Aplicaciones de la Integral 6

Sección 6.6

Presión y fuerza de los fluidos

Una y Varias Variables 4ª Ed.

Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

6.6 PRESIÓN Y FUERZA DE LOS FLUIDOS

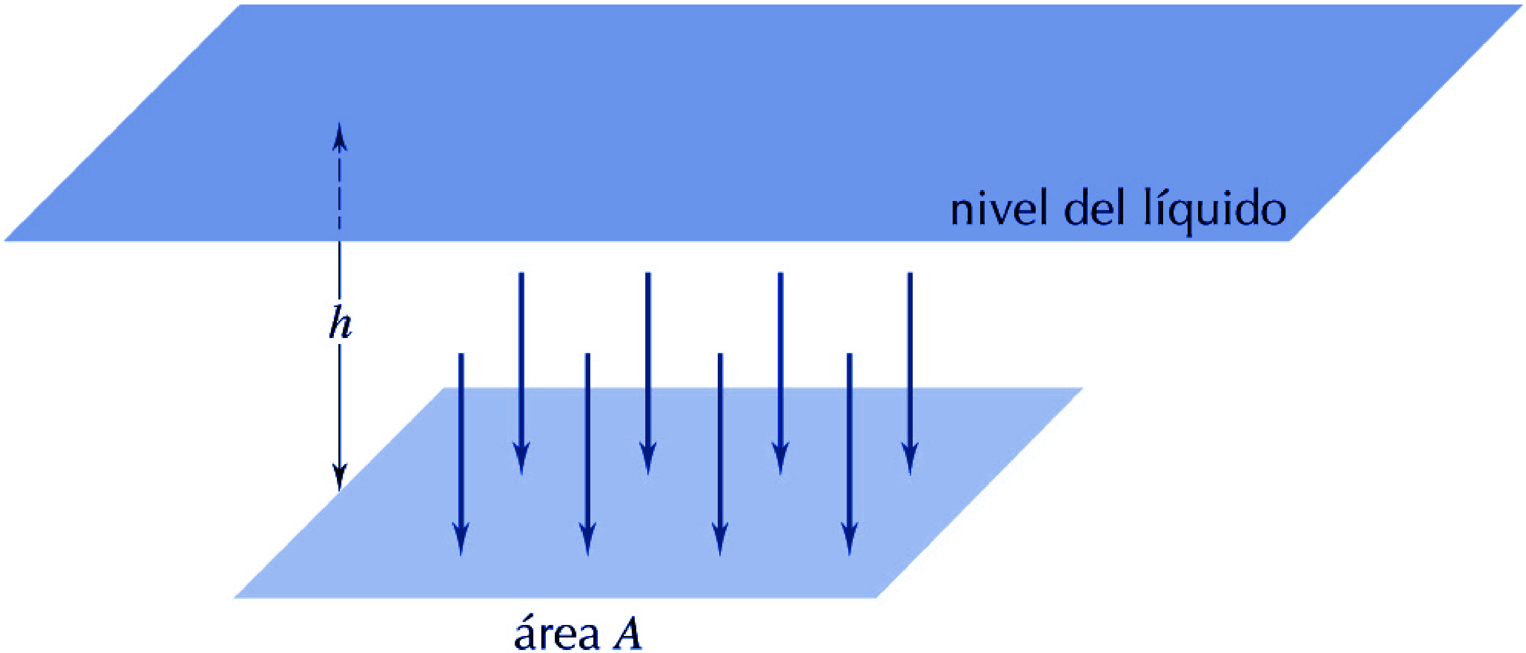
Cuando un objeto se sumerge en un líquido, experimenta una fuerza causada por la *presión* del líquido que lo rodea. El término *presión* indica una fuerza por unidad de área. Esta fuerza es perpendicular al objeto en todos sus puntos. La presión P a una profundidad h por debajo de la superficie de un líquido viene dada por

$$\boxed{P = \sigma h,}$$

donde σ es el *peso específico* del líquido (peso por unidad de volumen). Los pesos específicos de los líquidos se determinan experimentalmente.

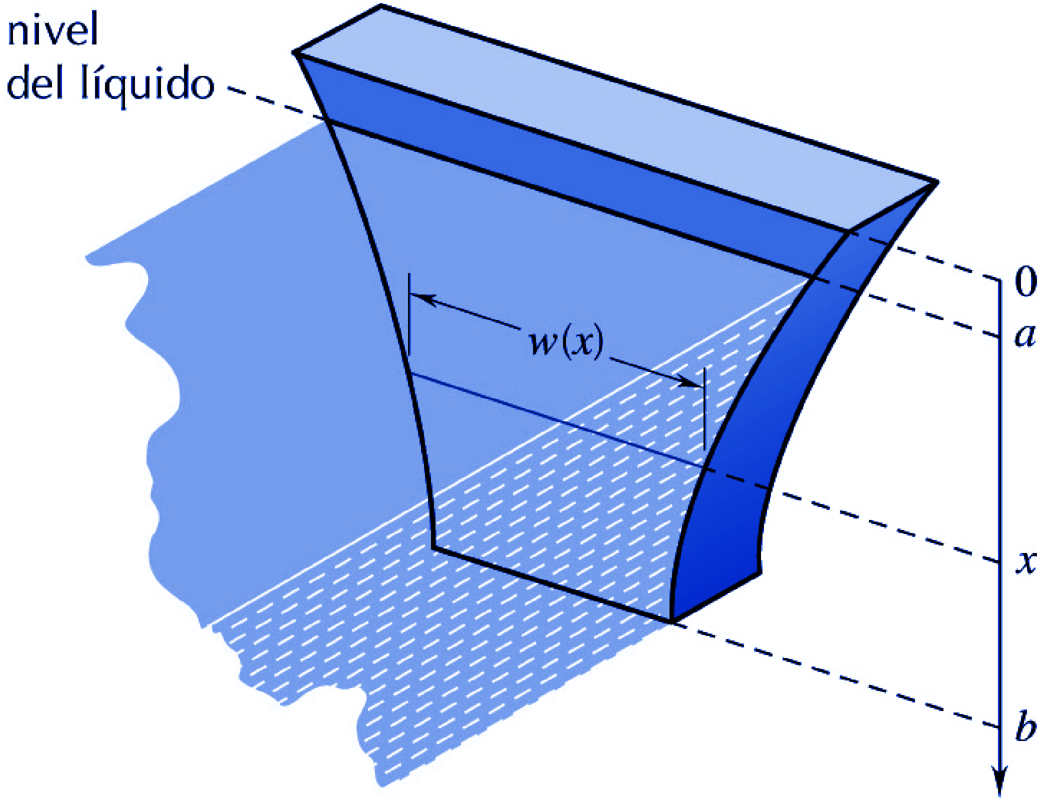
Cuando una superficie horizontal se sumerge en un líquido, la fuerza que se ejerce contra ella es el peso total del líquido que se encuentra por encima de ella (figura 6.6.1). Si la superficie horizontal tiene área A, si la profundidad es h y si el peso específico del líquido es σ, la fuerza viene dada por la fórmula

$$\boxed{F = \sigma h A = PA.}$$

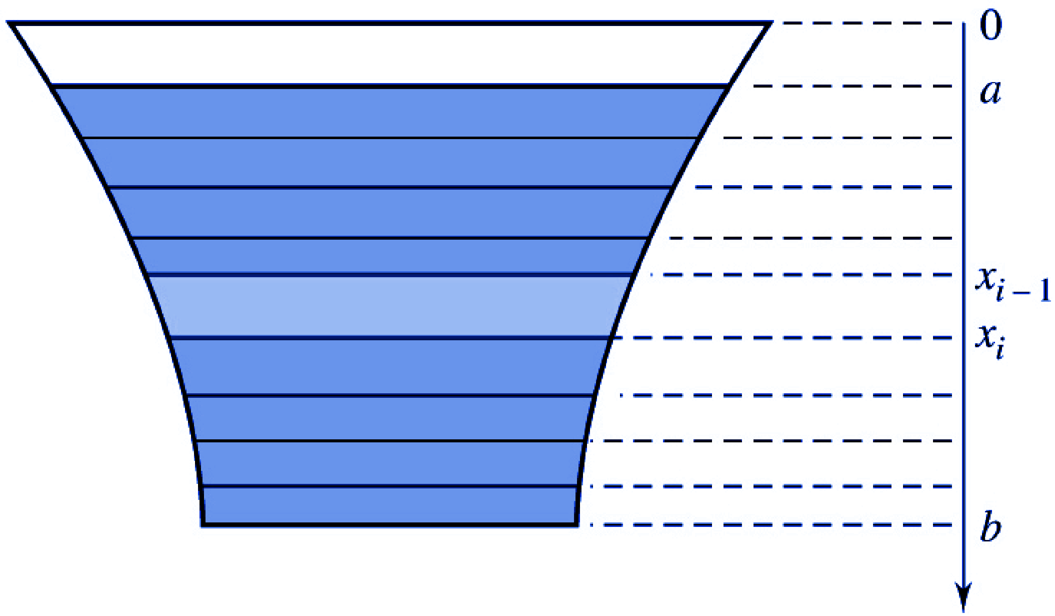


Observación sobre las unidades Si el área se mide en metros cuadrados, la profundidad en metros y el peso específico en newtons por metro cúbico, la fuerza del fluido se mide en newtons.

Por ejemplo, como el peso específico del agua es aproximadamente 10 kN por metro cúbico, la presión ejercida sobre una placa suspendida horizontalmente en agua a una profundidad de 6 metros es de 60 kN por metro cuadrado. Si la placa tiene un área de 4 metros cuadrados, la fuerza ejercida sobre uno de sus lados es de 240 kN.



Supongamos ahora que la placa está suspendida verticalmente en un líquido. En este caso es más difícil determinar la fuerza sobre la placa ya que la fuerza ejercida sobre su parte inferior es mayor que la ejercida sobre su parte superior. En la figura 6.6.2 hemos representado una pared vertical que soporta la masa de un líquido. (Se puede considerar que esta pared es una presa o una parte de la pared de un recipiente que contiene un líquido.) Queremos calcular la fuerza que ejerce el líquido sobre esta pared.



Como en el dibujo, supondremos que el líquido está situado entre las profundidades a y b y designaremos por $w(x)$ la anchura de la pared a la profundidad x. Una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ de norma pequeña subdivide la pared en n pequeñas franjas horizontales. (Figura 6.6.3.)

Podemos estimar la fuerza ejercida en la i-ésima franja tomando x_i^* como el punto intermedio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces

$$w(x_i^*) = \text{ancho aproximado de la } i\text{-ésima franja}$$

$$w(x_i^*)\ \Delta x_i = \text{área aproximada de la } i\text{-ésima franja}$$

Dado que esta franja es estrecha, todos sus puntos están aproximadamente a la misma profundidad x_i^*. Luego, aplicando (6.6.1), podemos estimar la fuerza ejercida sobre la i-ésima franja mediante el producto

$$\sigma x_i^* w(x_i^*)\ \Delta x_i.$$

Sumando todas estas estimaciones obtenemos una estimación para la pared entera:

$$F \cong \sigma x_1^* w(x_1^*)\ \Delta x_1 + \sigma x_2^* w(x_2^*)\ \Delta x_2 + \cdots + \sigma x_n^* w(x_n^*)\ \Delta x_n.$$

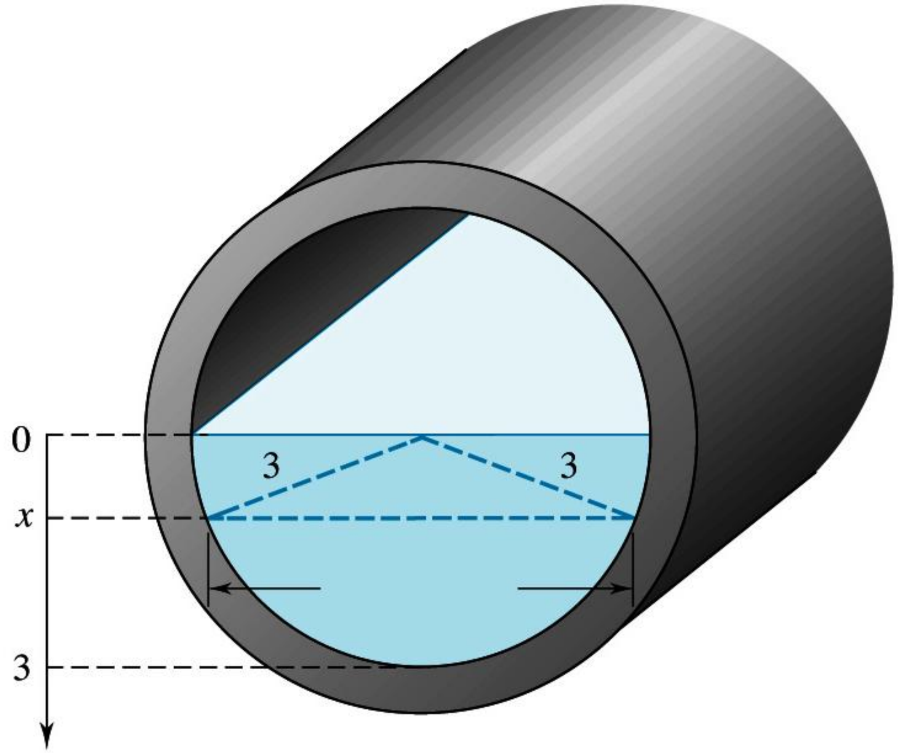
La suma de la derecha es una suma de Riemann para la integral

$$\int_a^b \sigma\, x w(x)\ dx$$

y como tal converge a dicha integral cuando $\|P\| \to 0$. Luego tenemos

$$\boxed{\text{Fuerza contra la pared } = \int_a^b \sigma x w(x)\ dx.}$$

Ejemplo 1 Un conducto circular de agua (figura 6.6.4) de 6 metros de diámetro se encuentra semilleno. Hallar la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta que cierra el conducto.



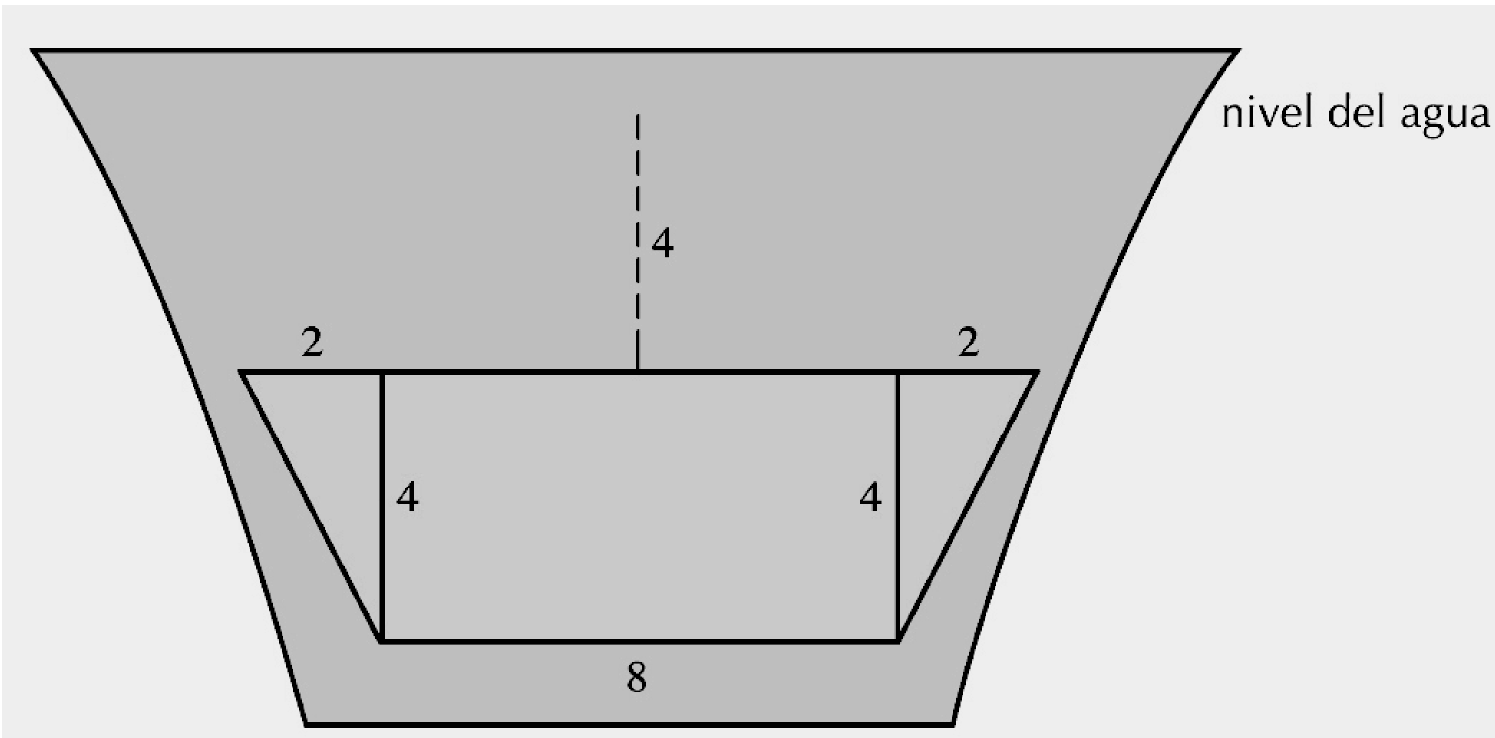
Solución Aquí

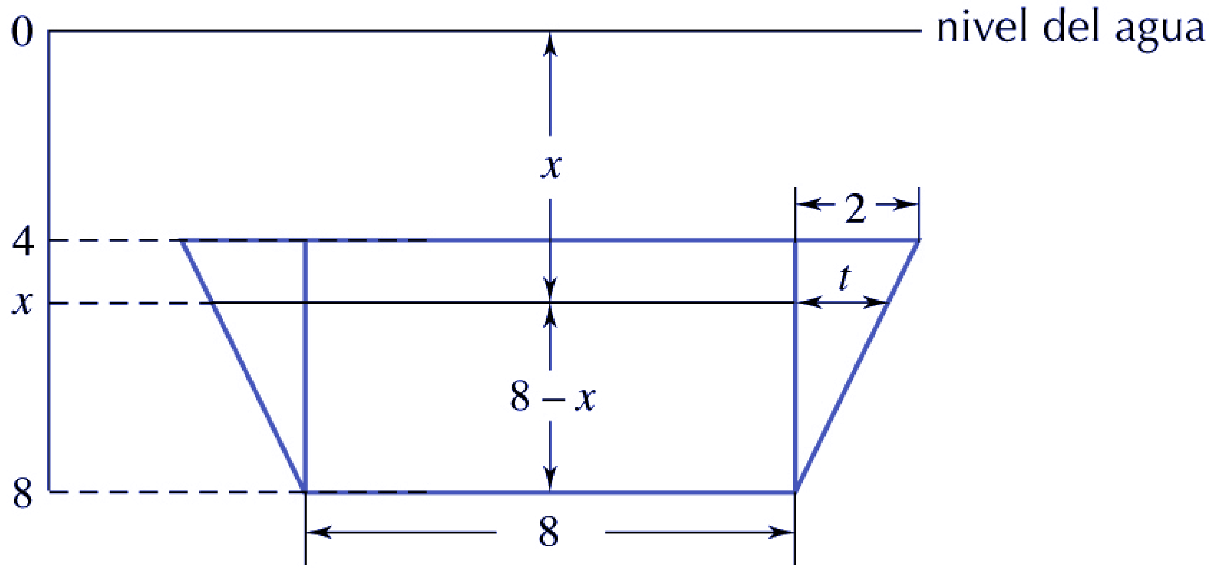
$$w(x) = 2\sqrt{9-x^2} \quad \text{y} \quad \sigma = 10\,000 \text{ newtons por metro cúbico.}$$

La fuerza sobre la compuerta es

$$F = \int_0^3 (10\,000)x(2\sqrt{9-x^2})dx = 10\,000\int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\, dx = 180\,000 \text{ newtons.}$$

Ejemplo 2 Una placa de metal con forma de trapecio queda fijada a una presa vertical tal y como se representa en la figura 6.6.5. Las dimensiones señaladas en la misma vienen dadas en metros; tomaremos aquí 9 800 newtons por metro cúbico para el peso específico del agua. Hallar la fuerza hidrostática sobre la placa.





Solución Primero definiremos el ancho de la placa a la profundidad de x metros. Por triángulos semejantes (ver figura 6.6.6)

$$t = \tfrac{1}{2}(8-x) \quad \text{luego} \quad w(x) = 8 + 2t = 16 - x.$$

Por tanto, la fuerza sobre la placa es

$$\int_4^8 9\,800x(16-x)\,dx = 9\,800\int_4^8 (16x - x^2)dx = 9\,800[8x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_4^8 \cong 2\,300\,000 \text{ newtons.}$$

21. Relacionar la fuerza sobre una presa con el centroide de la superficie de la parte sumergida de dicha presa.

22. Dos placas de metal idénticas quedan fijadas a la pared vertical de una presa. El centroide de la primera placa queda a una profundidad h_1 y el centroide de la segunda a una profundidad h_2. Comparar las fuerzas sobre las dos placas. SUGERENCIA: Ver el ejercicio 21.

21) Sea F la fuerza del agua ejercida sobre la pared de una presa

$$\Rightarrow F = \sigma \int_a^b x w(x) dx$$

siendo σ el peso específico del agua, x la profundidad que corresponde al ancho $w(x)$ infinitesimal de la presa y $[a, b]$ el intervalo finito de líquido que retiene la pared de la presa.

Si A denota el área de la región de pared sumergida en agua

$$\Rightarrow A = \int_a^b w(x)dx \quad \wedge \quad \bar{x}A = \int_a^b xw(x)dx$$

siendo $\bar{x}$ la profundidad a la cual se encuentra el centroide de A. Entonces la relación entre la fuerza y el centroide es

$$F = \sigma \int_a^b xw(x)dx = \sigma \bar{x} A$$

22) Por ser idénticas, ambas placas tienen la misma área, sea A ; también σ es la misma pues ambas están sumergidas en agua

$$\Rightarrow F_1 = \sigma \bar{x}_1 A_1 = \sigma h_1 A \quad \wedge \quad F_2 = \sigma \bar{x}_2 A_2 = \sigma h_2 A$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{\sigma h_2 A}{\sigma h_1 A} = \frac{h_2}{h_1} \Rightarrow F_2 = \frac{h_2}{h_1} F_1$$

p. ej., si $h_2 = 2h_1 \Rightarrow F_2 = 2F_1$, es decir, al doble de profundidad, la fuerza sobre la 2da placa es el doble que la fuerza sobre la 1era. Otras interpretaciones son análogas.

Ejercicios sugeridos, Sección 6.6

Prácticos: 2, 3, 7, 11

Teóricos : 18, 20, 21, 22*

TEMAS IMPORTANTES DEL CAPÍTULO

6.1 Algo más acerca del área

6.2 Cálculo de volúmenes por secciones paralelas; discos y arandelas

6.3 Cálculo de volúmenes por el método de las capas

6.4 Centroide de una región; teorema de Pappus relativo a volúmenes

principios para hallar el centroide de una región (pp. 344-345)

$$\bar{x}A = \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx, \qquad \bar{y}A = \int_a^b \tfrac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx$$

teorema de Pappus relativo a volúmenes (p. 347)

centroide de un sólido de revolución: $\bar{x}V_x = \int_a^b \pi x[f(x)]^2\, dx$, $\bar{y}V_y = \int_a^b \pi x[f(x)]^2\, dx$

6.5 La noción de trabajo

Ley de Hooke (p. 352) vaciado de un depósito (p. 354)

6.6 Presión y fuerzas de fluidos

Fuerza sobre una pared vertical = $\int_a^b \sigma\, x\, w(x)\, dx$ (p. 360)