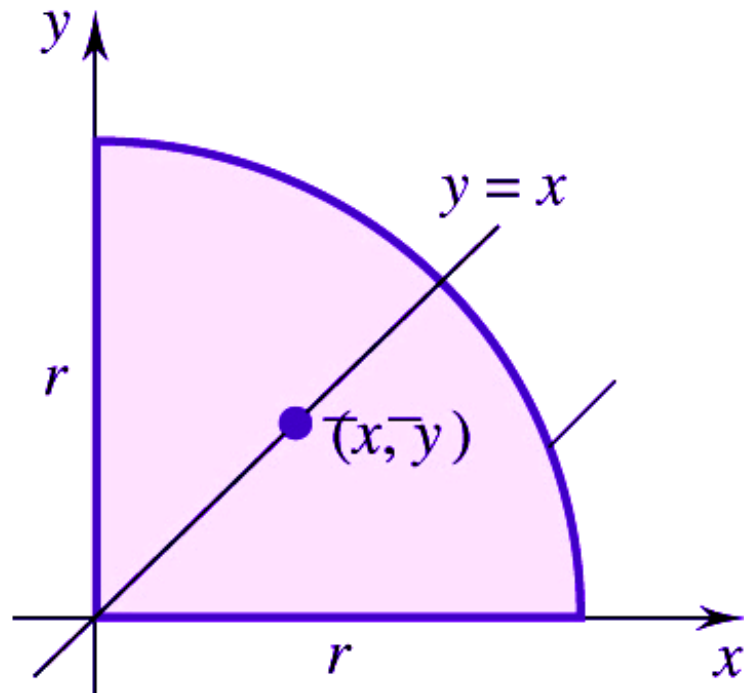
$$\bar{x}_P A_P = x_1^* f(x_1^*) \Delta x_1 + \dots + x_n^* f(x_n^*) \Delta x_n,$$

$$\bar{y}_P A_P = \frac{1}{2} [f(x_1^*)]^2 \Delta x_1 + \dots + \frac{1}{2} [f(x_n^*)]^2 \Delta x_n.$$

(Aquí A_P representa el área de la unión de los n rectángulos.) Cuando $\|P\| \rightarrow 0$, la unión de los rectángulos tiende a la forma de Ω y las ecuaciones que acabamos de escribir tienden a las fórmulas dadas en (6.4.2).

$$\bar{x}_1 A_1 + L + \bar{x}_n A_n = x_1^* A_1 + L + x_n^* A_n = x_1^* [f(x_1^*) \Delta x_1] + L + x_n^* [f(x_n^*) \Delta x_n]$$

$$\bar{y}_1 A_1 + L + \bar{y}_n A_n = y_1^* A_1 + L + y_n^* A_n = \frac{1}{2} f(x_1^*) [f(x_1^*) \Delta x_1] + L + \frac{1}{2} f(x_n^*) [f(x_n^*) \Delta x_n]$$



Ejemplo 1 Hallar el centroide del cuarto de disco de la figura 6.4.4.

Solución El cuarto de disco tiene como eje de simetría la recta $x = y$. Luego sabemos que $\bar{x} = \bar{y}$. Aquí,

$$\bar{y}A = \int_0^r \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx = \int_0^r \frac{1}{2}(r^2 - x^2)dx = \frac{1}{2}[r^2x - \frac{1}{3}x^3]_0^r = \frac{1}{3}r^3.$$

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ 

Dado que $A = \frac{1}{4}\pi r^2$,

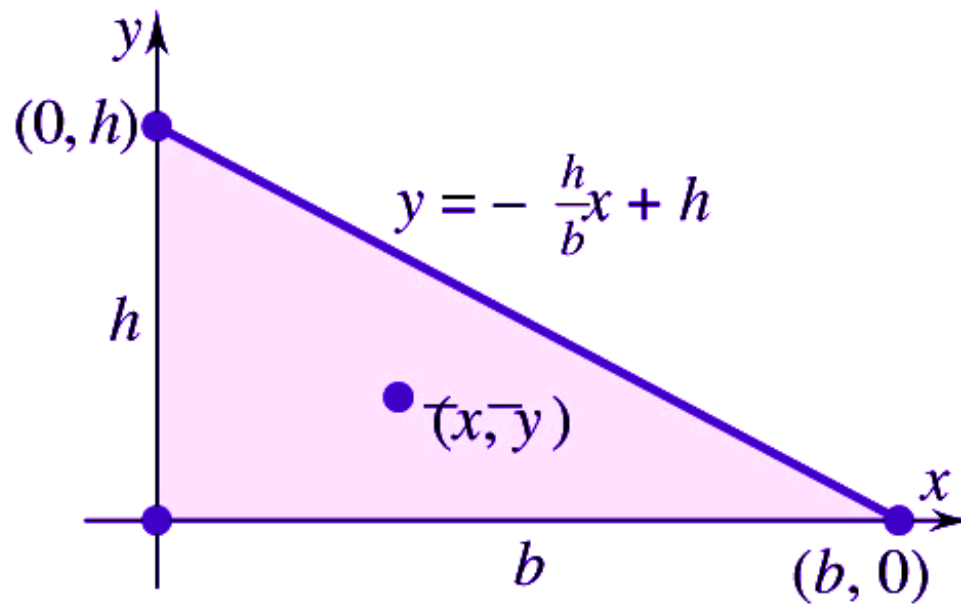
$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{3}r^3}{\frac{1}{4}\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}.$$

El centroide del cuarto de disco es el punto

$$\left(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi}\right).$$

NOTA: Es casi igual de fácil calcular $\bar{x}A$:

$$\begin{aligned}\bar{x}A &= \int_0^r x f(x) dx = \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx \\&= -\frac{1}{2} \int_{r^2}^0 u^{1/2} du \quad [u = (r^2 - x^2), du = -2x dx] \\&= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{r^2}^0 = \frac{1}{3} r^3.\end{aligned}$$



Ejemplo 2 Hallar el centroide del triángulo rectángulo de la figura 6.4.5.

Solución La hipotenusa está en la recta

$$y = -\frac{h}{b}x + h.$$

Luego

$$\bar{x}A = \int_0^b xf(x) dx = \int_0^b \left(-\frac{h}{b}x^2 + hx\right) dx = \frac{1}{6}b^2h$$

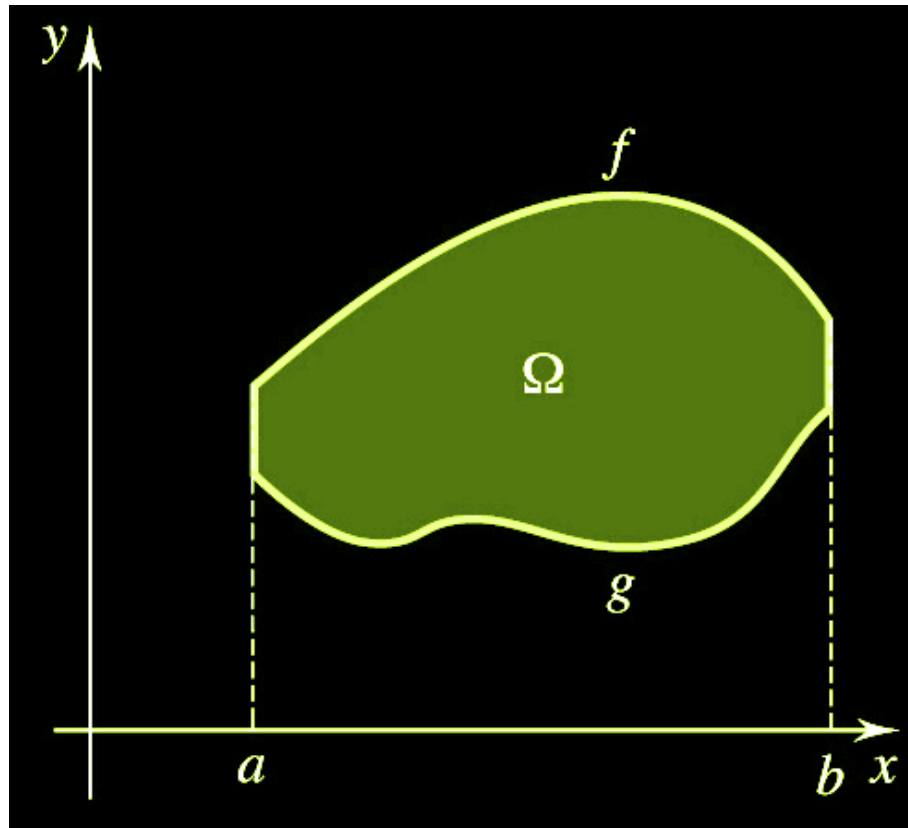
e

$$\bar{y}A = \int_0^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{h^2}{b^2}x^2 - \frac{2h^2}{b}x + h^2\right) dx = \frac{1}{6}bh^2.$$

Dado que $A = \frac{1}{2}bh$, tenemos que

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{6}b^2h}{\frac{1}{2}bh} = \frac{1}{3}b \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh} = \frac{1}{3}h.$$

El centroide es el punto $(\frac{1}{3}b, \frac{1}{3}h)$.



En la figura 6.4.6 está representada la región Ω limitada por las gráficas de dos funciones continuas f y g . En este caso, si A es el área de Ω y $(\bar{x}, \bar{y})$ su centroide, entonces

$$(6.4.3) \quad \bar{x}A = \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx, \quad \bar{y}A = \int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

Demostración Sean A_f el área debajo de la gráfica de f y A_g el área debajo de la gráfica de g . Entonces, con una notación evidente, tenemos que

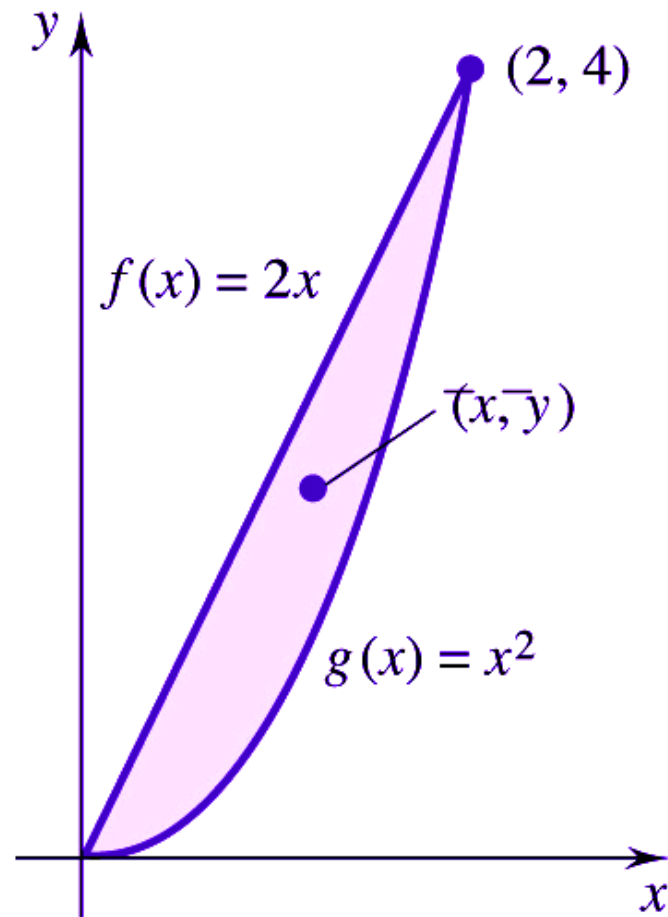
$$\bar{x}A + \bar{x}_g A_g = \bar{x}_f A_f \quad \text{e} \quad \bar{y}A + \bar{y}_g A_g = \bar{y}_f A_f. \quad (6.4.1)$$

Luego

$$\bar{x}A = \bar{x}_f A_f - \bar{x}_g A_g = \int_a^b x f(x) dx - \int_a^b x g(x) dx = \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx$$

e

$$\bar{y}A = \bar{y}_f A_f - \bar{y}_g A_g = \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx - \int_a^b \frac{1}{2}[g(x)]^2 dx = \int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$



Ejemplo 3 Hallar el centroide de la región representada en la figura 6.4.7.

Solución No podemos recurrir a ninguna simetría. Hemos de llevar a cabo los cálculos.

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3},$$

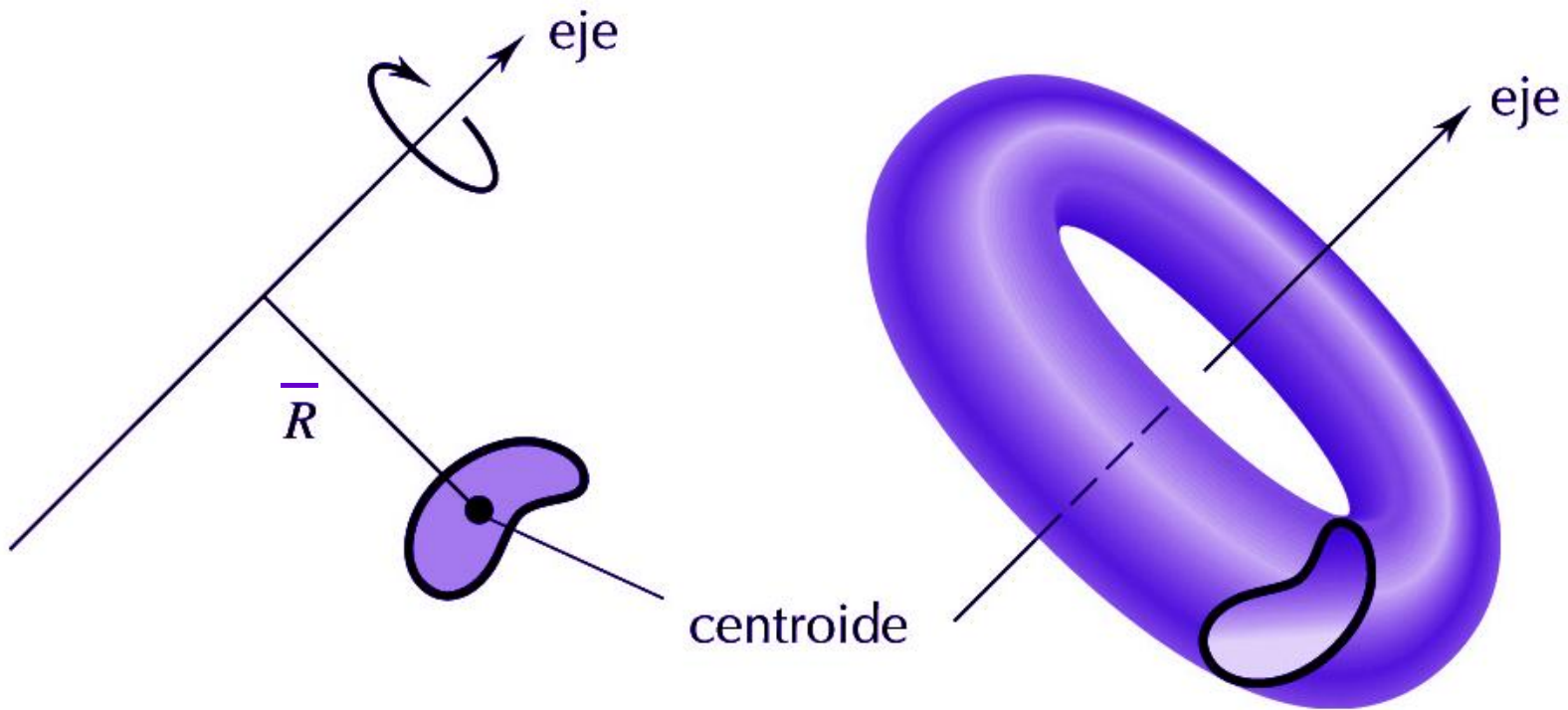
$$\bar{x}A = \int_0^2 x[f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \frac{4}{3},$$

$$\bar{y}A = \int_0^2 \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \frac{32}{15}.$$

Luego $\bar{x} = \frac{4/3}{4/3} = 1$ e $\bar{y} = \frac{32/15}{4/3} = \frac{8}{5}$.

Teorema de Pappus relativo a volúmenes

Todas las fórmulas que hemos establecido para calcular el volumen de un sólido son corolarios sencillos de una observación hecha por un brillante griego de la antigüedad, Pappus de Alejandría (aproximadamente 300 años d.C.).



TEOREMA 6.4.4 TEOREMA DE PAPPUS RELATIVO A VOLÚMENES[†]

Una región plana gira alrededor de un eje que pertenece a su plano. Si la región no corta el eje, el volumen del sólido de revolución resultante es el área de la región multiplicada por la circunferencia del círculo descrito por el centroide de la región:

$$V = 2\pi\bar{R}A$$

donde A es el área de la región y $\bar{R}$ la distancia del eje al centroide de la región.

Este teorema se encuentra en el Libro VII de la “Colección Matemática” de Pappus, un amplio recorrido por la geometría antigua a la cual Pappus hizo contribuciones originales (entre ellas este teorema). Mucho de lo que hoy sabemos de la geometría de los griegos se lo debemos a Pappus.

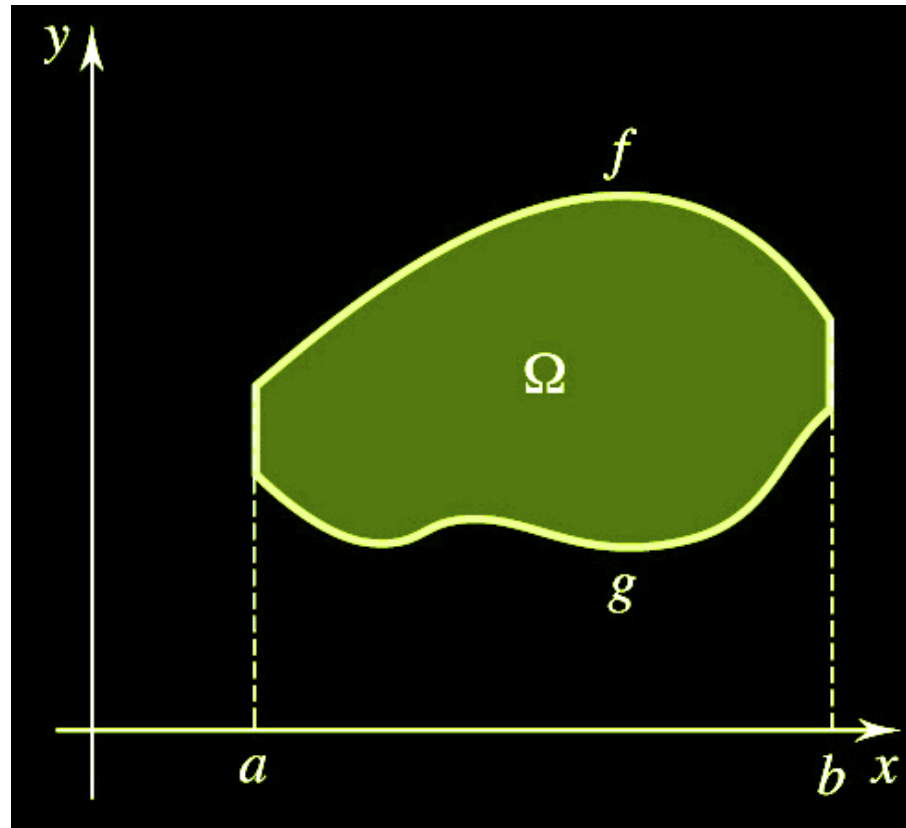
Básicamente, sólo hemos establecido dos fórmulas para el volumen de un sólido de revolución:

1. *La fórmula del método de las arandelas.* Si la región Ω de la figura 6.4.6 gira alrededor del eje x , el sólido resultante tiene por volumen

$$V_x = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

2. *La fórmula del método de las capas.* Si la región Ω de la figura 6.4.6 gira alrededor del eje y , el sólido resultante tiene por volumen

$$V_y = \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)] dx.$$



Obsérvese que

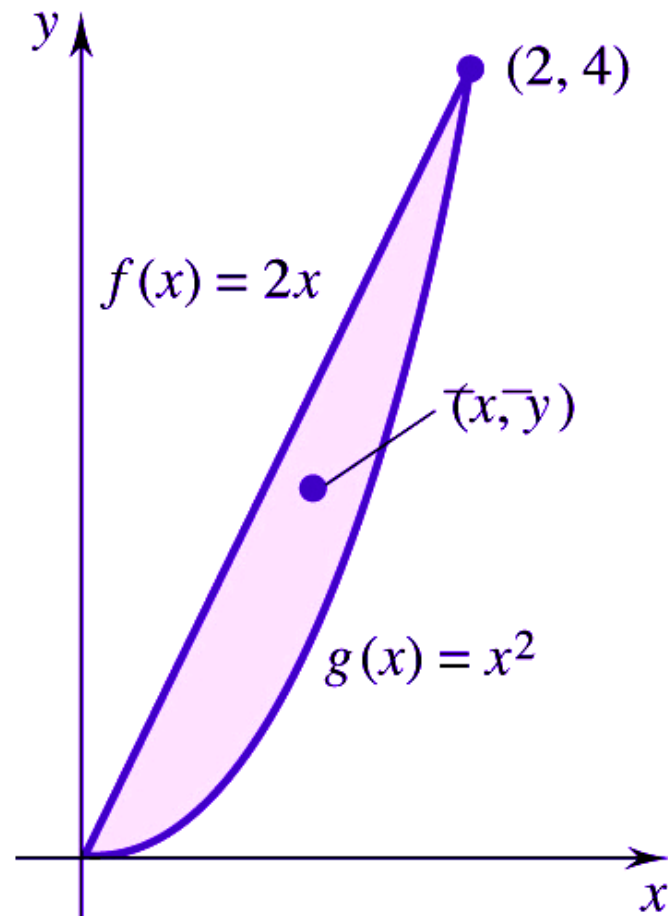
$$V_x = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx = 2\pi \int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx = 2\pi \bar{y}A = 2\pi \bar{R}A$$

y que

$$V_y = \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)] dx = 2\pi \bar{x}A = 2\pi \bar{R}A,$$

exactamente lo que Pappus dijo.

Observación Al enunciar el teorema de Pappus hemos dado por sentado que se efectuaba una revolución completa. Si Ω no realiza una revolución completa, el volumen del sólido resultante es sencillamente el área de Ω multiplicada por la longitud del arco de círculo recorrido por el centroide de Ω .



Aplicaciones del teorema de Pappus

Ejemplo 4 Hemos visto con anterioridad que la región de la figura 6.4.7 tiene un área igual a $\frac{4}{3}$ y que su centroide es $(1, \frac{8}{5})$. Hallar los volúmenes de los sólidos engendrados por la rotación de esta región en torno (a) al eje y y (b) a la recta $y = 5$.

Solución (a) Ya hemos calculado este volumen de dos formas: por el método de las arandelas y por el método de las capas. (Ver el ejemplo 8 de la sección 6.2 y el ejemplo 2 de la sección 6.3.) El resultado fue $V = \frac{8}{3}\pi$. Ahora utilizaremos el teorema de Pappus. Tenemos $\bar{R} = 1$ y $A = \frac{4}{3}$. Por tanto

$$V = 2\pi(1)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi.$$

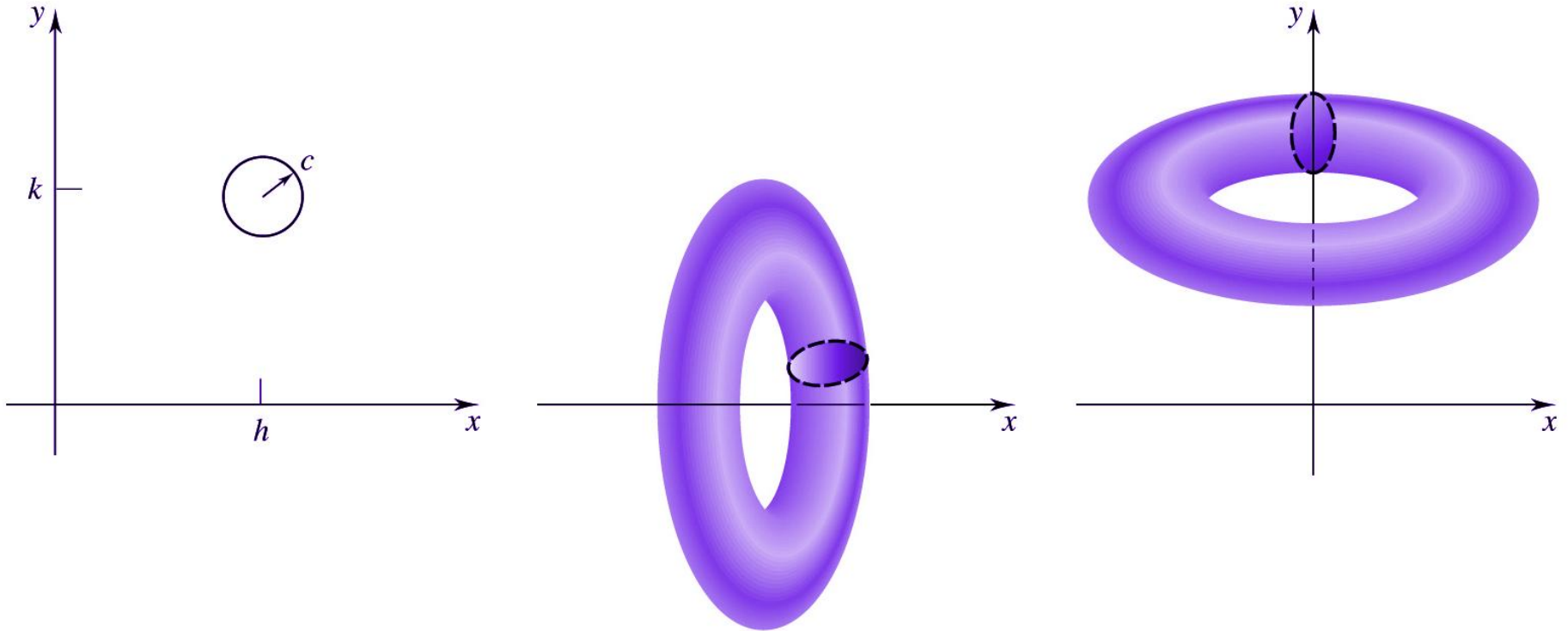
(b) Aquí $\bar{R} = 5 - \frac{8}{5} = \frac{17}{5}$ y $A = \frac{4}{3}$. Luego

$$V = 2\pi\left(\frac{17}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{136}{15}\pi.$$

Ejemplo 5 Hallar el volumen del toro engendrado por la rotación del disco

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 \leq c^2, \quad h, k \geq c > 0$$

alrededor (a) del eje x , (b) del eje y .



Solución El centroide del disco es el centro (h, k) . Está situado a k unidades del eje x y a h unidades del eje y . El área del disco es πc^2 . De ahí que (a) $V_x = 2\pi(k)(\pi c^2) = 2\pi^2 kc^2$, (b) $V_y = 2\pi(h)(\pi c^2) = 2\pi^2 hc^2$.

Ejemplo 6 Hallar el centroide del semidisco

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad y \geq 0$$

usando el teorema de Pappus.

Solución Dado que el eje y es un eje de simetría para el semidisco, sabemos que $\bar{x} = 0$. Sólo necesitamos hallar $\bar{y}$.

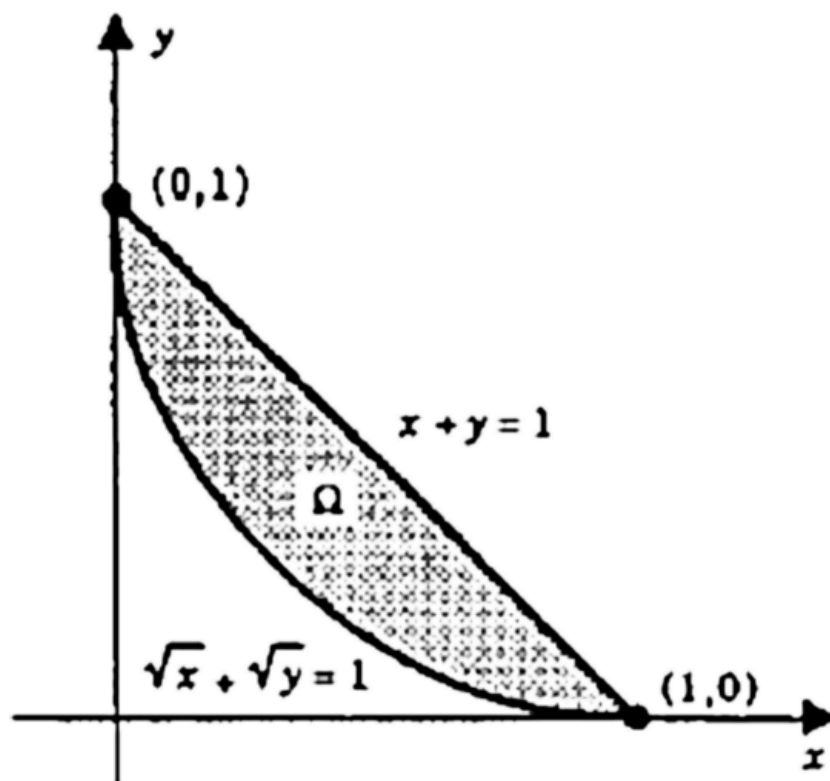
Si giramos el semidisco alrededor del eje x obtenemos una bola sólida cuyo volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3$. El área del semidisco es $\frac{1}{2}\pi r^2$. Por el teorema de Pappus,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\bar{y}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right).$$

Dividiendo, obtenemos que $\bar{y} = 4r/3\pi$.

Dibujar la región limitada por las curvas dadas. Determinar el centroide de la región así como el volumen engendrado por la rotación de la región alrededor de cada uno de los ejes de coordenadas.

9. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x + y = 1$.



$$A = \int_0^1 \left[(1-x) - (1-\sqrt{x})^2 \right] dx = \frac{1}{3}$$

$$\bar{x}A = \int_0^1 x \left[(1-x) - (1-\sqrt{x})^2 \right] dx = \frac{2}{15}, \quad \bar{x} = \frac{2}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{2}{5} \quad \text{by symmetry}$$

$$V_x = 2\pi\bar{y}A = \frac{4}{15}\pi, \quad V_y = \frac{4}{15}\pi \quad \text{by symmetry}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2 \quad \wedge \quad x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1 - \sqrt{x})^2 &= 1 - x \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x} + x = 1 - x \Leftrightarrow 2x = 2\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow x^2 &= x \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x = 1 \end{aligned}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \quad \wedge \quad x = 1 \Rightarrow y = 0 \quad (\text{ptos. comunes})$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \approx \frac{1}{10}$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x \approx \frac{1}{10}$$

$$x = y \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \therefore y = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = y = 1 - x \geq g(x) = y = (1 - \sqrt{x})^2 \Rightarrow A = \int_0^1 \left[(1 - x) - (1 - \sqrt{x})^2 \right] dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1 - x - 1 + 2\sqrt{x} - x) dx = \int_0^1 2(x^{1/2} - x) dx = \left[\frac{4}{3} x^{3/2} - x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\bar{x}A = \int_0^1 x[f(x) - g(x)] dx \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^1 x \left[(1 - x) - (1 - \sqrt{x})^2 \right] dx$$

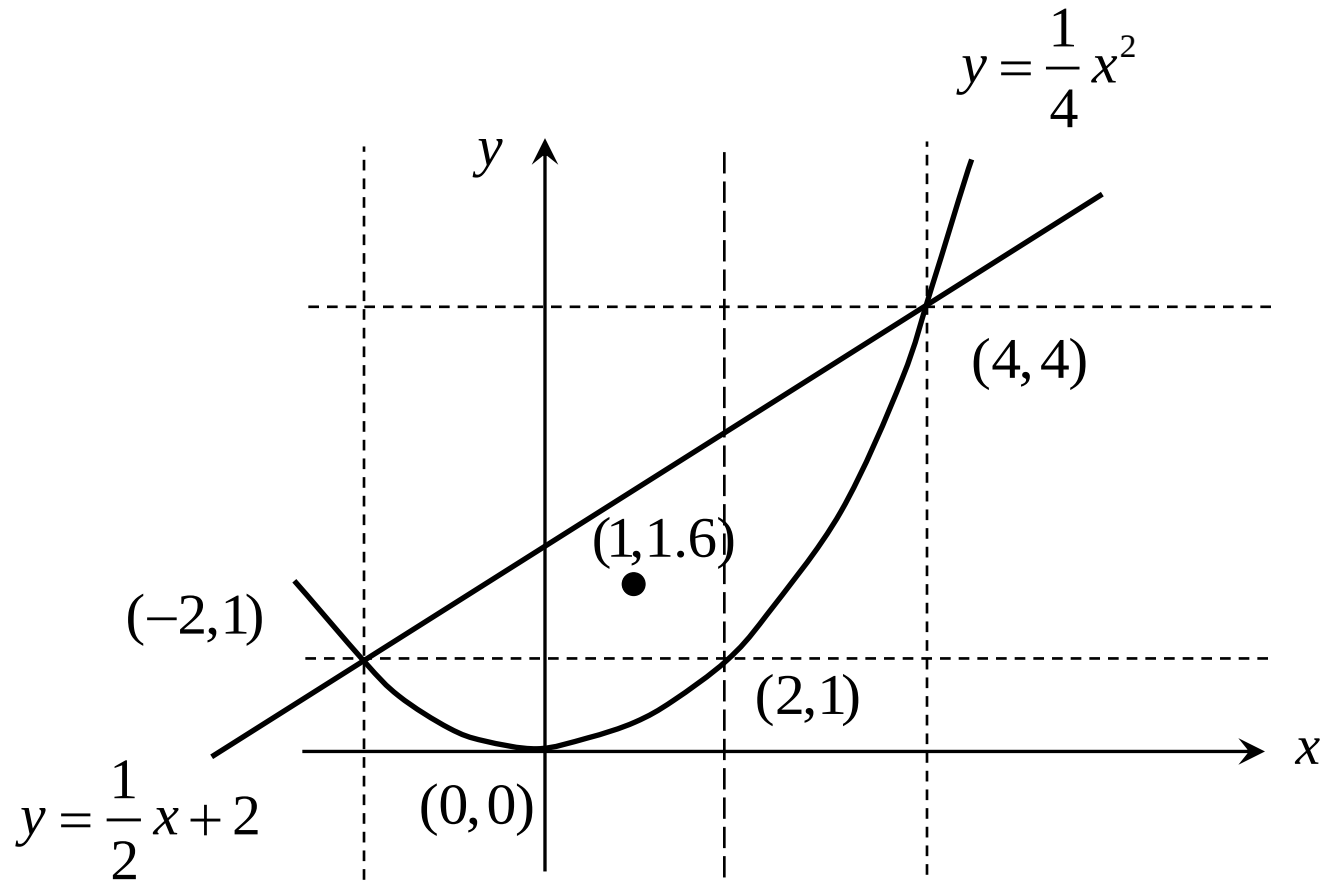
$$\Rightarrow \bar{x} = 3 \int_0^1 2(x^{3/2} - x^2) dx = 3 \left[\frac{4}{5} x^{5/2} - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = 3 \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{12}{5} - \frac{10}{5} = \frac{2}{5}$$

Hallar el centroide de la región acotada determinada por las siguientes curvas

$$\mathbf{17.} \quad x^2 = 4y, \quad x - 2y + 4 = 0.$$

$$\mathbf{17.} \quad \left(1, \frac{8}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}
 x^2 = 4y \quad \wedge \quad x - 2y + 4 = 0 &\Rightarrow x^2 = 4(y - 2)^2 \Rightarrow \cancel{4}y = \cancel{4}(y - 2)^2 \\
 \Leftrightarrow y = y^2 - 4y + 4 &\Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y - 4) = 0; \\
 y = 1 \Rightarrow x = -2 \quad \wedge \quad y = 4 &\Rightarrow x = 4
 \end{aligned}$$



$$f(x) = y = \frac{1}{2}x + 2 \geq g(x) = y = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow A = \int_{-2}^4 \left(\frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{12}x^3 \right]_{-2}^4 = \left(4 + 8 - \frac{16}{3} \right) - \left(1 - 4 + \frac{2}{3} \right) = 15 - 6 = 9$$

$$\bar{x}A = \int_{-2}^4 x[f(x) - g(x)]dx \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{A} \int_{-2}^4 x \left(\frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{9} \int_{-2}^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{4}x^3 \right) dx = \frac{1}{9} \left[\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{1}{16}x^4 \right]_{-2}^4$$

$$= \frac{1}{9} \left[\left(\frac{32}{3} + 16 - 16 \right) - \left(-\frac{4}{3} + 4 - 1 \right) \right] = \frac{1}{9} \left(\frac{32}{3} - \frac{5}{3} \right) = 1$$

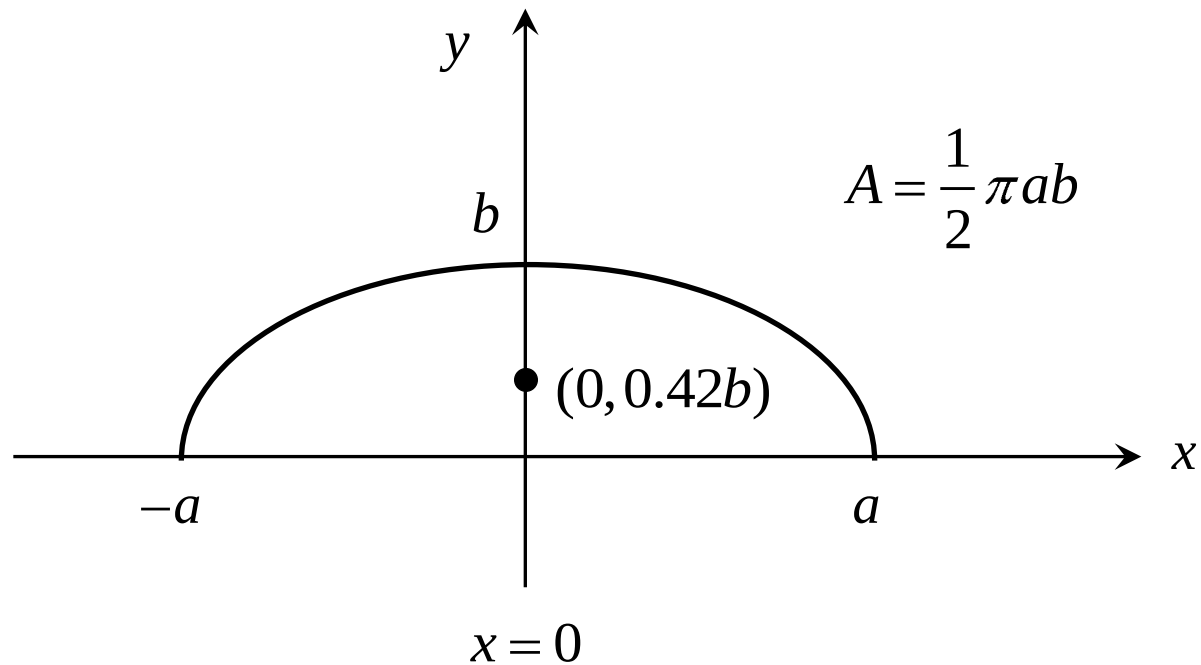
$$\bar{y}A = \frac{1}{2} \int_{-2}^4 [f^2(x) - g^2(x)] dx \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{2A} \int_{-2}^4 \left[\left(\frac{1}{2}x + 2 \right)^2 - \left(\frac{1}{4}x^2 \right)^2 \right] dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{y} &= \frac{1}{18} \int_{-2}^4 \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4 - \frac{1}{16}x^4 \right) dx = \frac{1}{18} \left[\frac{1}{12}x^3 + x^2 + 4x - \frac{1}{80}x^5 \right]_{-2}^4 \\ &= \frac{1}{18} \left[\left(\frac{16}{3} + 16 + 16 - \frac{64}{5} \right) - \left(-\frac{2}{3} + 4 - 8 + \frac{2}{5} \right) \right] \\ &= \frac{1}{18} \left(\frac{16}{3} + \frac{2}{3} + 32 - 4 + 8 - \frac{64}{5} - \frac{2}{5} \right) \\ &= \frac{1}{18} \left(6 + 36 - \frac{66}{5} \right) = \frac{1}{18} \left(\frac{210 - 66}{5} \right) = \frac{8}{5} = 1.6 \end{aligned}$$

26. La elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ encierra una región de área πab .
Determinar el centroide de la mitad superior de esa región.

$$A = \frac{1}{2}\pi ab; \quad \bar{x} = 0 \text{ by symmetry.}$$

$$\bar{y}A = \int_{-a}^a \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) dx = \frac{2}{3}ab^2 \implies \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}.$$



$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \Rightarrow a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2 = b^2 (a^2 - x^2)$$

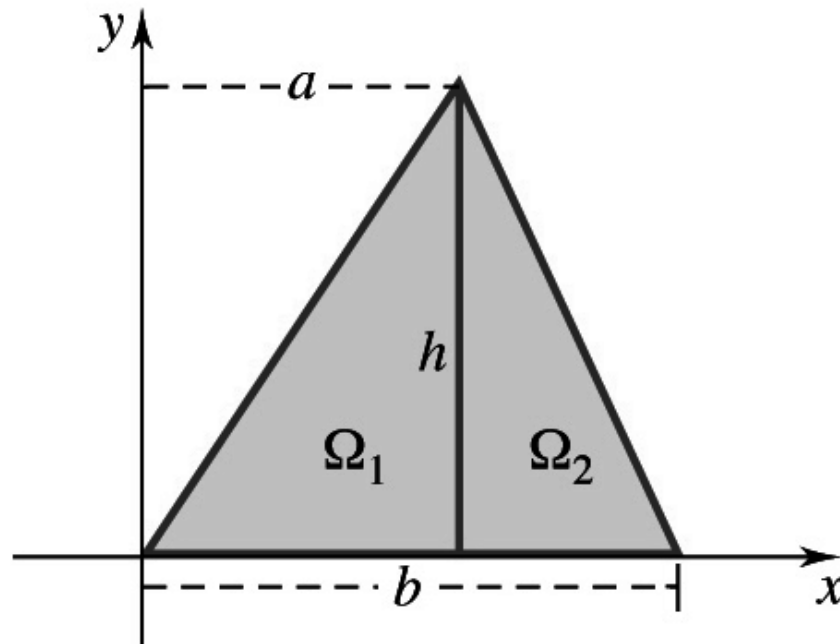
$$\Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \Rightarrow f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} > 0 \quad \forall x \in [-a, a]$$

$$\bar{y}A = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f^2(x) dx \Rightarrow \bar{y}A = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{y}A &= \frac{b^2}{2a^2} \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^a = \frac{b^2}{2a^2} \left[\left(a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right) - \left(-a^3 + \frac{1}{3} a^3 \right) \right] \\ &= \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{2}{3} a^3 + \frac{2}{3} a^3 \right) = \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{4}{3} a^3 \right) = \frac{2}{3} ab^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{A} \frac{2}{3} ab^2 = \frac{2}{\pi ab} \frac{2}{3} ab^2 = \frac{4b}{3\pi} \approx \frac{4}{3} \frac{7}{22} b = \frac{14}{33} b \approx 0.42b$$

29. La región triangular de la figura es la unión de dos triángulos rectángulos Ω_1 y Ω_2 . Hallar el centroide (a) de Ω_1 , (b) de Ω_2 y (c) de toda la región.



(a) $\left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}h\right)$

(b) $\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b, \frac{1}{3}h\right)$

(c) $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b, \frac{1}{3}h\right)$

$$\text{a) } f(x) = y = \frac{h}{a}x \quad \forall x \in [0, a] \quad \wedge \quad A(\Omega_1) = A_1 = \frac{ah}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 A_1 = \int_0^a x f(x) dx = \frac{h}{a} \int_0^a x^2 dx = \frac{h}{a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^2 h}{3} \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{2a^2 h}{3ah} = \frac{2}{3}a$$

$$\bar{y}_1 A_1 = \frac{1}{2} \int_0^a f^2(x) dx = \frac{h^2}{2a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{h^2}{2a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ah^2}{6} \Rightarrow \bar{y}_1 = \frac{2ah^2}{6ah} = \frac{1}{3}h$$

$$\Rightarrow C(\Omega_1) = (\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}h \right)$$

$$b) \quad f(x) = y = \frac{h}{a-b}(x-b) \quad \forall x \in [a, b] \quad \wedge \quad A(\Omega_2) = A_2 = \frac{(b-a)h}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{x}_2 A_2 &= \int_a^b x f(x) dx = \frac{h}{a-b} \int_a^b (x^2 - bx) dx = \frac{h}{a-b} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{h}{a-b} \left[\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2} \right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{ba^2}{2} \right) \right] = \frac{h}{a-b} \left[\frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{b(b^2 - a^2)}{2} \right] \\ &= \frac{h}{b-a} \left[\frac{b(b-a)(b+a)}{2} - \frac{(b-a)(b^2 + ba + a^2)}{3} \right] = h \left[\frac{b^2 + ba}{2} - \frac{(b^2 + ba + a^2)}{3} \right] \\ &= \frac{h}{6} (3b^2 + 3ba - 2b^2 - 2ba - 2a^2) = \frac{h}{6} (b^2 + ba - 2a^2) = \frac{h}{6} (b^2 - a^2 + ba - a^2) \\ &= \frac{h}{6} [(b-a)(b+a) + (b-a)a] = \frac{h(b-a)(2a+b)}{6} \\ \Rightarrow \bar{x}_2 &= \frac{2h(b-a)(2a+b)}{6(b-a)h} = \frac{2a+b}{3} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \end{aligned}$$

$$\text{b) cont. } f(x) = \frac{h}{a-b}(x-b) \quad \forall x \in [a, b] \quad \wedge \quad A(\Omega_2) = A_2 = \frac{(b-a)h}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{y}_2 A_2 &= \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx = \frac{h^2}{2(a-b)^2} \int_a^b (x-b)^2 dx = -\frac{h^2}{2(a-b)^2} \int_{b-a}^0 (-u)^2 du \\ &= \frac{h^2}{2(b-a)^2} \int_0^{b-a} u^2 du = \frac{h^2}{2(b-a)^2} \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^{b-a} = \frac{h^2}{2(b-a)^2} \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{h^2(b-a)}{6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{y}_2 = \frac{2h^2(b-a)}{6(b-a)h} = \frac{h}{3} \quad \therefore \quad C(\Omega_2) = (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b, \frac{1}{3}h \right)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \bar{x}A &= \bar{x}_1A_1 + \bar{x}_2A_2 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{A} \bar{x}_1A_1 + \bar{x}_2A_2 \quad ; \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ \bar{y}A &= \bar{y}_1A_1 + \bar{y}_2A_2 \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{A} \bar{y}_1A_1 + \bar{y}_2A_2 \quad ; \quad A = A(\Omega) = \frac{1}{2}bh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{x} &= \frac{2}{bh} \left[\frac{2a}{3} \frac{ah}{2} + \left(\frac{2a+b}{3} \right) \frac{(b-a)h}{2} \right] = \frac{1}{3bh} \left[2a^2h + (2a+b)(b-a)h \right] \\ &= \frac{1}{3bh} \left[2a^2h - 2a^2h + 2abh + b^2h - abh \right] = \frac{1}{3b} \left[2ab + b^2 - ab \right] = \frac{1}{3b} \left[ab + b^2 \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{2}{bh} \left[\frac{h}{3} \frac{ah}{2} + \frac{h}{3} \frac{(b-a)h}{2} \right] = \frac{2h}{b} \left[\frac{a}{6} + \frac{(b-a)}{6} \right] = \frac{2hb}{6b} = \frac{1}{3}h$$

$$\therefore C(\Omega) = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b, \frac{1}{3}h \right)$$

30. Hallar el volumen del sólido engendrado al hacer girar la región triangular completa de la figura del ejercicio 29 alrededor (a) del eje x y (b) del eje y .

$$(a) \quad V = 2\pi \bar{y}A = 2\pi \frac{1}{3}h \frac{1}{2}bh = \frac{1}{3} \pi bh^2 \quad [\text{using Exercise 29(c)}]$$

$$(b) \quad V = 2\pi \bar{x}A = 2\pi \frac{1}{3}(a+b) \frac{1}{2}bh = \frac{1}{3} \pi (a+b)bh.$$

Ejercicios sugeridos, Sección 6.4

Prácticos: 3, 9*, 13, 17*

Teóricos: 24, 26*, 27, 30*