Funciones Trascendentes 7

Sección 7.1

Funciones inyectivas e inversas

Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

Algunos números reales verifican ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros:

$$\tfrac{3}{5} \text{ verifica la ecuación } 5x - 3 = 0.$$

$$\sqrt{2} \text{ verifica la ecuación } x^2 - 2 = 0.$$

A estos números se les llama *algebraicos*. Existen, sin embargo, otros números que no son algebraicos, entre ellos el número π. A tales números se les llama *trascendentes*.

Algunas funciones satisfacen ecuaciones polinómicas con coeficientes polinómicos:

$$f(x) = \frac{x}{\pi x + \sqrt{2}} \quad \text{satisface la ecuación} \quad (\pi x + \sqrt{2})f(x) - x = 0,$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 3x^2 \quad \text{satisface la ecuación} \quad [f(x)]^2 + 6x^2 f(x) + (9x^4 - 4x) = 0.$$

A estas funciones se las llama *algebraicas*. Sin embargo, también existen funciones que no son algebraicas; se las llama *trascendentes*. Las funciones que estudiaremos en este capítulo (el logaritmo, la exponencial y las funciones trigonométricas y sus inversas) son todas funciones trascendentes.

7.1 FUNCIONES INYECTIVAS; INVERSAS

Funciones inyectivas

Una función puede tomar el mismo valor en distintos puntos de su dominio. Las funciones constantes, por ejemplo, toman el mismo valor en todos los puntos de su dominio. La función cuadrado $f(x) = x^2$ toma el mismo valor en $-c$ que en c; lo mismo pasa con la función valor absoluto $g(x) = |x|$. La función

$$f(x) = 1 + (x - 3)(x - 5)$$

toma el mismo valor en $x = 5$ que en $x = 3$:

$$f(3) = 1, \quad f(5) = 1.$$

Las funciones para las cuales *no* ocurre esta clase de repeticiones se denominan *inyectivas*.

DEFINICIÓN 7.1.1

Se dice que una función f con dominio D es *inyectiva* si y sólo si no existe ningún par de puntos de su dominio en los que la función tome el mismo valor:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 \neq x_2, \quad x_1, x_2 \in D.$$

Equivalentemente, f es inyectiva sii

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \quad \text{implica que} \quad x_1 = x_2}$$

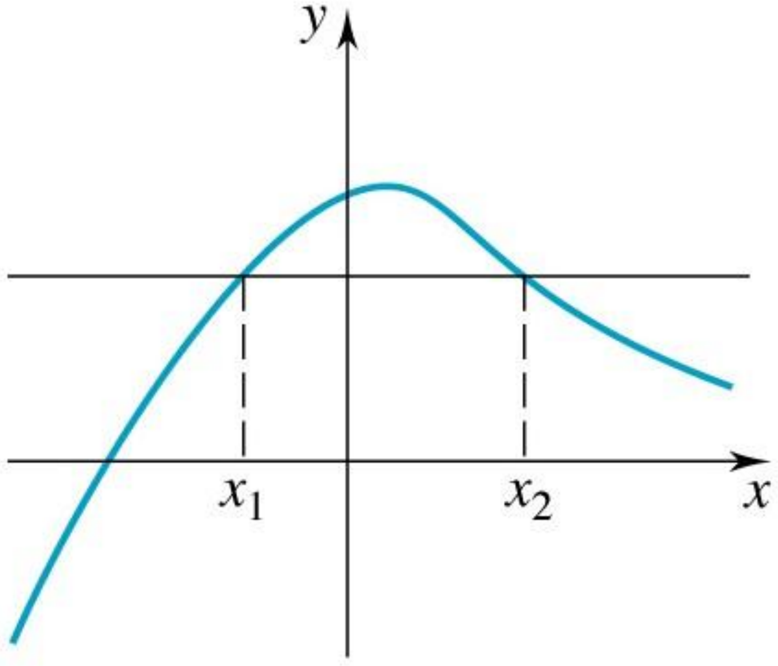
para cualquier par de puntos x_1, x_2 en el dominio de f.

Las funciones

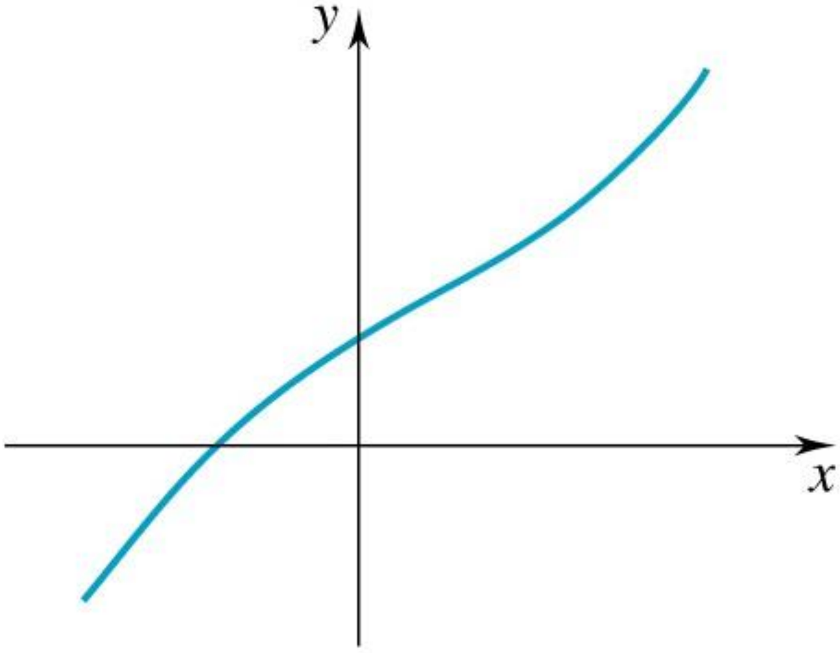
$$f(x) = x^3 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

son ambas inyectivas. La función que eleva al cubo es inyectiva puesto que no existen dos números distintos con el mismo cubo. La función raíz cuadrada es inyectiva puesto que no hay dos números positivos que tengan la misma raíz cuadrada.

Existe un criterio geométrico sencillo para la inyectividad, denominado *prueba de la recta horizontal*. Se mira la gráfica de la función y si alguna recta horizontal corta dicha gráfica más de una vez entonces la función no es inyectiva (figura 7.1.1). Por el contrario, si ninguna recta horizontal corta la gráfica en más de un punto, la función es inyectiva (figura 7.1.2).



f no es inyectiva: $f(x_1) = f(x_2)$



f es inyectiva

Inversas

Empezaremos con un teorema relativo a las funciones inyectivas.

TEOREMA 7.1.2

Si f es una función inyectiva, existe una y sólo una función g, definida sobre la imagen de f y que satisface la igualdad

$$f(g(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en la imagen de } f.$$

Demostración La demostración es fácil. Puesto que x pertenece a la imagen de f, f debe tomar el valor x en algún número. Dado que f es inyectiva, sólo puede existir uno de tales números. Llamémosle $g(x)$.

La función que hemos llamado g en el teorema se denomina *inversa* de f y se denota habitualmente por f^{-1}.

DEFINICIÓN 7.1.3 FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función inyectiva. La *inversa* de f, simbolizada por f^{-1}, es la única función que está definida en la imagen de f y verifica la igualdad

$$\boxed{f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en la imagen de } f.}$$

Observación La notación f^{-1} para la función inversa de f es habitual. Desafortunadamente, es peligroso confundirla con la recíproca de f, esto es, con $1/f(x)$. El "-1" en la notación de la inversa de f *no es un exponente*: $f^{-1}(x)$ *no significa* $1/f(x)$. En aquellos casos en que queramos expresar $1/f(x)$ utilizando el exponente -1, escribiremos $[f(x)]^{-1}$.

Ejemplo 1 Hemos visto que la función cubo

$$f(x) = x^3$$

es inyectiva. Hallar su inversa.

Solución Sea $y = f^{-1}(x)$ y resolvamos la ecuación $f(y) = x$ en y:

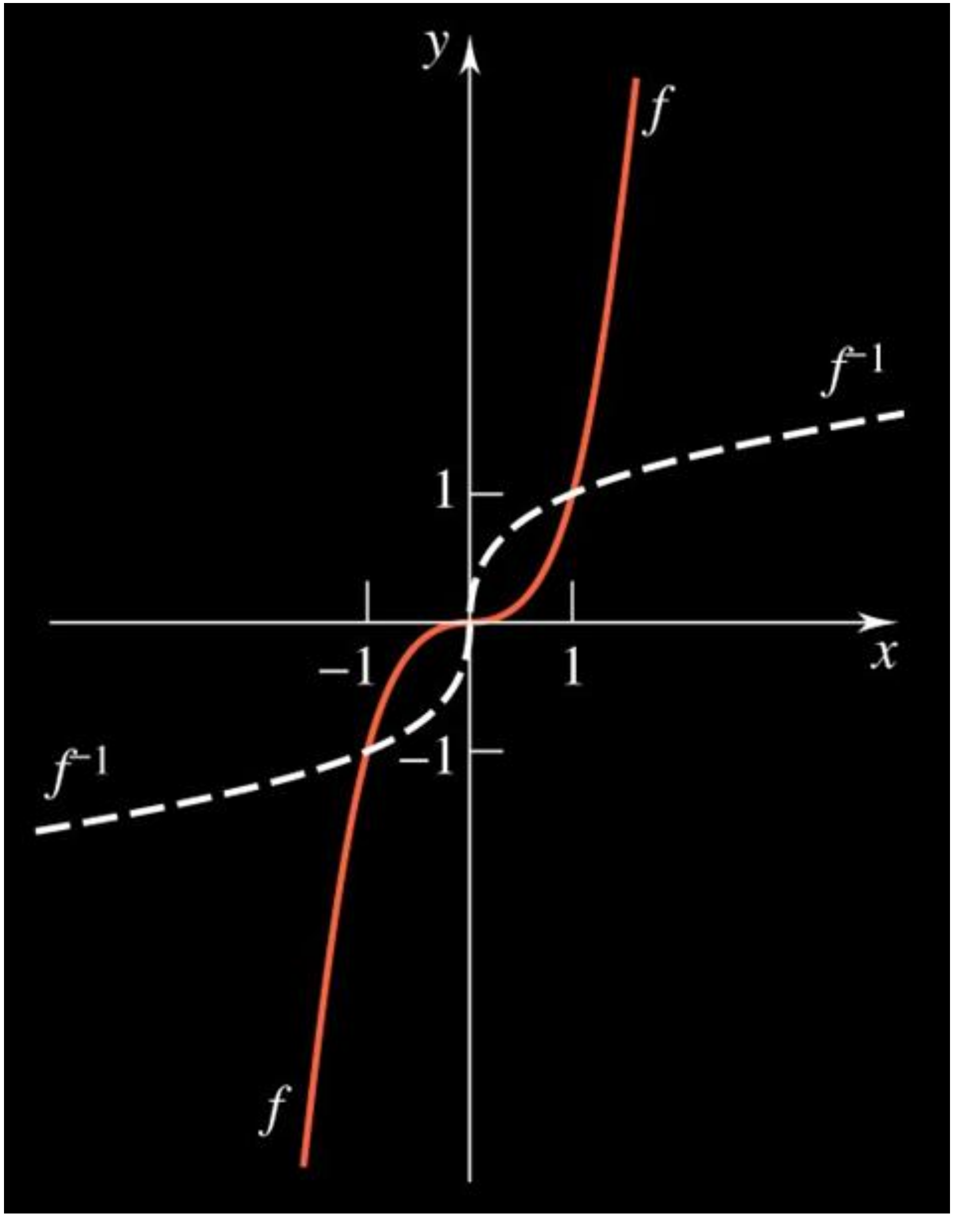
$$\begin{aligned} f(y) &= x \\ y^3 &= x \qquad \text{(f es la función cubo)} \\ y &= x^{1/3}. \end{aligned}$$

Sustituyendo y por $f^{-1}(x)$, obtenemos

$$f^{-1}(x) = x^{1/3}.$$

La inversa de la función cubo es la raíz cúbica. Las gráficas de $f(x) = x^3$ y $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ se muestran en la figura 7.1.3.

Observación Hemos sustituido f^{-1} por y para simplificar los cálculos. Es más fácil trabajar con el símbolo y que con la cadena de símbolos $f^{-1}(x)$.


y
f
f^{-1}
1
−1
1
x
−1
f^{-1}
f

Ejemplo 2 Demostrar que la función lineal

$$f(x) = 3x - 5$$

es inyectiva. Hallar su inversa.

Solución Para ver que es inyectiva, supongamos que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Entonces

$$3x_1 - 5 = 3x_2 - 5$$
$$3x_1 = 3x_2$$
$$x_1 = x_2.$$

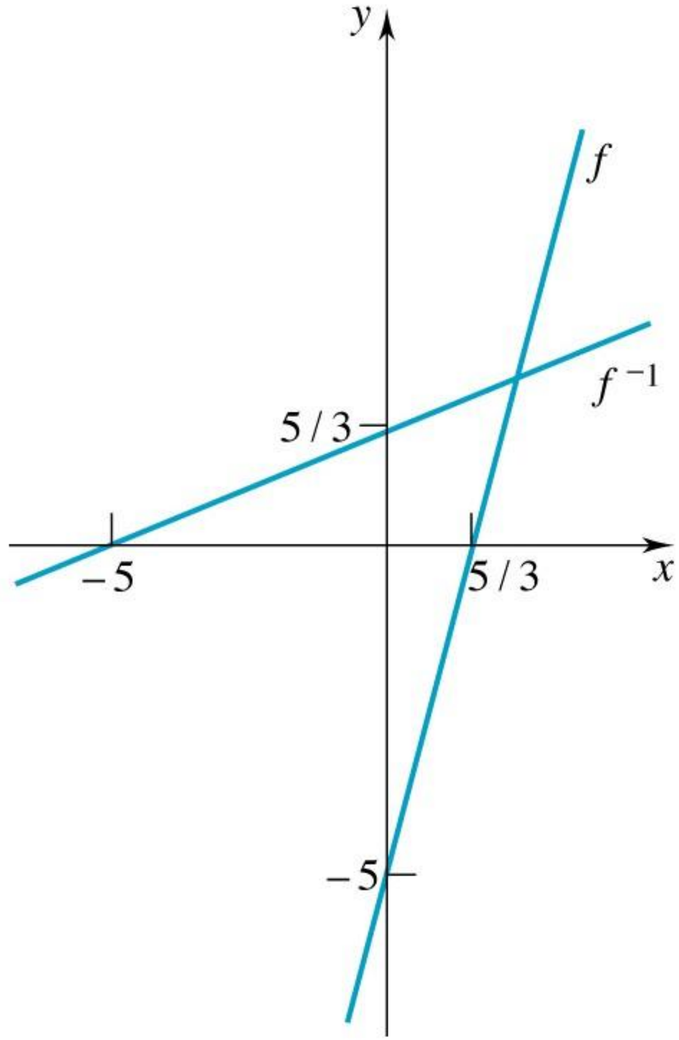
La función es inyectiva puesto que

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{implica que } x_1 = x_2.$$

(Otra manera de ver que esta función es inyectiva es observar que su gráfica es una recta de pendiente 3, por lo que no puede ser cortada más de una vez por ninguna recta horizontal.)

Ahora hallemos su inversa. Para ello definimos $y = f^{-1}(x)$ y resolvemos la ecuación $f(y) = x$ en y:

$$\begin{aligned} f(y) &= x \\ 3y - 5 &= x \\ 3y &= x + 5 \\ y &= \tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3}. \end{aligned}$$



Sustituyendo y por $f^{-1}(x)$, obtenemos

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3}.$$

En la figura 7.1.4 se muestran las gráficas de f y f^{-1}.

Ejemplo 3 Demostrar que la función

$$f(x) = (1 - x^3)^{1/5} + 2$$

tiene una inversa hallando directamente $f^{-1}(x)$.

Solución Sea $y = f^{-1}(x)$ y resolvemos en y la ecuación $f(y) = x$:

$$\begin{aligned} f(y) &= x \\ (1 - y^3)^{1/5} + 2 &= x \\ (1 - y^3)^{1/5} &= x - 2 \\ 1 - y^3 &= (x - 2)^5 \\ y^3 &= 1 - (x - 2)^5 \\ y &= [1 - (x - 2)^5]^{1/3}. \end{aligned}$$

Sustituyendo y por $f^{-1}(x)$, obtenemos

$$f^{-1}(x) = [1 - (x - 2)^5]^{1/3}.$$

En el capítulo 4, sección 4.2, estudiamos funciones crecientes y decrecientes: una función f es *creciente* si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$; f es *decreciente* si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$; x_1 y x_2 en el dominio de f.

TEOREMA 7.1.4

Si f es una función o bien creciente o bien decreciente, entonces es inyectiva y tiene una inversa.

Demostración Supongamos que f es creciente y sean x_1 y x_2 puntos en el dominio de f con $x_1 \neq x_2$. Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$; si $x_1 > x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$. En cualquier caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$ y por tanto f es inyectiva. La demostración para una función f decreciente se realiza del mismo modo.

El teorema 7.1.4 tiene una aplicación importante para las funciones diferenciables cuyos dominios son intervalos. Por el teorema 4. 2.3, si f es continua en un intervalo I y si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) en el interior de I, entonces f es creciente (decreciente) en I. En el ejercicio 62 de la sección 4.2 se pedía demostrar que el teorema 4.2.3 sigue siendo válido si $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) en el interior de I con $f'(x) = 0$ para, como mucho, un número finito de valores de x.

Ejemplo 4 Cada una de las siguientes funciones tiene una inversa.

(a) $f(x) = 3x - 5$ $\qquad f'(x) = 3 > 0.$

(b) $g(x) = 4 - 2x^3$ $\qquad \begin{cases} g'(x) = -6x^2 \leq 0; \\ g'(x) = 0 \text{ sii } x = 0. \end{cases}$

(c) $F(x) = x^5 + 2x^3 + 3x - 4$ $\qquad F'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 3 > 0.$

(d) $G(x) = \cos x, \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq \pi$ $\qquad G'(x) = -\text{sen}\, x < 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < \pi$

Hemos hallado la inversa de f en el ejercicio 2. Se puede verificar que $g^{-1}(x) = [(4 - x)/2]^{1/3}$. Para hallar la inversa de F tendríamos que resolver en y la ecuación

$$y^5 + 2y^3 + 3y - 4 = x.$$

Pero no está nada claro que podamos hacerlo. Por tanto, tenemos una situación en la que sabemos que F^{-1} existe, pero es posible que no seamos capaces de obtener una "fórmula" para ella. Lo mismo ocurre con G. Las funciones trigonométricas inversas se definen y estudian en la sección 7.7.

Supongamos que la función f tiene una inversa. Entonces, por definición, f^{-1} satisface la ecuación

(7.1.5) $$\boxed{f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en la imagen de } f.}$$

También es verdad que

(7.1.6) $$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f.}$$

Demostración Tomemos x en el dominio de f y definamos $y = f(x)$. Puesto que y está en la imagen de f,

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Esto significa que

$$f(f^{-1}(f(x))) = f(x),$$

es decir, que f toma el mismo valor en $f^{-1}(f(x))$ que en x. Con f inyectiva esto sólo puede ocurrir si

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

La ecuación (7.1.6) nos dice que f^{-1} "deshace" el trabajo de f:

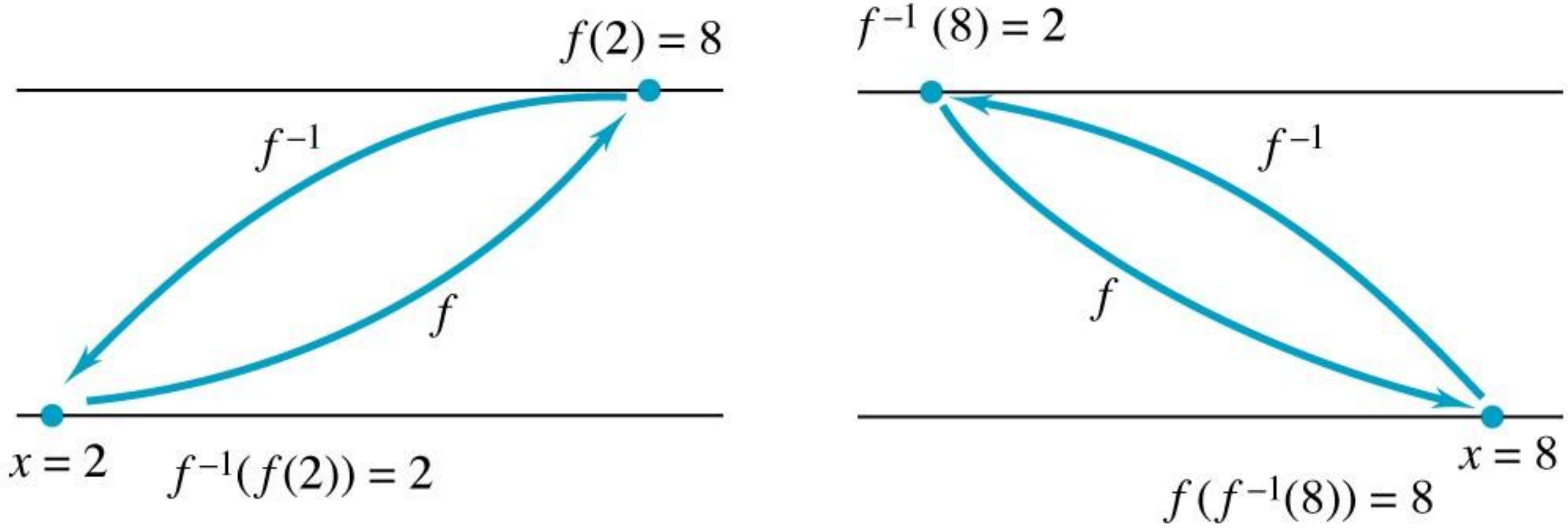
$$\text{si} \quad f \text{ envía } x \text{ a } f(x), \qquad \text{entonces} \quad f^{-1} \text{ devuelve } f(x) \text{ a } x.$$

La figura 7.1.5 ilustra esta relación para el caso de $f(x) = x^3$, $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y $x = 2$.

La ecuación (7.1.5) nos dice que f "deshace" el trabajo de f^{-1}:

$$\text{si} \quad f^{-1} \text{ envía } x \text{ a } f^{-1}(x), \qquad \text{entonces} \quad f \text{ devuelve } f^{-1}(x) \text{ a } x.$$

Esto se ilustra en la figura 7.1.6 con $f(x) = x^3$, $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y $x = 8$.

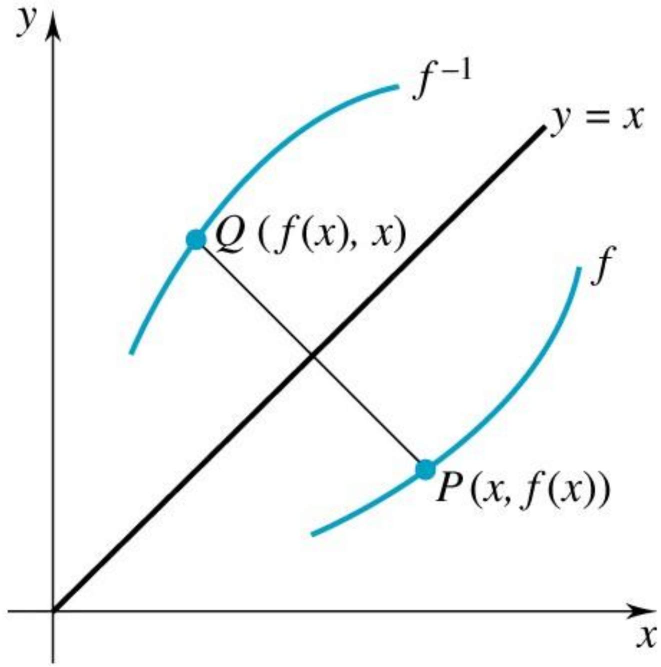


Finalmente, hay que destacar que las ecuaciones (7.1.5) y (7.1.6) nos dicen que

$$\boxed{\begin{aligned} \text{dominio de } f^{-1} &= \text{imagen de } f \\ \text{imagen de } f^{-1} &= \text{dominio de } f. \end{aligned}}$$

Las gráficas de f y f^{-1}

Existe una relación importante entre la gráfica de una función inyectiva f y la gráfica de f^{-1}. (Ver figura 7.1.7.) La gráfica de f consiste en los puntos de la forma P: $(x, f(x))$. Puesto que f^{-1} toma el valor x en $f(x)$, la gráfica de f^{-1} consiste en los puntos de la forma Q: $(f(x), x)$.

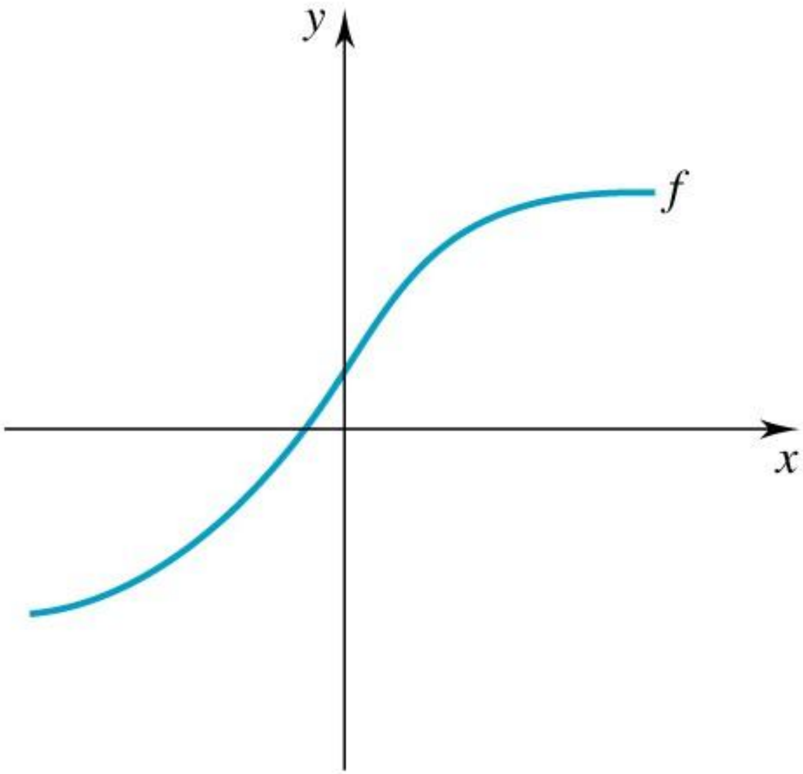


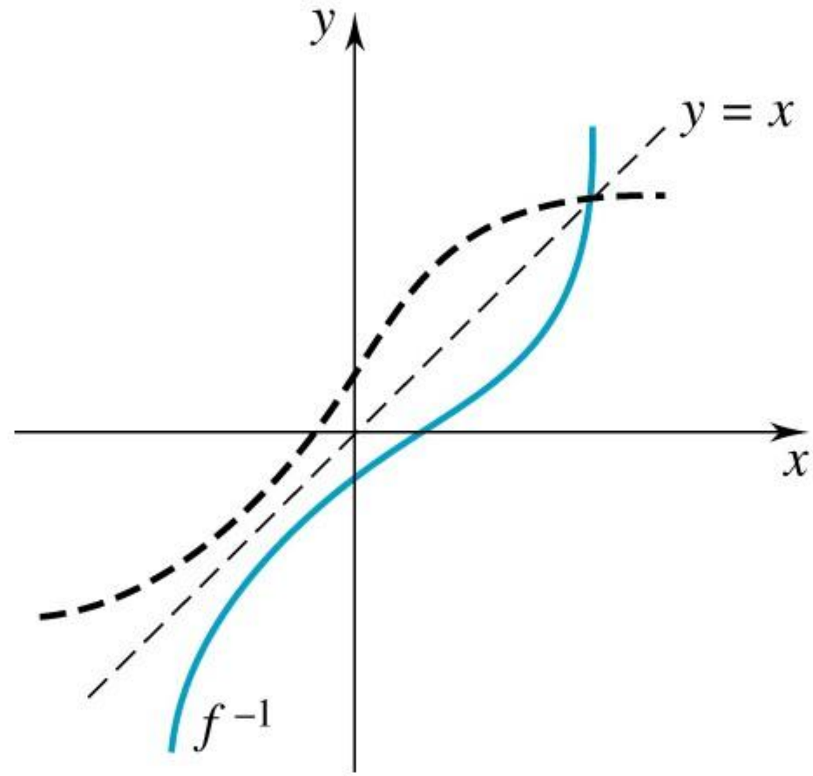
Supongamos ahora que la escala del eje y es la misma que la del eje x. Entonces, para cada x, los puntos $(x, f(x))$ y $(f(x), x)$ son simétricos respecto de la recta $y = x$. Por tanto,

> la gráfica de f^{-1} es la gráfica de f reflejada en la recta $y = x$.

Ejemplo 5 Dada la gráfica de f en la figura 7.1.8, dibujar la gráfica de f^{-1}.

Solución Dibujemos primero la recta $y = x$. Consideremos entonces la gráfica de f reflejada respecto de esta recta. Ver figura 7.1.9.





Continuidad y diferenciabilidad de inversas

Sea f una función inyectiva. Entonces f tiene una inversa f^{-1}. Supongamos, además, que f es continua. Dado que la gráfica de f no tiene "agujeros" ni "interrupciones", y como la gráfica de f^{-1} es simplemente el reflejo de la gráfica de f en la recta $y = x$, podemos concluir que la gráfica de f^{-1} no tiene agujeros ni interrupciones. Es decir, f^{-1} debe ser también continua. Enunciaremos formalmente este resultado; en el apéndice B3 se da una demostración.

TEOREMA 7.1.7

Sea f una función inyectiva definida en un intervalo I. Si f es continua, su inversa f^{-1} también es continua.

Supongamos ahora que f es diferenciable. ¿Es f^{-1} necesariamente diferenciable? La respuesta es sí, siempre que f' no tome el valor 0. Por ahora tomaremos como cierto este resultado y describiremos cómo calcular la derivada de f^{-1}.

Para simplificar la notación, haremos $f^{-1} = g$. Luego,

$$f(g(x)) = x \qquad \text{para todo} \qquad x \text{ en la imagen de } f.$$

La diferenciación nos da

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = 1.$$

y por tanto

$$f'(g(x))g'(x) = 1. \qquad \text{(por la regla de la cadena; suponemos que } f \text{ y } g \text{ son diferenciables)}$$

Luego,

$$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}. \qquad \text{(suponemos que } f' \text{ nunca es 0)}$$

Sustituyendo g por f^{-1}, obtenemos

(7.1.8)

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}.}$$

Esta es la fórmula habitual para la derivada de una inversa. A partir de esta fórmula debe quedar claro el porqué de la necesidad de suponer que f' no toma el valor 0.

Antes de dar algunos ejemplos del uso de esta fórmula, la escribiremos de otra manera más clara:

TEOREMA 7.1.9

Supongamos que f tiene una inversa y es diferenciable. Sea a un punto en el dominio de f y sea $b = f(a)$. Si $f'(a) \neq 0$, entonces $(f^{-1})'(b)$ existe y viene dada por

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.}$$

Observación Hay que darse cuenta de que $(f^{-1})'(b)$ se obtiene calculando f' en a, no en b. Observar también que $a = f^{-1}(b)$ y por tanto

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]},$$

que es simplemente (7.1.8) con $x = b$.

Ejemplo 6 Sea $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x$. (a) Demostrar que f tiene una inversa. (b) Demostrar que 9 está en la imagen de f y calcular $(f^{-1})'(9)$.

Solución (a) El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y

$$f'(x) = 3x^2 + \tfrac{1}{2} > 0$$

para todo x. Luego, por el teorema 7.1.4, f tiene una inversa.

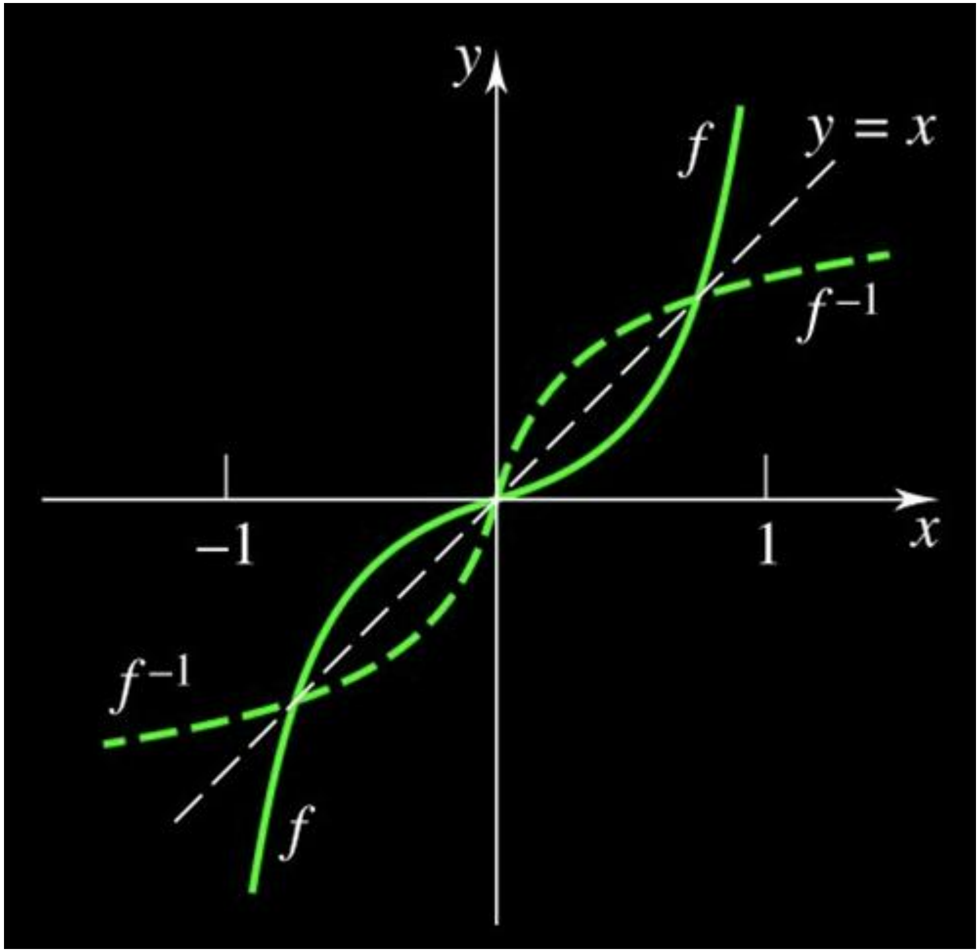
(b) Es fácil comprobar que la imagen de f es también $(-\infty, \infty)$. Luego 9 pertenece a la imagen de f. Para calcular $(f^{-1})'(9)$ debemos hallar primero el valor a tal que $f(a) = 9$. La solución de

$$a^3 + \tfrac{1}{2}a = 9$$

es $a = 2$. Luego

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3(2)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{25}.$$

En la figura 7.1.10 se muestran f y f^{-1}.


y
f
y = x
f^{-1}
−1
1
x
f^{-1}
f

Ejemplo 7 La función $f(x) = x - \cos x$ para $x \in (-\pi, \pi)$ es diferenciable. (a) Demostrar que f tiene una inversa. (b) Determinar dónde f^{-1} es diferenciable. (c) Si es posible, calcular $(f^{-1})'(-1)$.

Solución (a) Dado que $f'(x) = 1 + \operatorname{sen} x \geq 0$ para $-\pi < x < \pi$ y $1 + \operatorname{sen} x = 0$ solamente en $x = -\pi/2$, se deduce que f tiene una inversa. En la figura 7.1.11 se muestran las gráficas de f y f^{-1}.

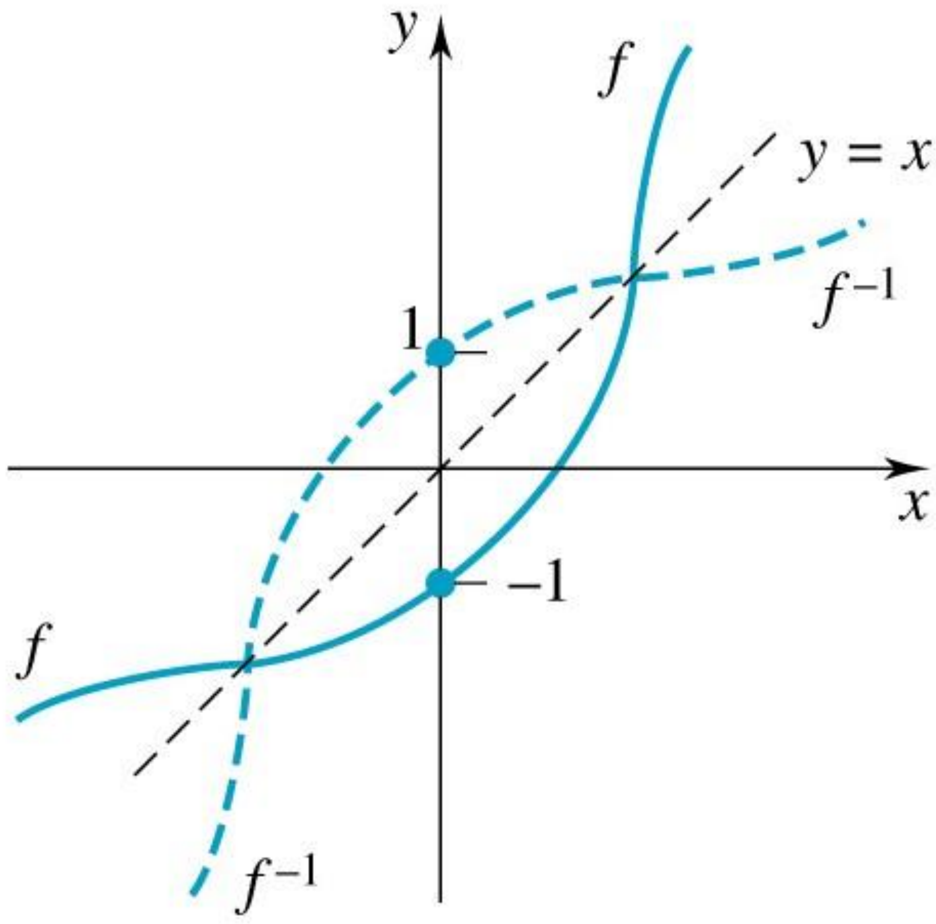
(b) Dado que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}.$$

y $f'(-\pi/2) = 0$, f^{-1} será diferenciable en todo x tal que $f^{-1}(x) \neq -\pi/2$.

(c) Dado que f crece desde $-\pi + 1 \approx -2{,}14$ a $\pi - 1 \approx 2{,}14$, -1 está en la imagen de f. Para calcular $(f^{-1})'(-1)$ debemos hallar primero el número a tal que $f(a) = -1$. Ya sea observando la gráfica de f o por tanteo, hallamos que $a = 0$. Luego,

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 + \operatorname{sen} 0} = 1.$$


y
f
y = x
f^{-1}
1
x
−1
f
f^{-1}

La fórmula (7.1.8) toma una forma sencilla cuando se expresa en la notación de Leibniz. Supongamos que la función f tiene una inversa y es diferenciable. Sea $y = f(x)$ o, lo que es lo mismo, $x = f^{-1}(y)$. Luego

$$\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y) \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x) = f'[f^{-1}(y)].$$

Sustituyendo estas expresiones en (7.1.8), obtenemos

(7.1.10)
$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.}$$

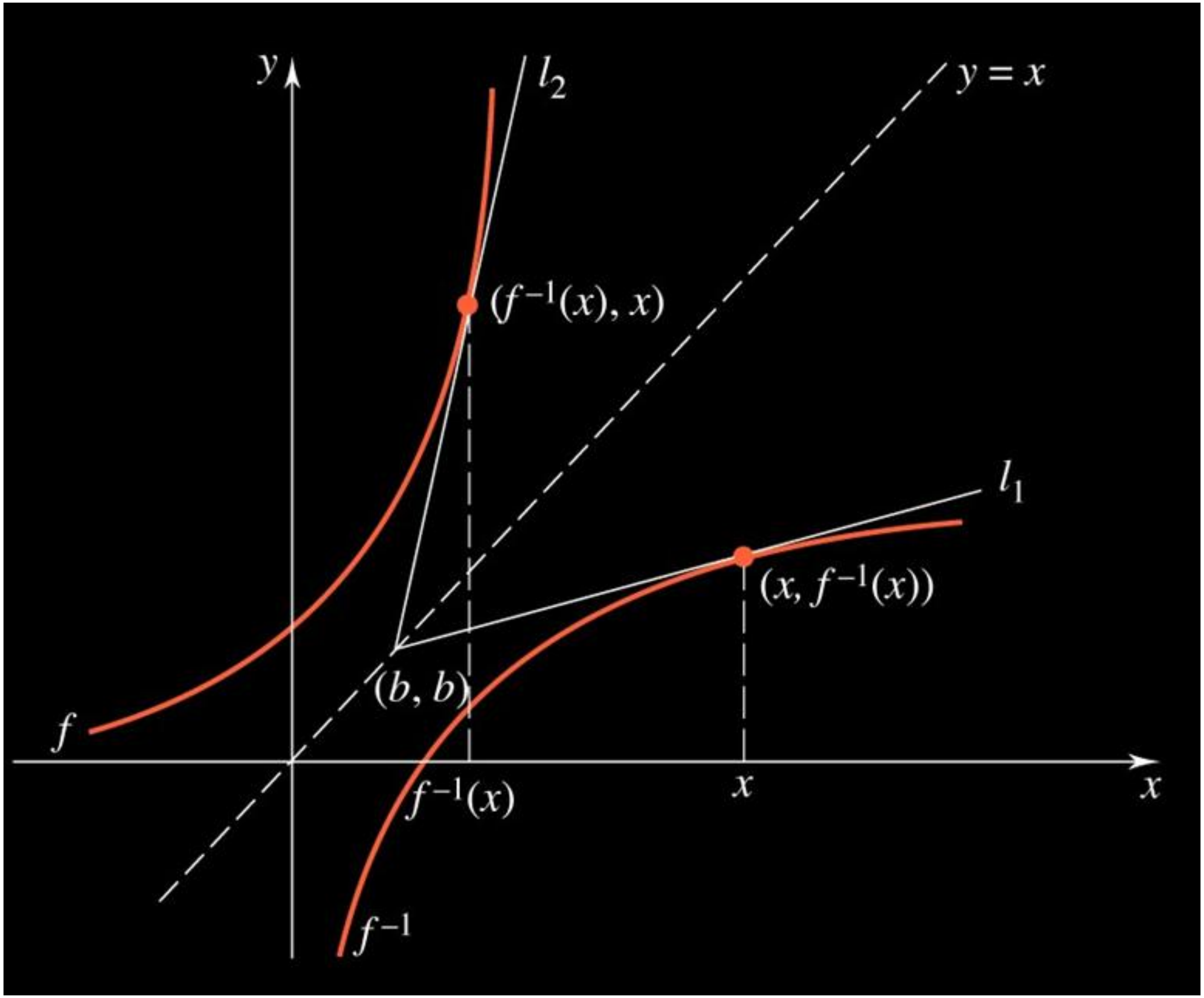
Si $y = f(x)$, entonces la tasa de variación de x respecto de y es la recíproca de la tasa de variación de y respecto de x. Por supuesto, tenemos que ser precisos sobre cómo se calculan estas derivadas.

Para reafirmar la validez de la fórmula (7.1.8) nos referiremos a la figura 7.1.12. Las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones una de otra respecto de la recta $y = x$. Las tangentes l_1 y l_2 son también reflexiones una de otra. De la figura se deduce que

$$(f^{-1})'(x) = \text{pendiente de } l_1 = \frac{f^{-1}(x) - b}{x - b}, \qquad f'(f^{-1}(x)) = \text{pendiente de } l_2 = \frac{x - b}{f^{-1}(x) - b};$$

es decir, $(f^{-1})'(x)$ y $f'(f^{-1}(x))$ son ciertamente recíprocas.

La figura también sugiere la dificultad que surge si $f'(z) = 0$ en algún punto z. En caso de que $f'(z) = 0$, la gráfica de f tiene una tangente horizontal en $(z, f(z))$. El reflejo de una tangente horizontal respecto de la recta $y = x$ será una tangente vertical a la gráfica de f^{-1} en el punto $(f(z), z)$ y éste será un punto de no diferenciabilidad para f^{-1}.



y
l_2
$y = x$
$(f^{-1}(x), x)$
l_1
$(x, f^{-1}(x))$
(b, b)
f
$f^{-1}(x)$
x
x
f^{-1}

Ejercicios sugeridos, Sección 7.1

Prácticos: 8, 13, 22, 25, 31, 35

Teóricos: 32, 44, 47, 50