Funciones Trascendentes 7

Sección 7.3

La función logaritmo - Parte II

Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

7.3 LA FUNCIÓN LOGARITMO, PARTE II

Diferenciación y trazado de gráficas

Sabemos que para $x > 0$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Supongamos que u es una función positiva y diferenciable de x. Entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.}$$

Demostración Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{d}{du}(\ln u)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

Por ejemplo, $\frac{d}{dx}[\ln(1+x^2)] = \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$ para todo x

y $\frac{d}{dx}[\ln(1+3x)] = \frac{1}{1+3x}\cdot 3 = \frac{3}{1+3x}$ para todo $x > -\frac{1}{3}$.

Ejemplo 1 Hallar el dominio de f y calcular $f'(x)$ si

$$f(x) = \ln(x\sqrt{4+x^2}).$$

Solución Para que x pertenezca al dominio de f ha de verificar $x\sqrt{4+x^2} > 0$, luego $x > 0$. El dominio es el conjunto de los números positivos.

Antes de diferenciar f haremos uso de las propiedades especiales del logaritmo:

$$f(x) = \ln(x\sqrt{4+x^2}) = \ln x + \ln[(4+x^2)^{1/2}] = \ln x + \tfrac{1}{2}\ln(4+x^2).$$

Según esto, tenemos

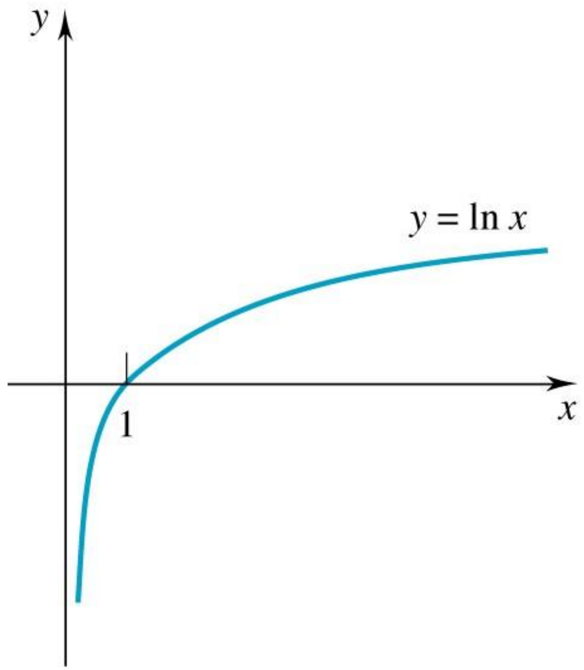
$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4+x^2}\cdot 2x = \frac{1}{x} + \frac{x}{4+x^2} = \frac{4+2x^2}{x(4+x^2)}.$$

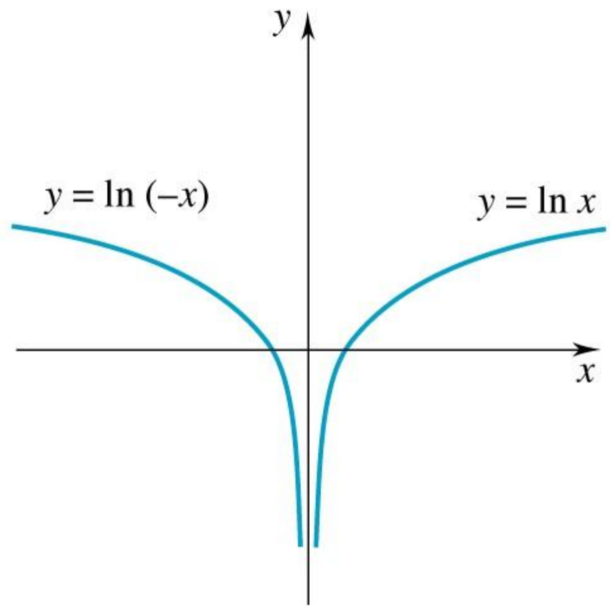
Ejemplo 2 Dibujar la gráfica de $f(x) = \ln|x|$.

Solución El dominio de f son todos los números $x \neq 0$ y f es una función par: $f(-x) = f(x)$ para todo $x \neq 0$. Luego, la gráfica tiene dos ramas:

$$\boxed{y = \ln(-x), \qquad x < 0} \qquad \text{y} \qquad \boxed{y = \ln x, \qquad x > 0,}$$

y es simétrica respecto del eje y. Como vimos en la sección anterior, la gráfica de $y = \ln x$, $x > 0$ es como se muestra en la figura 7.3.1. Por simetría, la gráfica de $y = \ln(-x)$, $x < 0$, es la imagen especular de $y = \ln x$, $x > 0$, en el eje y. La figura 7.3.2 muestra la gráfica de $y = \ln|x|$.





$y = \ln|x|$

Ejemplo 3 Demostrar que

(7.3.2)
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} \qquad \text{para todo } x \neq 0.}$$

Solución Para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Para $x < 0$, tenemos que $|x| = -x > 0$, luego

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}[\ln(-x)] = \frac{1}{-x}\frac{d}{dx}(-x) = \left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = \frac{1}{x}.$$

Se deduce ahora que si u es una función diferenciable de x, para $u \neq 0$ se verifica

$$\frac{d}{dx}(\ln |u|) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

Demostración

$$\frac{d}{dx}(\ln |u|) = \frac{d}{du}(\ln |u|)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

He aquí dos ejemplos:

$$\frac{d}{dx}(\ln |1-x^3|) = \frac{1}{1-x^3}\frac{d}{dx}(1-x^3) = \frac{-3x^2}{1-x^3} = \frac{3x^2}{x^3-1}.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|\right) = \frac{d}{dx}(\ln |x-1|) - \frac{d}{dx}(\ln |x-2|) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}.$$

Ejemplo 4 Sea $f(x) = x \ln x$.

(a) Especificar el dominio de f y hallar los puntos de intersección con los ejes de coordenadas, si existen. **(b)** ¿En qué intervalos es f creciente? ¿Y decreciente? **(c)** Hallar los valores extremos de f. **(d)** Determinar la concavidad de la gráfica y hallar los puntos de inflexión. **(e)** Representar la gráfica de f.

Solución Dado que las funciones logarítmicas sólo se definen para números positivos, el dominio de f es $(0, \infty)$ y no hay ordenada en el origen. Dado que $f(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0$, 1 es un punto de corte con el eje x.

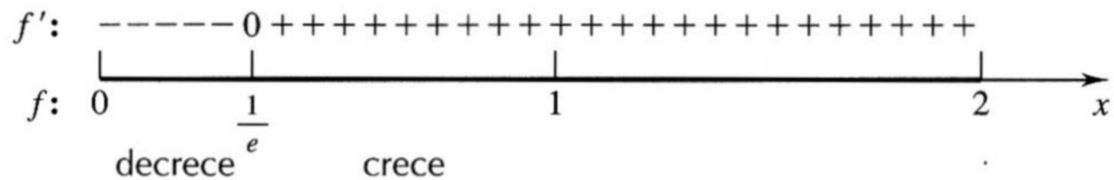
Diferenciando f, tenemos

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x.$$

Para hallar los puntos críticos de f, hacemos $f'(x) = 0$:

$$1 + \ln x = 0, \qquad \ln x = -1, \qquad x = \frac{1}{e} \qquad \text{(comprobarlo).}$$

Recordando que la función logaritmo es creciente en $(0, \infty)$ y que $\ln x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$ y $\ln x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, tenemos



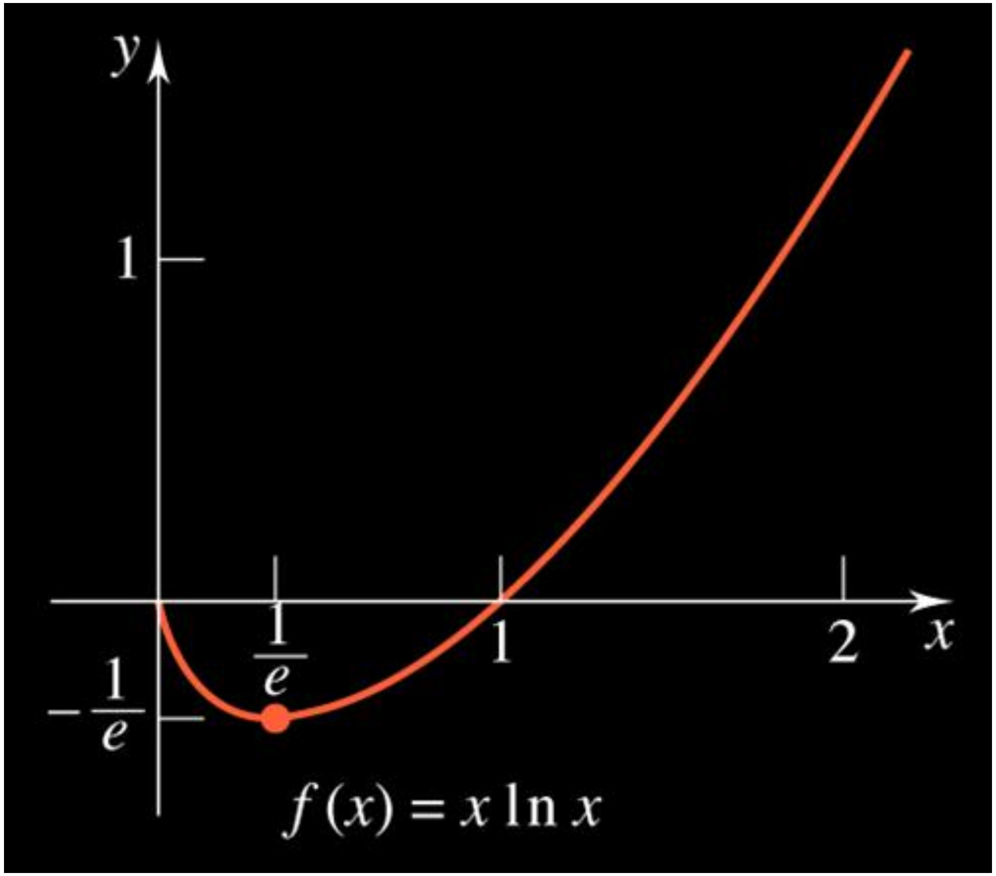
Por tanto, f decrece en $(0, 1/e]$ y crece en $[1/e, \infty)$. Por el criterio de la derivada primera,

$$f(1/e) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \cong -0,368$$

es un mínimo local y absoluto de f.

Dado que $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ para $x > 0$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$; no hay puntos de inflexión.

Se puede comprobar numéricamente que $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ (ver ejercicio 30, sección 7.2) y que $x \ln x \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Además, $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$.


y
1
$\frac{1}{e}$
1
2
x
$-\frac{1}{e}$
$f(x) = x \ln x$

Ejemplo 5 Sea

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^4}{x-1}\right).$$

(a) Especificar el dominio de f. **(b)** ¿En qué intervalos es f creciente? ¿Y decreciente? **(c)** Hallar los valores extremos de f. **(d)** Determinar la concavidad de la gráfica y hallar los puntos de inflexión. **(e)** Bosquejar la gráfica indicando las posibles asíntotas.

Solución Dado que la función logaritmo sólo está definida para los números positivos, el dominio de f es el intervalo abierto $(1, \infty)$.

Usando las propiedades especiales del logaritmo, podemos escribir

$$f(x) = \ln x^4 - \ln(x-1) = 4 \ln x - \ln(x-1).$$

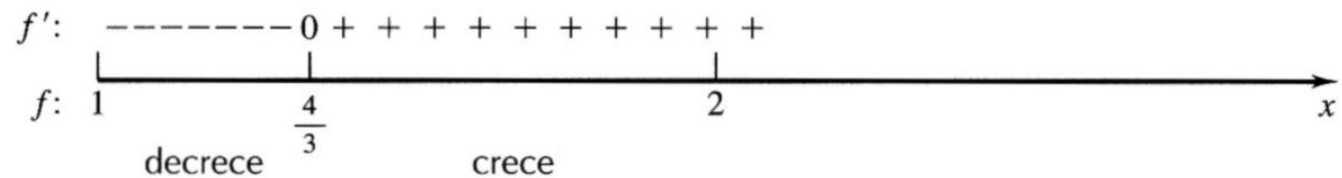
La diferenciación nos da

$$f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{3x-4}{x(x-1)}$$

y

$$f''(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{(x-2)(3x-2)}{x^2(x-1)^2}.$$

Dado que el dominio de f es $(1, \infty)$, sólo consideraremos valores de x mayores que 1. Entonces $f'(x) = 0$ en $x = 4/3$ (punto crítico) y



Luego f es decreciente en $(1, \frac{4}{3}]$ y creciente en $[\frac{4}{3}, \infty)$.

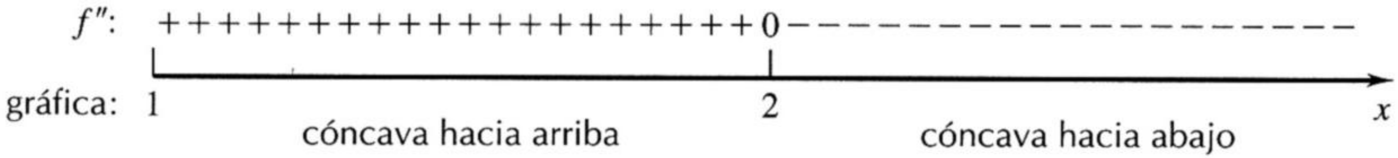
$$f(\tfrac{4}{3}) = 4 \ln 4 - 3 \ln 3 \cong 2{,}25$$

es un mínimo local y absoluto. No existen más valores extremos.

TABLA 7.2.1

n	$\ln n$	n	$\ln n$
1	0,00	6	1,79
2	0,69	7	1,95
3	1,10	8	2,08
4	1,39	9	2,20
5	1,61	10	2,30

Para comprobar la concavidad, tenemos que $f''(x) = 0$ en $x = 2$ (ignoramos el cero en 2/3 porque $2/3 < 1$). El mapa de signos de f'' es



Por tanto, la gráfica es cóncava hacia arriba en $(1, 2)$ y cóncava hacia abajo en $(2, \infty)$. El punto

$$(2, f(2)) = (2, 4 \ln 2) \cong (2, 2{,}77)$$

es el único punto de inflexión.

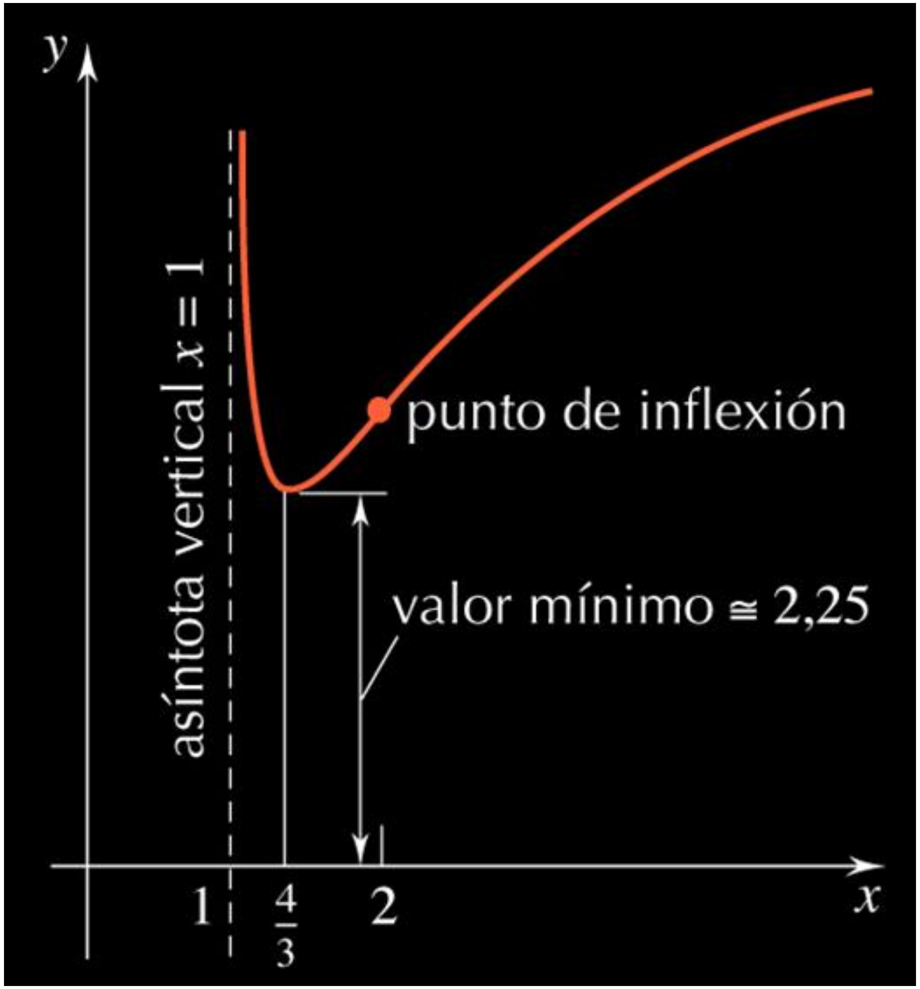
Antes de bosquejar la gráfica, observemos que la derivada

$$f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x-1}$$

posee un valor negativo muy grande para x próximo a 1 y un valor muy próximo a 0 para x grande. Esto significa que la gráfica es muy empinada para x próximo a 1 y muy allanada para x grande. Ver la figura 7.3.4. La recta $x = 1$ es una asíntota vertical: $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^+$.

TABLA 7.2.1

n	$\ln n$	n	$\ln n$
1	0,00	6	1,79
2	0,69	7	1,95
3	1,10	8	2,08
4	1,39	9	2,20
5	1,61	10	2,30


y
asíntota vertical x = 1
punto de inflexión
valor mínimo ≅ 2,25
1
4/3
2
x

Integración

La expresión integral de (7.3.2) es

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \qquad x \neq 0.}$$

Las integrales de la forma

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx \quad \text{pueden reducirse a} \quad \int \frac{du}{u}$$

haciendo

$$u = g(x) \qquad du = g'(x)\, dx.$$

Así, tenemos una importante generalización de (7.3.4):

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln |g(x)| + C, \qquad g(x) \neq 0.}$$

Ejemplo 6 Calcular $\int \frac{x^2}{1-4x^3}\,dx$.

Solución Observemos que x^2 es la derivada de $1-4x^3$, salvo un factor constante. Por tanto, hagamos

$$u = 1-4x^3, \qquad du = -12x^2\,dx.$$

$$\int \frac{x^2}{1-4x^3}\,dx = -\frac{1}{12}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{12}\ln|u| + C = -\frac{1}{12}\ln|1-4x^3| + C.$$

Ejemplo 7 Calcular $\int_1^2 \frac{6x^2+2}{x^3+x+1}\,dx$.

Solución Sea

$$u = x^3+x+1, \qquad du = 3x^2+1.$$

En $x=1, u=3$; en $x=2, u=11$.

$$\int_1^2 \frac{6x^2+2}{x^3+x+1}\,dx = 2\int_3^{11} \frac{du}{u} = 2\left[\ln|u|\right]_3^{11} = 2(\ln 11 - \ln 3) = 2\ln\left(\frac{11}{3}\right).$$

Ejemplo 8 Calcular $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Solución Observemos que $1/x$ es la derivada de $\ln x$. Por tanto, hacemos

$$u = \ln x, \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

y

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \tfrac{1}{2}u^2 + C = \tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

Integración de funciones trigonométricas

En la sección 5.5 vimos que

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C, \qquad \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C, \qquad \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C,$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C, \qquad \int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C.$$

Ahora que nos hemos familiarizado con la función logaritmo natural, podemos añadir a la lista cuatro fórmulas básicas más.

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C,$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C,$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C,$$

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C.$$

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\text{sen } x}{\cos x}\,dx \qquad \text{[hacer } u = \cos x,\ du = -\text{sen } x\,dx\text{]}\\ &= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C\\ &= -\ln|\cos x| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C\\ &= \ln|\sec x| + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cot x\,dx &= \int \frac{\cos x}{\text{sen } x}\,dx \qquad \text{[hacer } u = \text{sen } x,\ du = \cos x\,dx\text{]}\\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\text{sen } x| + C.\end{aligned}$$

$$^{\dagger}\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

[hacer $u = \sec x + \tan x$, $du = (\sec x \quad \tan x + \sec^2 x)\, dx$]

$$= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

---

† Sólo la experiencia nos sugiere multiplicar el numerador y el denominador por $\sec x + \tan x$.

La deducción de la fórmula para $\int \operatorname{cosec} x\, dx$ se deja para el lector.

$$\int \csc x dx = \int \csc x \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x} dx = \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} dx$$

$$u = \csc x - \cot x \Rightarrow du = [-\csc x \cot x - (-\csc^2 x)]dx = (\csc^2 x - \csc x \cot x)dx$$

$$\Rightarrow \int \csc x dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

73. Demostrar que $\int \operatorname{cosec} x dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$ mediante los métodos de esta sección.

Ejemplo 9 Calcular $\int \cot \pi x \, dx$.

Solución Hacer

$$u = \pi x, \qquad du = \pi \, dx.$$

$$\int \cot \pi x \, dx = \frac{1}{\pi}\int \cot u \, du = \frac{1}{\pi}\ln|\text{sen } u| + C = \frac{1}{\pi}\ln|\text{sen } \pi x| + C.$$

Observación El cambio de variable simplifica muchos cálculos, pero, con experiencia, se pueden llevar a cabo muchas integraciones sin usarlo.

Ejemplo 10 Calcular $\int_0^{\pi/8} \sec 2x \, dx$.

Solución Es fácil comprobar que $\frac{1}{2}\ln|\sec 2x + \tan 2x|$ es una antiderivada de $\sec 2x$. Luego

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/8} \sec 2x \, dx &= \tfrac{1}{2}\Big[\ln|\sec 2x + \tan 2x|\Big]_0^{\pi/8} \\ &= \tfrac{1}{2}[\ln(\sqrt{2}+1) - \ln 1] = \tfrac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1) \cong 0{,}44.\end{aligned}$$

Cuando el integrando es un cociente, vale la pena comprobar si la integral puede escribirse en la forma

$$\int \frac{du}{u}.$$

Ejemplo 11 Calcular $\displaystyle\int \frac{\sec^2 3x}{1+\tan\ 3x}\,dx.$

Solución Hacer

$$u = 1+\tan\ 3x, \qquad du = 3\sec^2 3x\ dx.$$

$$\int \frac{\sec^2 3x}{1+\tan\ 3x}dx = \tfrac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \tfrac{1}{3}\ln|u| + C = \tfrac{1}{3}\ln|1+\tan\ 3x| + C.$$

Diferenciación logarítmica

Para diferenciar un producto con muchos factores $g(x) = g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x)$

podemos escribir primero
$$\begin{aligned}\ln|g(x)| &= \ln(|g_1(x)||g_2(x)|\ldots|g_n(x)|)\\ &= \ln|g_1(x)| + \ln|g_2(x)| + \cdots + \ln|g_n(x)|\end{aligned}$$

y luego diferenciar
$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{g_n'(x)}{g_n(x)}.$$

La multiplicación por $g(x)$ nos da
$$\boxed{g'(x) = g(x)\left(\frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{g_n'(x)}{g_n(x)}\right).}$$

El procedimiento mediante el cual hemos obtenido $g'(x)$ se llama *diferenciación logarítmica*. La diferenciación logarítmica tiene validez en todo punto x tal que $g(x) \neq 0$. En los puntos x para los cuales $g(x) = 0$, no tiene sentido.

Un producto de n factores

$$g(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)$$

también puede derivarse mediante la aplicación repetida de la regla del producto (3.2.5). La gran ventaja de la diferenciación logarítmica es que proporciona una fórmula explícita para la derivada, una fórmula fácil de recordar y cómoda para trabajar con ella.

Ejemplo 12 Dada la función $g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, hallar $g'(x)$ para $x \neq 0, 1, 2, 3$.

Solución Podemos escribir $g'(x)$ aplicando directamente la fórmula 7.3.7:

$$g'(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right).$$

O podemos repetir el procedimiento que nos ha llevado a establecer la fórmula 7.3.7:

$$\begin{aligned}
\ln|g(x)| &= \ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x-2| + \ln|x-3|,\\
\frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3},\\
g'(x) &= x(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right).
\end{aligned}$$

Ejemplo 13 Dada la función $g(x) = \dfrac{(x^2+1)^3(2x-5)^2}{(x^2+5)^2}$, hallar $g'(x)$ para $x \neq \frac{5}{2}$.

Solución Nuestro primer paso consiste en escribir

$$g(x) = (x^2+1)^3(2x-5)^2(x^2+5)^{-2}.$$

Luego, de acuerdo con la fórmula (7.3.7),

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x^2+1)^3(2x-5)^2}{(x^2+5)^2}\left[\frac{3(x^2+1)^2(2x)}{(x^2+1)^3} + \frac{2(2x-5)(2)}{(2x-5)^2} + \frac{(-2)(x^2+5)^{-3}(2x)}{(x^2+5)^{-2}}\right] \\ &= \frac{(x^2+1)^3(2x-5)^2}{(x^2+5)^2}\left(\frac{6x}{x^2+1} + \frac{4}{2x-5} - \frac{4x}{x^2+5}\right). \end{aligned}$$

Equivalentemente, utilizando las propiedades básicas enunciadas en (7.2.10), tenemos

$$\begin{aligned} \ln|g(x)| &= \ln(x^2+1)^3 + \ln(2x-5)^2 - \ln(x^2+5)^2 \\ &= 3\ln(x^2+1) + 2\ln|2x-5| - 2\ln(x^2+5). \end{aligned}$$

(En los términos primero y tercero hemos omitido valores absolutos porque x^2+1 y x^2+5 son positivos para todo x.) Entonces

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3(2x)}{x^2+1} + \frac{2(2)}{2x-5} - \frac{2(2x)}{x^2+5}$$

y por tanto

$$g'(x) = g(x)\left(\frac{6x}{x^2+1} + \frac{4}{2x-5} - \frac{4x}{x^2+5}\right)$$

como habíamos visto anteriormente.

Ejercicios sugeridos, Sección 7.3

Prácticos: 5, 13, 17, 27, 47, 50, 55

Teóricos: 69, 70, 74, 81