Aplicaciones de la Integral 6

Sección 6.5

La noción de trabajo

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

6.5 LA NOCIÓN DE TRABAJO

Consideremos una fuerza constante F que actúa a lo largo de una recta que consideraremos como el eje x. Por convenio, F es positiva si actúa en la dirección de las x crecientes y negativa si actúa en la dirección de las x decrecientes. (Figura 6.5.1.)

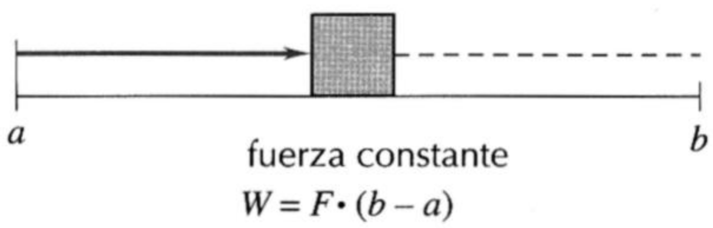
Supongamos ahora que, sometido a la acción de esta fuerza, un objeto se mueve a lo largo del eje x desde a hasta b. Se llama *trabajo* realizado por F en el desplazamiento al *producto de la fuerza por el desplazamiento*:

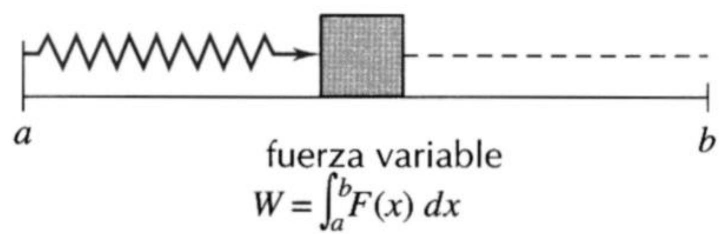
$$\boxed{W = F \cdot (b - a).}$$

No es difícil comprobar que si F actúa en la misma dirección del movimiento, entonces $W > 0$, mientras que si F actúa en sentido contrario al movimiento, $W < 0$. Por ejemplo, si un objeto se cae de una mesa al suelo, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es positivo (después de todo, la gravedad terrestre atrae los objetos hacia abajo). Pero si un objeto es elevado desde el nivel del suelo hasta una mesa, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad resultará ser negativo, mientras que el trabajo realizado por la mano que eleva el objeto es positivo.

Como hemos dicho ya, si un objeto se mueve desde $x = a$ hasta $x = b$ bajo la acción de una fuerza constante F, el trabajo realizado por F es el producto del valor constante de F por $b - a$. ¿Cuál es el trabajo realizado por F si, en lugar de permanecer constante, varía continuamente como función de x? Como seguramente se imaginará el lector, el trabajo realizado por F se define entonces como el producto del *promedio* de f por $b - a$:

$$\boxed{W = \int_a^b F(x)\, dx.}$$





$$W = \overline{f}\,(b-a) = (b-a)\,\overline{f} = (b-a)\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx\right] = \int_a^b F(x)dx$$

La ley de Hooke

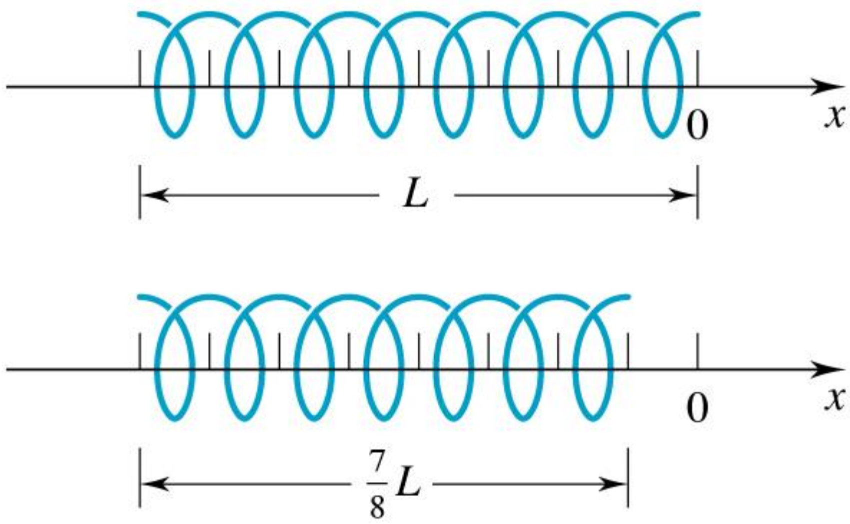
Un ejemplo de fuerza variable lo proporciona la acción de un muelle de acero. Estirar un muelle, dentro de su límite de elasticidad, y se experimentará una fuerza en sentido contrario. Cuanto más se estire, mayor es la fuerza experimentada. Si se comprime un muelle dentro de su límite de elasticidad, se experimenta una fuerza de repulsión. A mayor compresión, mayor repulsión. De acuerdo con la ley de Hooke (Robert Hooke, 1635-1703) la fuerza ejercida por un muelle puede escribirse como

$$\boxed{F(x) = -kx}$$

donde k es un número positivo, llamado *constante del muelle*, y x es el desplazamiento desde la posición de equilibrio. El signo menos significa que el muelle siempre ejerce una fuerza en dirección contraria al sentido de la deformación a la que ha sido sometido (la fuerza siempre actúa para restaurar la posición de equilibrio inicial).

Observación La ley de Hooke es sólo una aproximación, pero es una buena aproximación para las deformaciones pequeñas. En los ejemplos siguientes siempre se supondrá que la fuerza ejercida por el muelle para recuperar su posición inicial viene dada por la ley de Hooke.

Ejemplo 1 Un muelle de longitud natural L es comprimido hasta medir $\frac{7}{8}L$. Entonces ejerce una fuerza F_0. Hallar el trabajo realizado por el muelle para recuperar su longitud natural.



Solución Situemos el muelle en el eje x de tal modo que el punto de equilibrio coincida con el origen. La compresión se traduce en un movimiento hacia la izquierda. (Figura 6.5.3.)

Comprimido $\frac{1}{8}L$ hacia la izquierda, el muelle ejerce una fuerza F_0. Luego, por la ley de Hooke,

$$F_0 = F(-\tfrac{1}{8}L) = -k(-\tfrac{1}{8}L) = \tfrac{1}{8}kL.$$

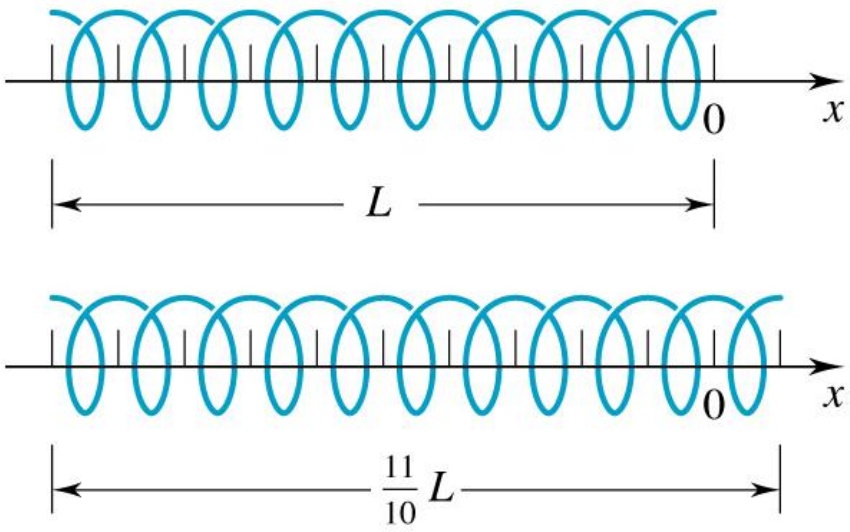
Esto nos dice que $k = 8F_0/L$. Luego la ley para la fuerza del muelle puede escribirse como

$$F(x) = -\left(\frac{8F_0}{L}\right)x.$$

Para hallar el trabajo realizado por este muelle para restablecer su posición de equilibrio, integramos $F(x)$ desde $x = -\frac{1}{8}L$ hasta $x = 0$:

$$W = \int_{-L/8}^{0} F(x)\,dx = \int_{-L/8}^{0} -\left(\frac{8F_0}{L}\right)x\,dx = -\frac{8F_0}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-L/8}^{0} = \frac{LF_0}{16}.$$

Ejemplo 2 ¿Qué trabajo deberíamos realizar para alargar el muelle del problema 1 hasta la longitud de $\frac{11}{10}L$?



Solución Nos referiremos a la figura 6.5.4. Para alargar el muelle, debemos contrarrestar la fuerza que éste ejerce. Si se le estira x unidades, la fuerza vale

$$F(x) = -\left(\frac{8F_0}{L}\right)x. \qquad \text{(ejemplo 1)}$$

Tendremos pues que aplicar la fuerza opuesta

$$-F(x) = \left(\frac{8F_0}{L}\right)x.$$

El trabajo que ha de realizarse para alargar el muelle hasta $\frac{11}{10}L$ se obtiene integrando $-F(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = \frac{1}{10}L$:

$$W = \int_0^{L/10} -F(x)\,dx = \int_0^{L/10}\left(\frac{8F_0}{L}\right)x\,dx = \frac{8F_0}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{L/10} = \frac{LF_0}{25}.$$

Observación sobre las unidades Una unidad de trabajo es el trabajo realizado por una fuerza unitaria al mover un objeto una distancia unitaria. Si la fuerza se mide en newtons y la distancia en metros, la unidad de trabajo es el *newton-metro*, también llamado *julio* (un newton es la fuerza necesaria para imprimir una aceleración de 1 metro por segundo cada segundo a una masa de 1 kilogramo). Existen otras unidades de trabajo. Si la fuerza viene dada en dinas y la distancia en centímetros, el trabajo se mide en *dinas-centímetro*, también llamados *ergios* (una dina es la fuerza necesaria para imprimir una aceleración de 1 centímetro por segundo cada segundo a una masa de 1 gramo).

Ejemplo 3 Estirado $\frac{1}{3}$ de metro desde su posición natural, un determinado muelle ejerce una fuerza de 10 newtons. ¿Qué trabajo deberemos realizar para estirarlo otro tercio de metro?

Solución Situemos el muelle en el eje x de tal manera que la posición de equilibrio coincida con el origen. Un estiramiento se puede ver como un movimiento hacia la derecha. Como hemos dicho, supondremos que se cumple la ley de Hooke: $F(x) = -kx$.

Al ser estirado $\frac{1}{3}$ de metro, el muelle ejerce una fuerza de -10 newtons (10 newtons hacia la izquierda). Luego $-10 = -k(\frac{1}{3})$ y $k = 30$ (es decir 30 julios).

Para hallar el trabajo necesario para estirar otro tercio de metro el muelle, integramos la fuerza contraria, $-F(x) = 30x$, desde $x = \frac{1}{3}$ hasta $x = \frac{2}{3}$:

$$W = \int_{1/3}^{2/3} 30x \, dx = 30\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{1/3}^{2/3} = 5 \text{ julios.}$$

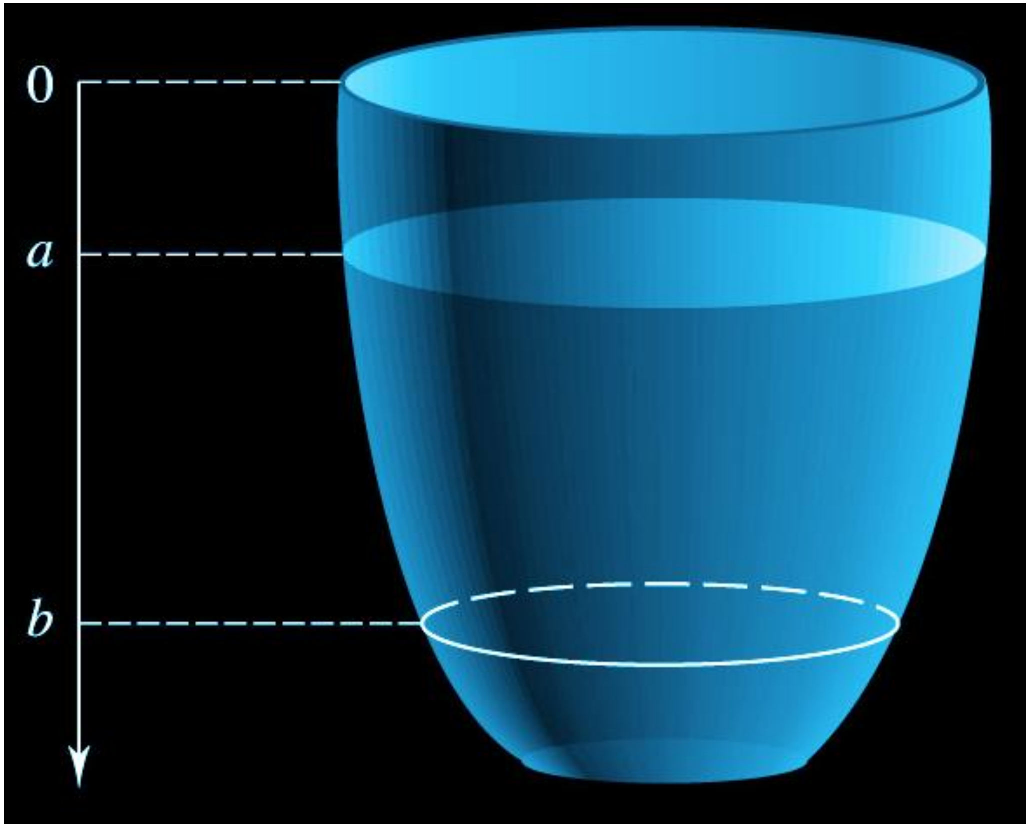
Vaciado de un depósito

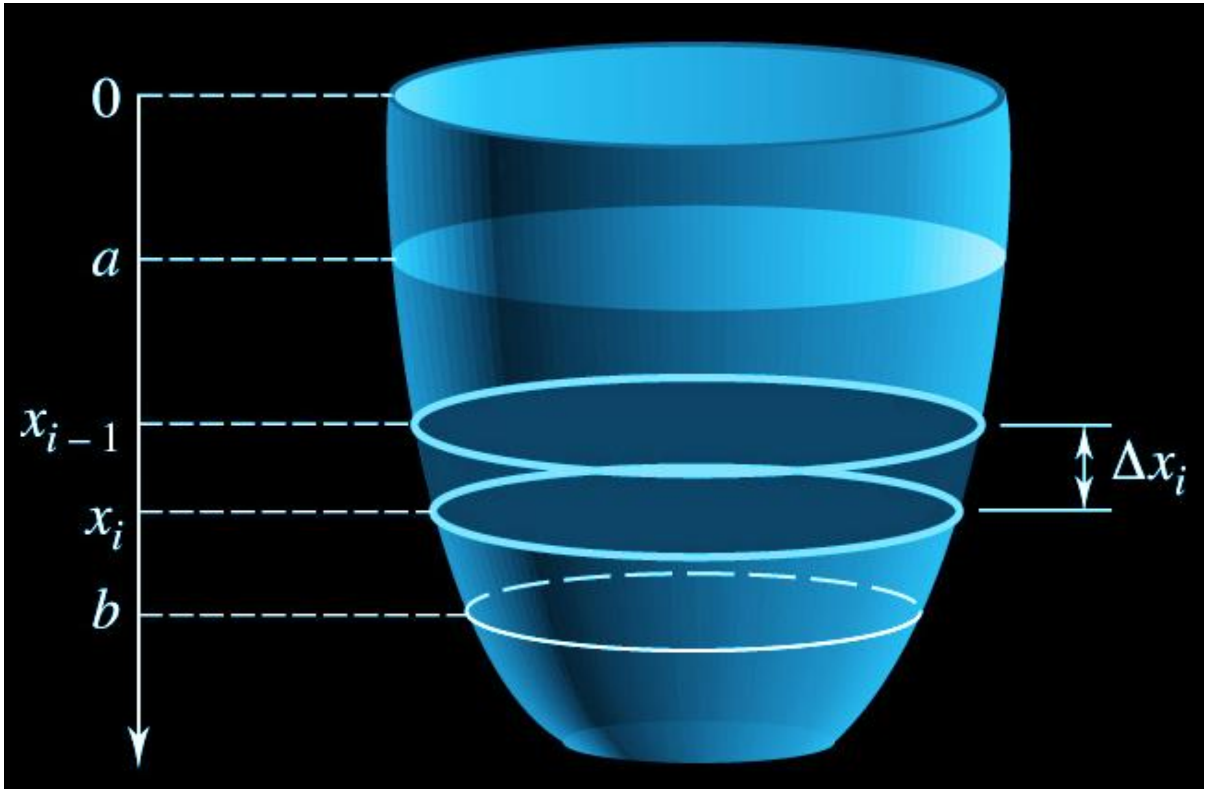
Para levantar un objeto se ha de contrarrestar la fuerza de la gravedad. Por consiguiente, el trabajo realizado al levantar un objeto viene dado por la fórmula

$$\boxed{\text{trabajo} = (\text{peso del objeto}) \times (\text{altura a la que se eleva}).}$$

Si levantamos un saco de arena que tiene una pérdida o vaciamos un depósito de agua bombeando el agua desde la parte superior, el cálculo resulta algo más complicado. En el primer ejemplo, el peso varía durante el movimiento (hay menos arena en el saco a medida que lo levantamos). En el segundo ejemplo, el recorrido varía (el agua de la parte superior del depósito no ha de ser bombeada en un recorrido tan grande como la de la parte inferior). Dejaremos el problema del saco de arena como ejercicio. Nos vamos a interesar por el segundo problema.

En la figura 6.5.5 hemos representado un depósito de almacenamiento lleno hasta a metros por debajo del borde con algún líquido. Supondremos que el líquido es homogéneo y que pesa σ newtons por metro cúbico. Supongamos ahora que se bombea líquido del depósito de almacenamiento por la parte superior hasta que el nivel del líquido descienda hasta b metros por debajo del borde del depósito. ¿Cuál es el trabajo realizado?




0
a
x_{i-1}
x_i
b
Δx_i

Podemos responder a esta pregunta mediante los métodos del cálculo integral. Para cada $x \in [a, b]$, definimos

$$A(x) = \text{área de la sección transversal } x \text{ metros por debajo de la parte superior del depósito},$$

$$s(x) = \text{altura a la que hay que elevar el agua del nivel } x.$$

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición arbitraria de $[a, b]$ y centremos nuestra atención en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. (Figura 6.5.6.) Tomando x_i^* como un punto arbitrario del i-ésimo subintervalo, tenemos

$$A(x_i^*)\ \Delta x_i = \text{volumen aproximado del } i\text{-ésimo estrato de líquido},$$

$$\sigma A(x_i^*)\ \Delta x_i = \text{peso aproximado de dicho volumen},$$

$$s(x_i^*) = \text{altura aproximada a la que hay que elevar dicho peso}.$$

Por tanto,

$$\sigma s(x_i^*)\ A(x_i^*)\ \Delta x_i = \text{trabajo aproximado (peso} \times \text{recorrido) necesario para bombear este estrato de líquido hasta la parte superior del depósito.}$$

El trabajo necesario para bombear todo el líquido puede ser aproximado por la suma de todos estos términos:

$$W \cong \sigma s(x_1^*)A(x_1^*)\ \Delta x_1 + \sigma s(x_2^*)A(x_2^*)\ \Delta x_2 + \ldots + \sigma s(x_n^*)A(x_n^*)\ \Delta x_n.$$

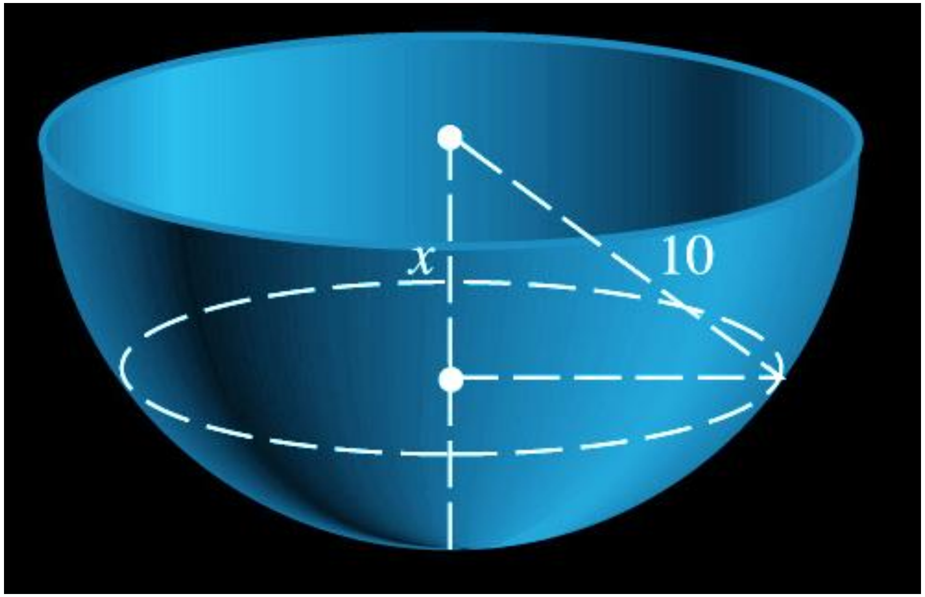
La suma de la derecha es una suma de Riemann, la cual, cuando $\|P\| \to 0$, converge a

$$\boxed{W = \int_a^b \sigma s(x)A(x)\ dx.}$$

Utilizaremos esta fórmula en el próximo ejemplo.

$$W = \sigma \int_a^b s(x)A(x)dx$$

Ejemplo 4 Un depósito de agua semiesférico de 10 metros de radio se vacía mediante bombeo (figura 6.5.7). Hallar el trabajo realizado cuando el nivel del agua desciende desde 2 a 4 metros por debajo de la cúspide del depósito cuando (a) la bomba está situada justamente en esa cúspide, (b) la bomba está situada 3 metros por encima del depósito.



Solución Como peso del agua se toma 10 000 newtons por metro cúbico (10 kN por m^3). No es difícil ver que la sección transversal a x metros de la parte más alta del depósito es un disco de radio $\sqrt{100 - x^2}$. Luego su área es

$$A(x) = \pi(100 - x^2).$$

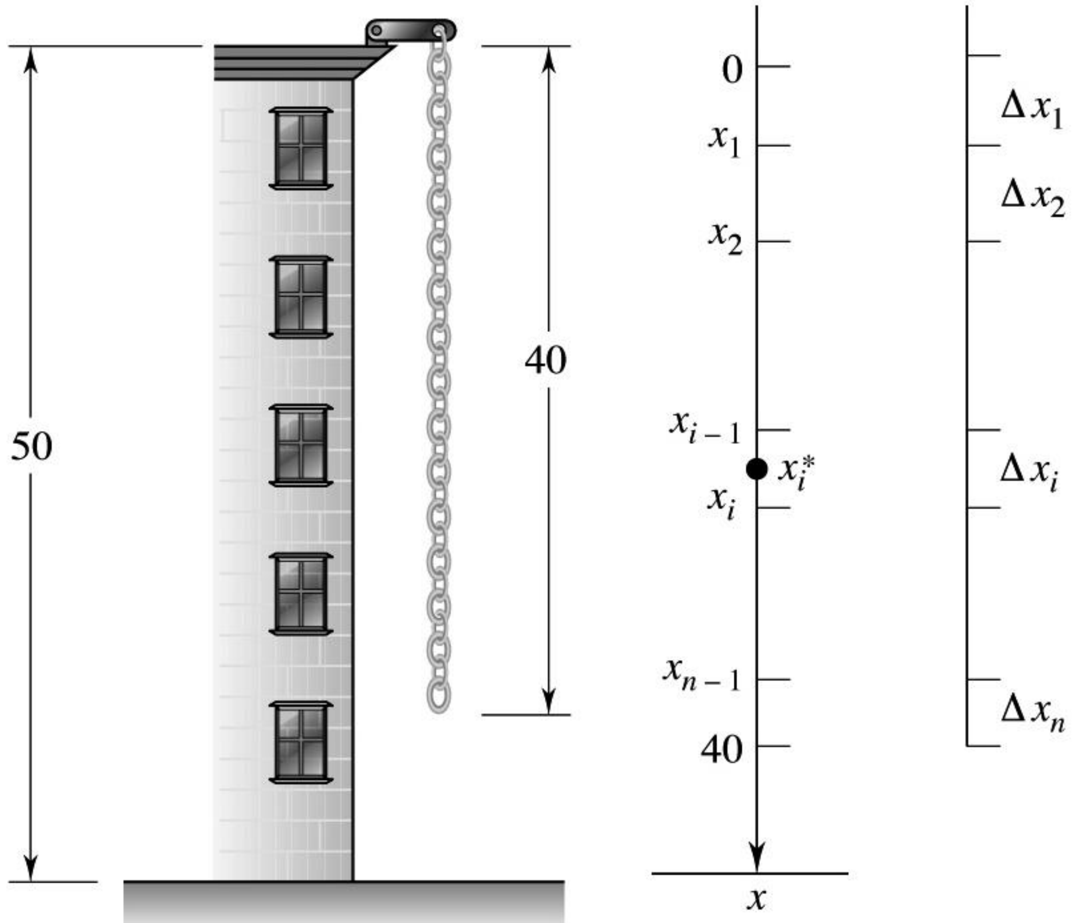
Para el apartado (a), tenemos que $s(x) = x$; de ahí que

$$W = \int_2^4 10\pi x(100 - x^2)\, dx = 5\,400\pi \text{ kN-metro.}$$

Para el apartado (b), tenemos que $s(x) = x + 3$, de ahí que

$$W = \int_2^4 10\pi(x + 3)(100 - x^2)\, dx = 10\,840\pi \text{ kN-metro.}$$

Ejemplo 5 Una cadena de 40 metros y 4 newtons de peso cuelga de una viga que sobresale desde la parte superior de un edificio de 50 metros (figura 6.5.8). ¿Cuánto trabajo se realiza cuando se recoge la cadena desde lo alto del edificio?



Solución Una partición $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[0, 40]$ dividirá la cadena en n tramos de longitud Δx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Para cada entero i, $1 \le i \le n$, sea x_i^* un punto arbitrario en el i-ésimo subintervalo (figura 6.5.9).

El i-ésimo tramo de la cadena pesa $4\ \Delta x_i$ y está aproximadamente a x_i^* metros de lo alto del edificio. Por consiguiente, el trabajo realizado al subir este tramo es $x_i^*\ (4\ \Delta x_i) = 4\ x_i^*\ \Delta x_i$ julios. Sumando el trabajo realizado al subir cada uno de los tramos hacia arriba obtenemos

$$4\ x_1^*\ \Delta x_1 + 4\ x_2^*\ \Delta x_2 + \cdots + 4\ x_n^*\ \Delta x_n \text{ julios.}$$

Esta es una suma de Riemann que, cuando $\|P\| \to 0$, converge a la integral definida $\int_0^{40} 4x\ dx$. Así, el trabajo realizado al recoger la cadena hacia lo alto del edificio es

$$\int_0^{40} 4x\ dx = [2x^2]_0^{40} = 3200 \text{ julios.}$$

Algunas Medidas de Conversión

$9.8 \text{ N} = 2.21 \text{ lb (libras fuerza)} \Rightarrow 1 \text{ N} = 0.225 \text{ lb} = 10^5 \text{ dinas}$

$1 \text{ lb} = 4.435 \text{ N}$

p. ej., en el problema 7, $2670 \text{ N} = 2670 \times 0.225 = 600.75 \approx 600 \text{ lb}$

$2.54 \text{ cm} \approx 2.5 \text{ cm} = 1 \text{ in (pulgada)}; 1 \text{ m} = 39.4 \text{ in}; 12 \text{ in} = 1 \text{ ft (pie)}$

p. ej., en el problema 7, $25.4 \text{ cm} \approx 25 \text{ cm} = 10 \text{ in}$

$1 \text{ J (julio)} = 10^7 \text{ ergios} = 0.738 \text{ ft-lb (pies-libras)}$

$1 \text{ HP (caballo de potencia)} = 550 \text{ ft-lb/seg} = 746 \text{ W (watts o vatios)}$

peso específico del agua: $10 \text{ kN/m}^3 = 10{,}000 \text{ N/m}^3 = 62.5 \text{ lb/ft}^3$

7. Un muelle helicoidal de automóvil de 25 cm de longitud se comprime 2,5 cm cuando se le aplica una fuerza de 2670 newtons. ¿Cuánto trabajo se debe realizar para comprimir el muelle a 12,5 cm?

By Hooke's law, we have $600 = -k(-1)$. Therefore $k = 600$.

The work required to compress the spring to 5 inches is given by

$$W = \int_{10}^{5} 600(x-10)\,dx = 600\left[\frac{1}{2}x^2 - 10x\right]_{10}^{5}$$

$$= 7500 \text{ in-lb, or } 625 \text{ ft-lb}$$

La integración en la solución anterior va de la longitud natural del muelle L = 10 in = 25 cm a la mitad de su longitud (1/2)L = 5 in = 12.5 cm, después de haber sido comprimido, de ahí el uso de la función lineal $x - 10 = x - L$ en el integrando.

Otra forma, tomando como referencia que el extremo derecho del muelle coincide con el origen y que la distancia de compresión de 5 pulgadas está a la izquierda del origen, viene dada por la siguiente integral:

$$W = \int_0^{-5} -F(x)dx = \int_0^{-5} 600x dx = 600\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{-5}$$

$$= 300(-5)^2 = 7,500 \text{ in-lb}$$

$$= 7,500 \text{ in-lb} \times 0.0254 \text{ m/in} \times 4.435 \text{ N/lb} \approx 844.8 \text{ J}$$

12. Un depósito cilíndrico vertical, de radio 2 metros y altura 6 metros está lleno de agua. Hallar el trabajo realizado al bombear el agua (a) hasta la parte superior del depósito; (b) hasta un nivel de 5 metros por encima de dicho depósito. (Se supondrá que el agua pesa 10 kN por metro cúbico.)

(a) $$W = \int_a^b \sigma s(x) A(x)\, dx = \int_0^6 62.5\, x\, 4\pi\, dx = 4,500\pi \text{ ft-lb}$$

(b) $$W = \int_0^6 62.5\,(x+5)\cdot 4\pi\, dx = 12,000\pi \text{ ft-lb.}$$

a) $$W = 4,500 \times 22/7 \text{ ft-lb} \times 0.3048 \text{ m/ft} \times 4.435 \text{ N/lb}$$
$$\approx 19,118 \text{ J} \qquad (= 5.3 \text{ Kilowatts por hora})$$

b) $$W = 12,000 \times 22/7 \text{ ft-lb} \times 0.3048 \text{ m/ft} \times 4.435 \text{ N/lb}$$
$$\approx 50,982 \text{ J} \qquad (= 14.2 \text{ Kilowatts por hora})$$

10. Cierto muelle tiene una longitud natural igual a L. Si W es el trabajo realizado al estirar el muelle desde L metros hasta $L + a$ metros, hallar el trabajo realizado al estirar el muelle (a) desde L a $L + 2a$ metros, (b) desde L hasta $L + na$ metros, (c) desde $L + a$ hasta $L + 2a$ metros, (d) desde $L + a$ hasta $L + na$ metros.

(a) $W = \int_0^a -kx\,dx = -\frac{k}{2}a^2 \implies \int_0^{2a} -kx\,dx = -\frac{k}{2}(2a)^2 = 4\left(-\frac{k}{2}a^2\right) = 4W$

(b) $\int_0^{na} -kx\,dx = -\frac{k}{2}n^2a^2 = n^2W$

(c) $\int_a^{2a} -kx\,dx = -\frac{k}{2}(4a^2 - a^2) = 3\left(-\frac{k}{2}a^2\right) = 3W$

(d) $\int_a^{na} -kx\,dx = \int_0^{na} -kx\,dx - \int_0^a -kx\,dx = n^2W - W = (n^2 - 1)W$

18. La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre una masa m situada a una distancia r del centro de la Tierra viene dada por la fórmula de Newton

$$F = -G\frac{mM}{r^2}$$

donde M es la masa de la Tierra y G es la constante gravitatoria. Hallar el trabajo realizado por la gravedad al mover una masa m desde $r = r_1$ hasta $r = r_2$.

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F\,dr = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GmM}{r^2}\,dr = \left[\frac{GmM}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = GmM\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$$

Ejercicios sugeridos, Sección 6.5

Prácticos: 7*, 11, 12*, 19

Teóricos: 10*, 15, 18*, 29