Funciones Trascendentes 7

Sección 7.2

La función logaritmo - Parte I

Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

7.2 LA FUNCIÓN LOGARITMO, PARTE I

Si B es un número positivo distinto de 1, en matemáticas elementales se define el logaritmo de base B haciendo

$$C = \log_B A \qquad \text{sii} \qquad B^C = A.$$

Históricamente se eligió la base 10 porque nuestro sistema de numeración se basa en potencias de 10. La relación de definición se convierte en

$$C = \log_{10} A \qquad \text{sii} \qquad 10^C = A.$$

Las propiedades básicas de $\log_{10}$ se pueden entonces resumir de la siguiente manera: para $A, B > 0$,

$$\begin{aligned} &\log_{10}(AB) = \log_{10} A + \log_{10} B, && \log_{10} 1 = 0, \\ &\log_{10}(1/B) = -\log_{10} B, && \log_{10}(A/B) = \log_{10} A - \log_{10} B, \\ &\log_{10} A^B = B \log_{10} A, && \log_{10} 10 = 1. \end{aligned}$$

Esta noción elemental del logaritmo es inadecuada para el cálculo. No es clara: ¿Qué significa 10^C si C es irracional? No se presta bien a los métodos del cálculo: ¿Cómo derivaríamos $B = \log_{10} A$ sabiendo solamente que $10^B = A$?

Aquí haremos un enfoque radicalmente diferente de los logaritmos. En lugar de intentar conectar con la definición elemental, renunciaremos a ella. Desde nuestro punto de vista, la propiedad fundamental de los logaritmos es que transforman las multiplicaciones en adiciones:

el logaritmo de un producto = la suma de los logaritmos.

Tomando esta propiedad como idea central, nos veremos conducidos a una noción general del logaritmo, coherente con la noción elemental, que se presta bien a las técnicas del cálculo y nos lleva de manera natural a la elección de una base que simplifica mucho los cálculos.

DEFINICIÓN 7.2.1

Una función *logarítmica* es una función f no constante, diferenciable, definida en el conjunto de los números reales positivos, tal que para todo $a > 0$ y $b > 0$

$$\boxed{f(ab) = f(a) + f(b).}$$

Supongamos por el momento que existen funciones logarítmicas y veamos qué podemos averiguar acerca de ellas. En primer lugar, si f es una tal función, verifica

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1), \qquad \text{luego} \qquad f(1) = 0.$$

Tomando $b > 0$, tenemos

$$0 = f(1) = f(b \cdot 1/b) = f(b) + f(1/b),$$

luego

$$f(1/b) = -f(b).$$

Tomando $a > 0$ y $b > 0$, tenemos

$$f(a/b) = f(a \cdot 1/b) = f(a) + f(1/b),$$

lo cual, a la vista del resultado previo, significa que

$$f(a/b) = f(a) - f(b).$$

Por tanto, la mayor parte de las propiedades del $\log_{10}$ pueden deducirse de la única propiedad definida en 7.2.1.

Estamos ahora en condiciones de estudiar la derivada. (Recordar que estamos *suponiendo* que f es diferenciable.) Empezaremos formando el cociente incremental

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

donde $x > 0$ es fija. Por lo que hemos descubierto acerca de f,

$$f(x+h)-f(x) = f\left(\frac{x+h}{x}\right) = f(1+h/x),$$

luego

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(1+h/x)}{h}.$$

Multiplicando el denominador por x/x y usando el hecho de que $f(1) = 0$, podemos escribir el cociente diferencial como

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{x}\left[\frac{f(1+h/x)-f(1)}{h/x}\right].$$

Sea ahora $k = h/x$. Entonces tenemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{x}\left[\frac{f(1+k)-f(1)}{k}\right].$$

Dado que $k \to 0$ sii $h \to 0$ (recordar que x es fijo), se deduce que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{f(1+k)-f(1)}{k}\right]$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \left[\frac{f(1+k)-f(1)}{k}\right] = \frac{1}{x} f'(1).$$

Resumiendo

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x} f'(1).}$$

Acabamos de demostrar que, si f es una función logarítmica y x un número positivo, se verifica

$$\boxed{f(1) = 0 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = \frac{1}{x} f'(1).}$$

Es imposible que $f'(1) = 0$ puesto que esto implicaría f constante. (Explicarlo.) La alternativa más natural, la que mantendrá los cálculos tan simples como sea posible, consiste en hacer $f'(1) = 1$.[†] Entonces la derivada es $1/x$.

Esta función, que se anula en 1 y tiene derivada $1/x$ para $x > 0$, por el teorema fundamental del cálculo, tiene que ser de la forma

$$\boxed{\int_1^x \frac{dt}{t}.} \qquad \text{(comprobarlo)}$$

[†] Como veremos más adelante, esto equivale a elegir una base.

DEFINICIÓN 7.2.3

La función

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \qquad x > 0,$$

se denomina *función logaritmo* (*natural*).

A continuación daremos algunas propiedades de L:

(1) L está definida en $(0, \infty)$ y su derivada es

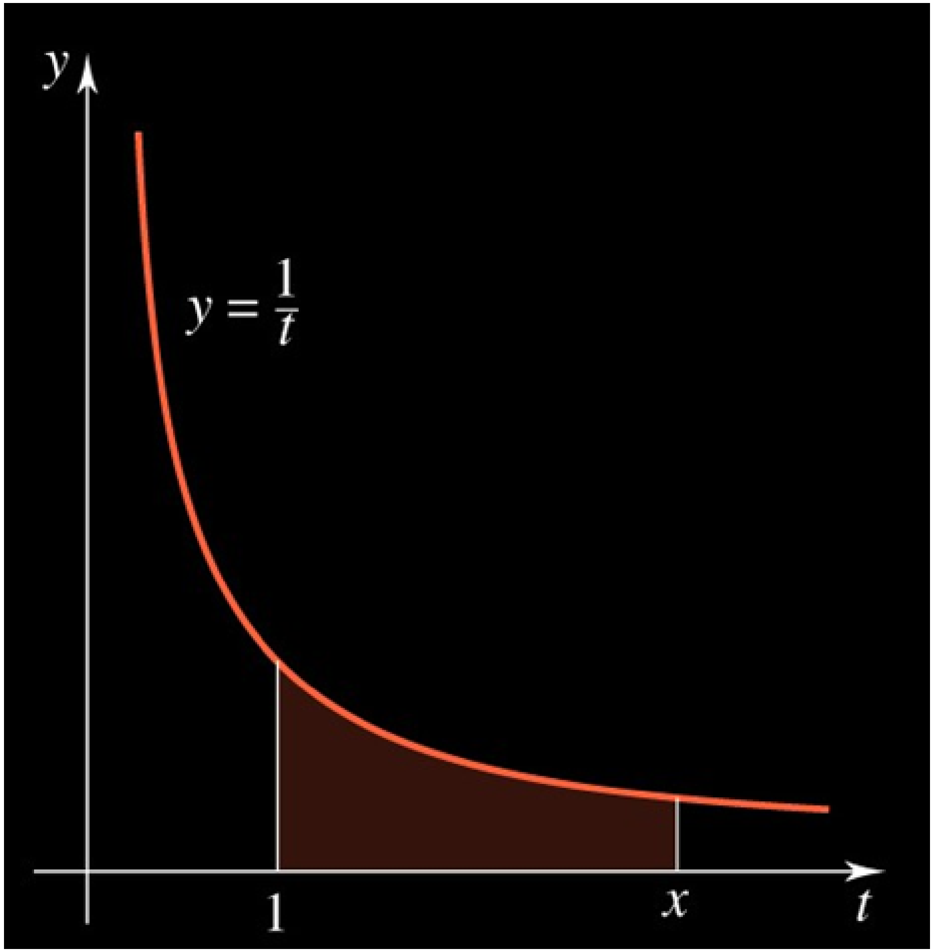
$$L'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{para todo } x > 0.$$

L' es positiva en $(0, \infty)$, luego L es una función creciente.

(2) L es continua en $(0, \infty)$ puesto que es diferenciable.

(3) Para $x > 1$, $L(x)$ proporciona el área de la región sombreada en la figura 7.2.1.

(4) $L(x)$ es negativa si $0 < x < 1$, nula en $x = 1$ y positiva si $x > 1$.



$$\text{área sombreada} = L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

TEOREMA 7.2.4

Si a y b son positivos, se verifica

$$L(ab) = L(a) + L(b).$$

Demostración Fijemos un número positivo a cualquiera. Dado que

$$\frac{d}{dx}[L(x)] = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}[L(ax)] \underset{\uparrow}{=} \frac{a}{ax} = \frac{1}{x},$$

regla de la cadena

$L(x)$ y $L(ax)$ tienen la misma derivada y por tanto sabemos que

$$L(ax) = L(x) + C$$

para alguna constante C (teorema 4.2.4). Podemos evaluar la constante tomando $x = 1$:

$$L(a) = L(1 \cdot a) = L(1) + C \underset{\uparrow}{=} C.$$

$L(1) = 0$

Por tanto, $L(ax) = L(a) + L(x)$ para todo $x > 0$. Eligiendo $x = b$ se obtiene el enunciado del teorema.

TEOREMA 7.2.5

Si a es positivo y p/q es racional, se verifica

$$L(a^{p/q}) = \frac{p}{q}L(a).$$

Demostración Hemos visto que $d/dx[L(x)] = 1/x$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}[L(x^{p/q})] = \frac{1}{x^{p/q}}\frac{d}{dx}(x^{p/q}) \underset{(3.7.1)}{=} \frac{1}{x^{p/q}}\left(\frac{p}{q}\right)x^{(p/q)-1} = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{p}{q}L(x)\right].$$

Dado que $L(x^{p/q})$ y $\frac{p}{q}L(x)$ tienen idéntica derivada, sólo difieren en una constante:

$$L(x^{p/q}) = \frac{p}{q}L(x) + C.$$

Dado que ambas funciones se anulan en $x = 1$, tenemos que $C = 0$. Luego $L(x^{p/q}) = \frac{p}{q}L(x)$ para todo $x > 0$ y obtenemos el enunciado del teorema haciendo $x = a$.

El dominio de L es $(0, \infty)$. ¿Cuál es la imagen de L?

> **TEOREMA 7.2.6**
>
> La imagen de L es $(-\infty, \infty)$.

Demostración Dado que L es continua en $(0, \infty)$, sabemos por el teorema del valor intermedio que no "se salta" ningún valor. En consecuencia su imagen es un intervalo. Para demostrar que el intervalo es $(-\infty, \infty)$ sólo necesitamos demostrar que no está acotado ni por arriba ni por abajo. Para ello basta demostrar que, dado un número positivo arbitrario M, la función L toma valores mayores que M y menores que $-M$.

$$\text{Dado que} \qquad L(2) = \int_1^2 \frac{dt}{t}$$

es positivo (explicarlo), sabemos que algún múltiplo positivo de $L(2)$ ha de ser mayor que M; esto es, sabemos que existe un entero positivo n tal que

$$nL(2) > M.$$

Multiplicando esta igualdad por -1 tenemos $\quad -nL(2) < -M$.

Puesto que $\qquad nL(2) = L(2^n) \qquad \text{y} \qquad -nL(2) = L(2^{-n}),$

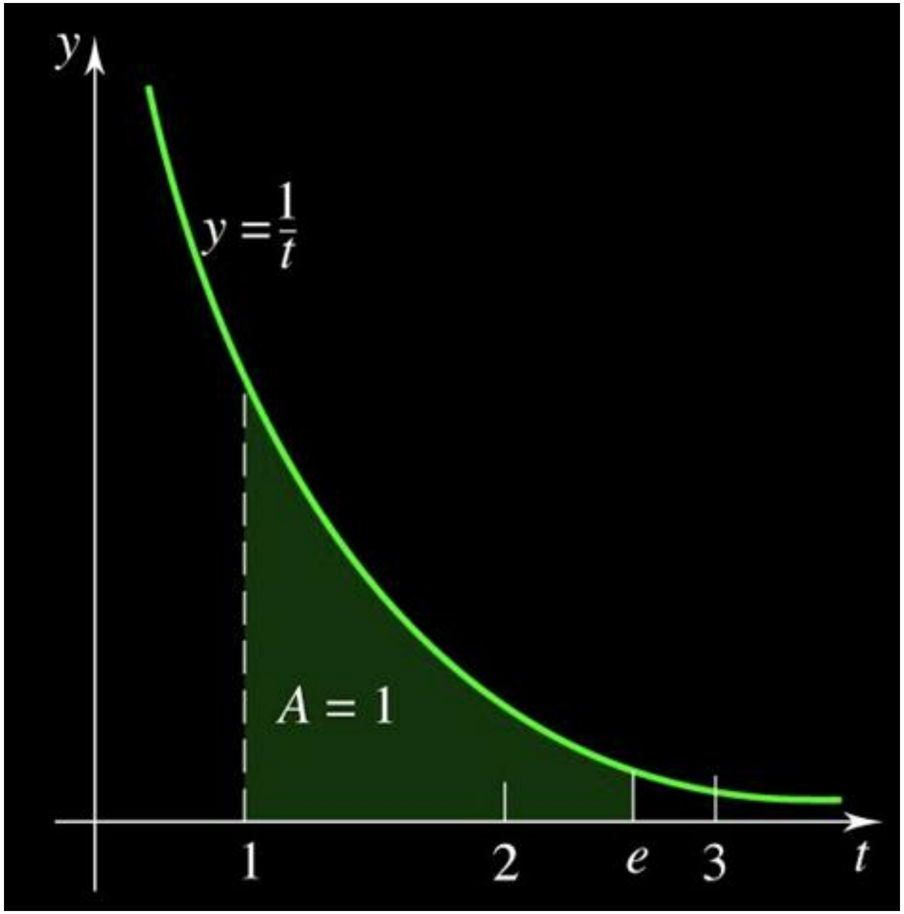
tenemos $\qquad L(2^n) > M \qquad \text{y} \qquad L(2^{-n}) < -M.$

Esto demuestra que el intervalo no está acotado.

El número *e*

Dado que la imagen de L es $(-\infty, \infty)$ y que L es una función creciente, sabemos que L toma cualquier valor y sólo lo toma una vez. En particular, existe un número y sólo uno en el cual la función L toma el valor 1. *Este único número se designa por la letra e.*†

El número e también puede ser definido geométricamente: e es el único número con la propiedad de que el área bajo la gráfica de $f(t) = 1/t$ desde $t = 1$ a $t = e$ es 1. Ver figura 7.2.2.



Dado que

$$\boxed{L(e) = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1,}$$

se deduce del teorema 7.2.5 que

$$\boxed{L(e^{p/q}) = \frac{p}{q} \qquad \text{para todos los números racionales } \frac{p}{q}.}$$

† Esta notación fue propuesta por el matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783), considerado por muchos como el mejor matemático del siglo dieciocho.

Debido a esta relación, a L se le llama *logaritmo en base e* y algunas veces se escribe

$$\boxed{L(x) = \log_e x.}$$

El número e surge de manera natural en diversos contextos. Por este motivo, llamaremos a $L(x)$ el *logaritmo natural* y escribiremos

$$\boxed{L(x) = \ln x.}^{\dagger}$$

Más adelante estudiaremos logaritmos relativos a otras bases [provienen de otras elecciones para $f'(1)$], pero, con mucho, el logaritmo más importante del cálculo es el logaritmo en base e. Tanto es así, que cuando hablamos del logaritmo de un número x sin especificar su base, es que, con toda seguridad, estamos hablando del *logaritmo natural* $\ln x$.

He aquí las propiedades básicas que hemos establecido para el $\ln x$:

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1.$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b. \qquad (a > 0, b > 0)$$

$$\ln 1/a = -\ln a. \qquad (a > 0)$$

$$\ln a/b = \ln a - \ln b. \qquad (a > 0, b > 0)$$

$$\ln a^r = r \ln a. \qquad (a > 0, r \text{ racional})$$

Obsérvese el paralelismo existente entre estas reglas y las reglas conocidas para los logaritmos habituales (base 10). Más adelante demostraremos que la última de estas reglas también se aplica en el caso de exponentes irracionales.

La gráfica de la función logaritmo

Sabemos que la función logaritmo

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

tiene dominio $(0, \infty)$, imagen $(-\infty, \infty)$ y derivada

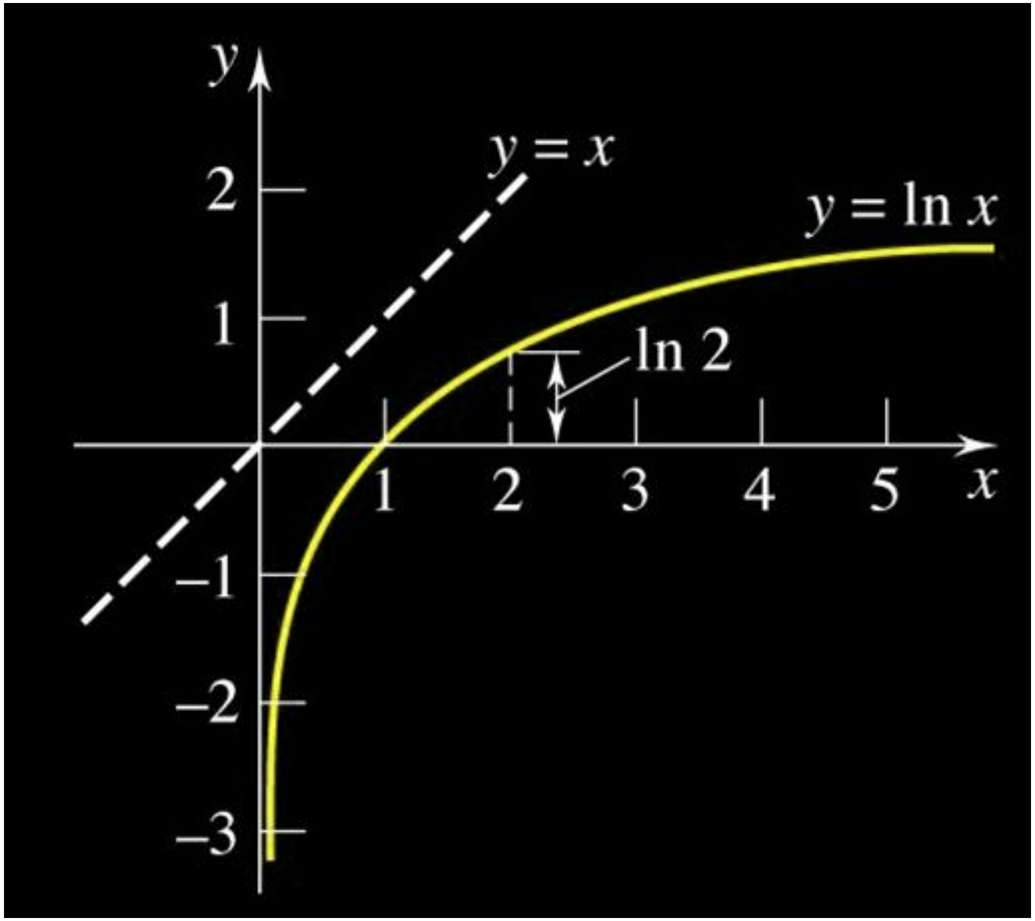
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} > 0.$$

Para x pequeño, la derivada es grande (cerca de 0 la curva tiene mucha pendiente); para x grande, la derivada es pequeña (lejos del origen, la curva se allana). En $x = 1$ el logaritmo vale 0 y su derivada $1/x$ vale 1. (La gráfica atraviesa el eje x en el punto $(1, 0)$ y la tangente en dicho punto es paralela a la recta $y = x$). La derivada segunda

$$\frac{d^2}{dx^2}(\ln x) = -\frac{1}{x^2}$$

es negativa en $(0, \infty)$. (La gráfica tiene la concavidad hacia abajo siempre.) Hemos representado la gráfica en la figura 7.2.3. El eje y es una asíntota vertical:

$$\ln x \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0^+ .$$


y
y = x
y = ln x
2
1
ln 2
1
2
3
4
5
x
–1
–2
–3

Ejemplo 1 Estimar

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t} \qquad \text{(figura 7.2.4)}$$

utilizando la partición

$$P = \{1 = \tfrac{10}{10}, \tfrac{11}{10}, \tfrac{12}{10}, \tfrac{13}{10}, \tfrac{14}{10}, \tfrac{15}{10}, \tfrac{16}{10}, \tfrac{17}{10}, \tfrac{18}{10}, \tfrac{19}{10}, \tfrac{20}{10} = 2\}.$$

Solución Usando una calculadora, hallamos que

$$\begin{aligned} L_f(P) &= \tfrac{1}{10}(\tfrac{10}{11} + \tfrac{10}{12} + \tfrac{10}{13} + \tfrac{10}{14} + \tfrac{10}{15} + \tfrac{10}{16} + \tfrac{10}{17} + \tfrac{10}{18} + \tfrac{10}{19} + \tfrac{10}{20}) \\ &= \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{20} > 0{,}668 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U_f(P) &= \tfrac{1}{10}(\tfrac{10}{10} + \tfrac{10}{11} + \tfrac{10}{12} + \tfrac{10}{13} + \tfrac{10}{14} + \tfrac{10}{15} + \tfrac{10}{16} + \tfrac{10}{17} + \tfrac{10}{18} + \tfrac{10}{19}) \\ &= \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{19} < 0{,}719. \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$0{,}668 \le L_f(P) \le \ln 2 \le U_f(P) < 0{,}719.$$

El promedio de estas dos estimaciones es

$$\tfrac{1}{2}(0{,}668 + 0{,}719) = 0{,}6935.$$

No hemos caído muy lejos. Redondeando a cuatro cifras decimales, el valor de ln 2 dado por una calculadora es 0,6931.

La tabla 7.2.1 da los logaritmos naturales de los enteros comprendidos entre 1 y 10, redondeados a la centésima más próxima.

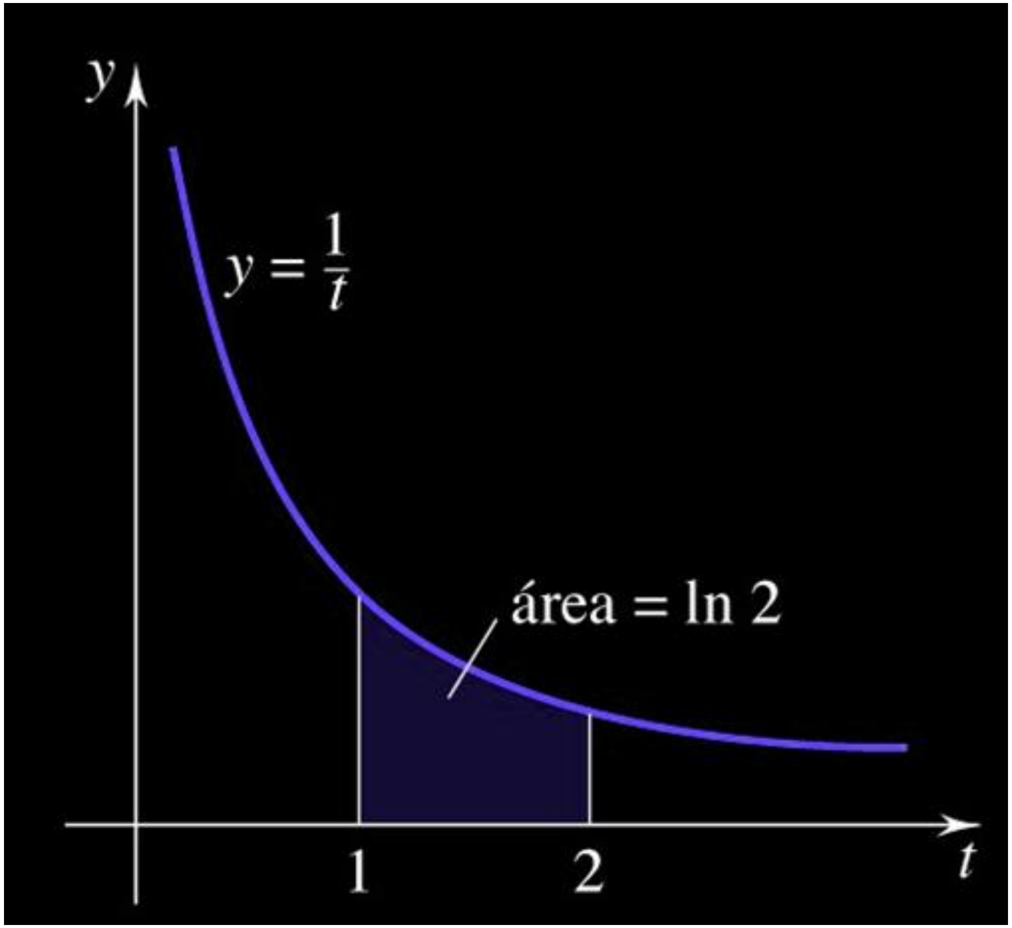


TABLA 7.2.1

n	$\ln n$	n	$\ln n$
1	0,00	6	1,79
2	0,69	7	1,95
3	1,10	8	2,08
4	1,39	9	2,20
5	1,61	10	2,30

TABLA 7.2.1			
n	$\ln n$	n	$\ln n$
1	0,00	6	1,79
2	0,69	7	1,95
3	1,10	8	2,08
4	1,39	9	2,20
5	1,61	10	2,30

Ejemplo 2 Usar la tabla 7.2.1 para estimar los logaritmos siguientes:

(a) $\ln 0{,}2$. **(b)** $\ln 0{,}25$. **(c)** $\ln 2{,}4$. **(d)** $\ln 90$.

Solución

(a) $\ln 0{,}2 = \ln \frac{1}{5} = -\ln 5 \cong -1{,}61.$ **(b)** $\ln 0{,}25 = \ln \frac{1}{4} = -\ln 4 \cong -1{,}39.$

(c) $\ln 2{,}4 = \ln \frac{12}{5} = \ln \dfrac{(3)(4)}{5} = \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 \cong 0{,}88.$

(d) $\ln 90 = \ln [(9)(10)] = \ln 9 + \ln 10 \cong 4{,}50.$

TABLA 7.2.1

n	$\ln n$	n	$\ln n$
1	0,00	6	1,79
2	0,69	7	1,95
3	1,10	8	2,08
4	1,39	9	2,20
5	1,61	10	2,30

Ejemplo 3 Usar la tabla 7.2.1 para estimar e.

Solución Lo único que sabemos es que $\ln e = 1$. Mediante la tabla se puede ver que

$$3 \ln 3 - \ln 10 \cong 1.$$

La expresión de la izquierda se puede escribir

$$\ln 3^3 - \ln 10 = \ln 27 - \ln 10 = \ln \tfrac{27}{10} = \ln 2{,}7.$$

Luego $\ln 2{,}7 \cong 1$ y $e \cong 2{,}7$. Se puede demostrar que e es un número irracional; su desarrollo decimal con 12 cifras decimales es

$$e \cong 2{,}718281828459.$$

Ejercicios sugeridos, Sección 7.2

Prácticos: 8, 14, 19, 22

Teóricos: 12, 24, 25