Funciones Trascendentes 7

Sección 7.4

La función exponencial

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

7.4 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Las potencias racionales de e ya tienen un sentido establecido: $e^{p/q}$ es la raíz q-ésima de la potencia p de e. ¿Pero qué sentido podemos dar a $e^{\sqrt{2}}$ o a e^{π}?

Hemos demostrado ya que toda potencia racional $e^{p/q}$ tiene p/q como logaritmo:

(7.4.1)
$$\boxed{\ln e^{p/q} = \frac{p}{q}.}$$

La definición de e^z para z irracional viene inspirada por esa relación.

DEFINICIÓN 7.4.2

Si z es irracional, designaremos por e^z al único número cuyo logaritmo es z:

$$\ln e^z = z.$$

¿Qué significa $e^{\sqrt{2}}$? Es el único número cuyo logaritmo es $\sqrt{2}$. ¿Qué significa e^{π}? Es el único número cuyo logaritmo es π. Obsérvese que e^x posee ahora un significado para todo valor de x: es el único número cuyo logaritmo es x.

DEFINICIÓN 7.4.3

La función

$$E(x) = e^{x} \qquad \text{para todo } x \text{ real}$$

recibe el nombre de *función exponencial*.

A continuación damos algunas propiedades de la función exponencial:

(1) En primer lugar

$$\boxed{\ln e^x = x \qquad \text{para todo } x \text{ real.}}$$

Escribiendo $L(x) = \ln x$ y $E(x) = e^x$, tenemos

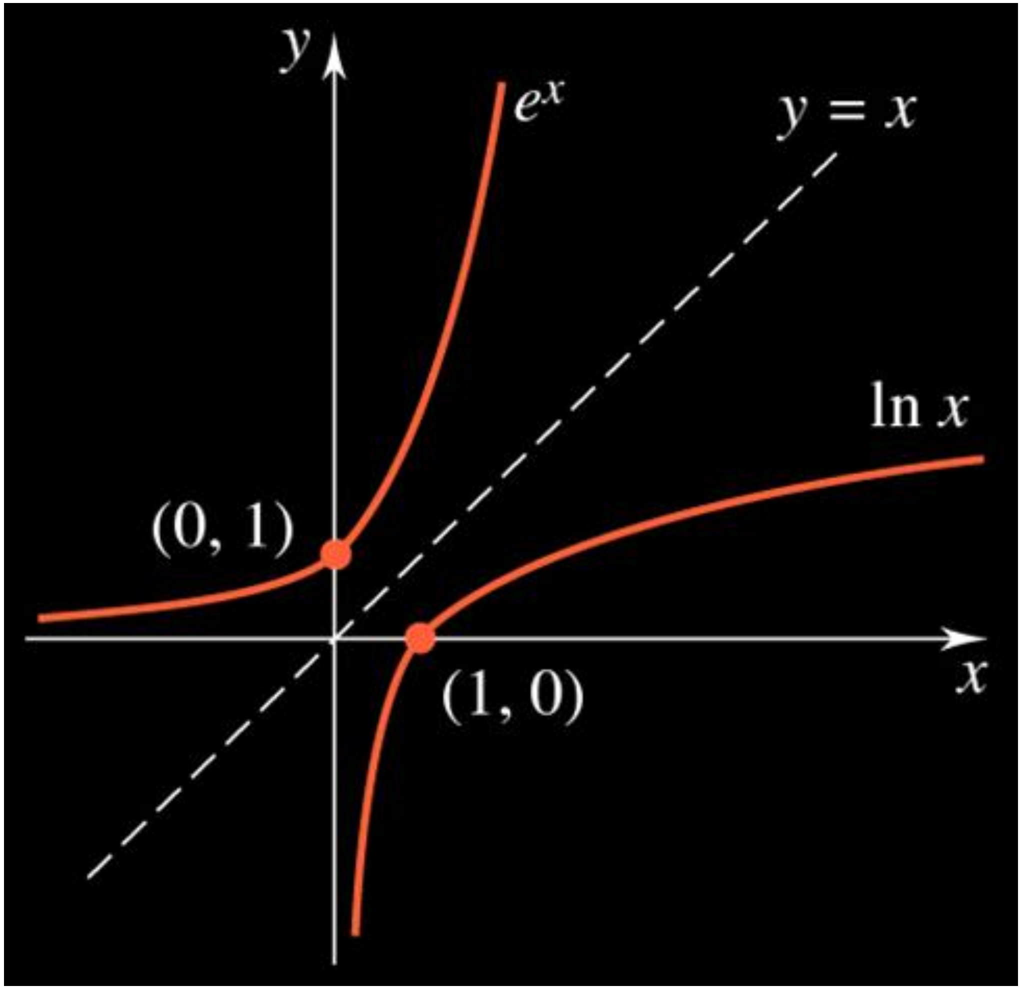
$$L(E(x)) = x \qquad \text{para todo } x \text{ real.}$$

Esto significa que *la función exponencial es la inversa de la función logaritmo.*

(2) La gráfica de la función exponencial aparece en la figura 7.4.1. Puede obtenerse a partir de la gráfica de la función logaritmo por simetría respecto de la recta $x = y$.

(3) Dado que la gráfica de la función logaritmo permanece a la derecha del eje y, la gráfica de la función exponencial se sitúa por encima del eje x:

$$\boxed{e^x > 0 \qquad \text{para todo } x \text{ real.}}$$


y
e^x
$y = x$
$\ln x$
(0, 1)
(1, 0)
x

(4) Dado que la gráfica de la función logaritmo corta el eje x en $(1, 0)$, la gráfica de la función exponencial corta el eje y en $(0, 1)$:

$$\boxed{\ln 1 = 0 \qquad \text{da} \qquad e^0 = 1.}$$

(5) Dado que el eje y es una asíntota vertical para la gráfica de la función logaritmo, el eje x es una asíntota horizontal para la gráfica de la función exponencial:

$$\boxed{e^x \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to -\infty.}$$

(6) Dado que la función exponencial es la inversa de la función logaritmo, la función logaritmo es la inversa de la función exponencial; es decir que tenemos

$$\boxed{e^{\ln x} = x \qquad \text{para todo } x > 0.}$$

Se puede comprobar esta igualdad directamente observando que ambos miembros tienen el mismo logaritmo:

$$\boxed{\ln(e^{\ln x}) = \ln x} \qquad \text{dado que, para todo } t \text{ real, } \ln e^{t} = t.$$

Sabemos que en el caso de exponentes racionales se verifica

$$e^{(p/q + r/s)} = e^{p/q} \cdot e^{r/s}.$$

Esta propiedad se verifica para todos los exponentes, incluidos los irracionales.

TEOREMA 7.4.7

$$\boxed{e^{a+b} = e^a \cdot e^b \qquad \text{para } a \text{ y } b \text{ reales cualesquiera.}}$$

Demostración

$$\ln(e^a \cdot e^b) = \ln e^a + \ln e^b = a + b = \ln e^{a+b}.$$

Dado que el logaritmo es una función inyectiva tenemos que

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b.$$

Dejamos al lector demostrar que $\boxed{e^{-b} = \dfrac{1}{e^b} \quad \text{y} \quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}.}$

TEOREMA 7.4.9

La función exponencial es su propia derivada: para todo x real,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.}$$

Demostración La función logaritmo es diferenciable y su derivada no toma nunca el valor 0. Se deduce del teorema 7.1.9 que su inversa, la función exponencial, también es diferenciable. Sabiendo esto podemos demostrar que

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \text{diferenciando la identidad} \quad \ln e^x = x.$$

Para el término de la izquierda, la regla de la cadena nos da

$$\frac{d}{dx}(\ln e^x) = \frac{1}{e^x}\,\frac{d}{dx}(e^x).$$

La derivada del término de la derecha es 1: $\quad \frac{d}{dx}(x) = 1.$

Igualando esas derivadas obtenemos $\quad \frac{1}{e^x}\,\frac{d}{dx}(e^x) = 1 \quad$ luego $\quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$

Nos encontraremos a menudo con expresiones de la forma e^u donde u es una función de x. Si u es diferenciable, la regla de la cadena da

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}.}$$

Demostración

$$\frac{d}{dx}(e^u) = \frac{d}{du}(e^u)\frac{du}{dx} = e^u \frac{du}{dx}.$$

Ejemplo 1

(a) $\displaystyle \frac{d}{dx}(e^{kx}) = e^{kx} \cdot k = ke^{kx}$

(b) $\displaystyle \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) = e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

(c) $\displaystyle \frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = e^{-x^2}\frac{d}{dx}(-x^2) = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}$

La relación $\displaystyle \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ y $\displaystyle \frac{d}{dx}(e^{kx}) = ke^{kx}$

tienen importantes aplicaciones en ingeniería, física, química, biología y economía.

Ejemplo 2 Sea

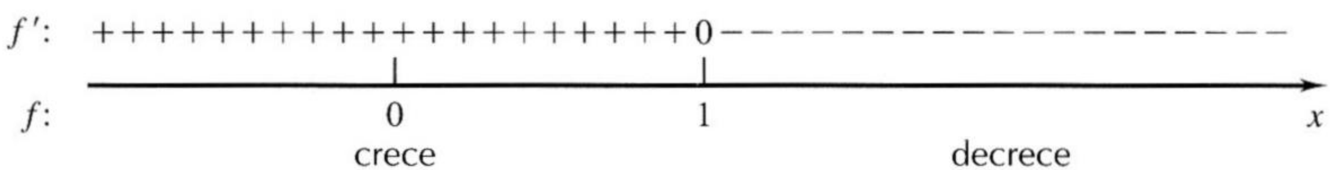
$$f(x) = xe^{-x} \qquad \text{para todo } x \text{ real.}$$

(a) ¿En qué intervalos es la función f creciente? ¿Y decreciente? **(b)** Hallar los valores extremos de f. **(c)** Determinar la concavidad de la gráfica y hallar los puntos de inflexión. **(d)** Bosquejar la gráfica indicando las asíntotas, si las hay.

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{-x}, \\ f'(x) &= xe^{-x}(-1) + e^{-x} = (1-x)e^{-x}, \\ f''(x) &= (1-x)e^{-x}(-1) - e^{-x} = (x-2)e^{-x}. \end{aligned}$$

Dado que $e^{-x} > 0$ para todo x real, solamente tenemos $f'(x) = 0$ en $x = 1$ (punto crítico). El signo de f' y el comportamiento de f son



La función crece en $(-\infty, 1]$ y decrece en $[1, \infty)$. El número

$$f(1) = \frac{1}{e} \cong \frac{1}{2{,}72} \cong 0{,}368$$

es un máximo local y absoluto. No existen otros valores extremos.

Consideremos ahora f''. El signo de f'' y el comportamiento de la gráfica de f son

f'': – 0 + + + + + + + + +

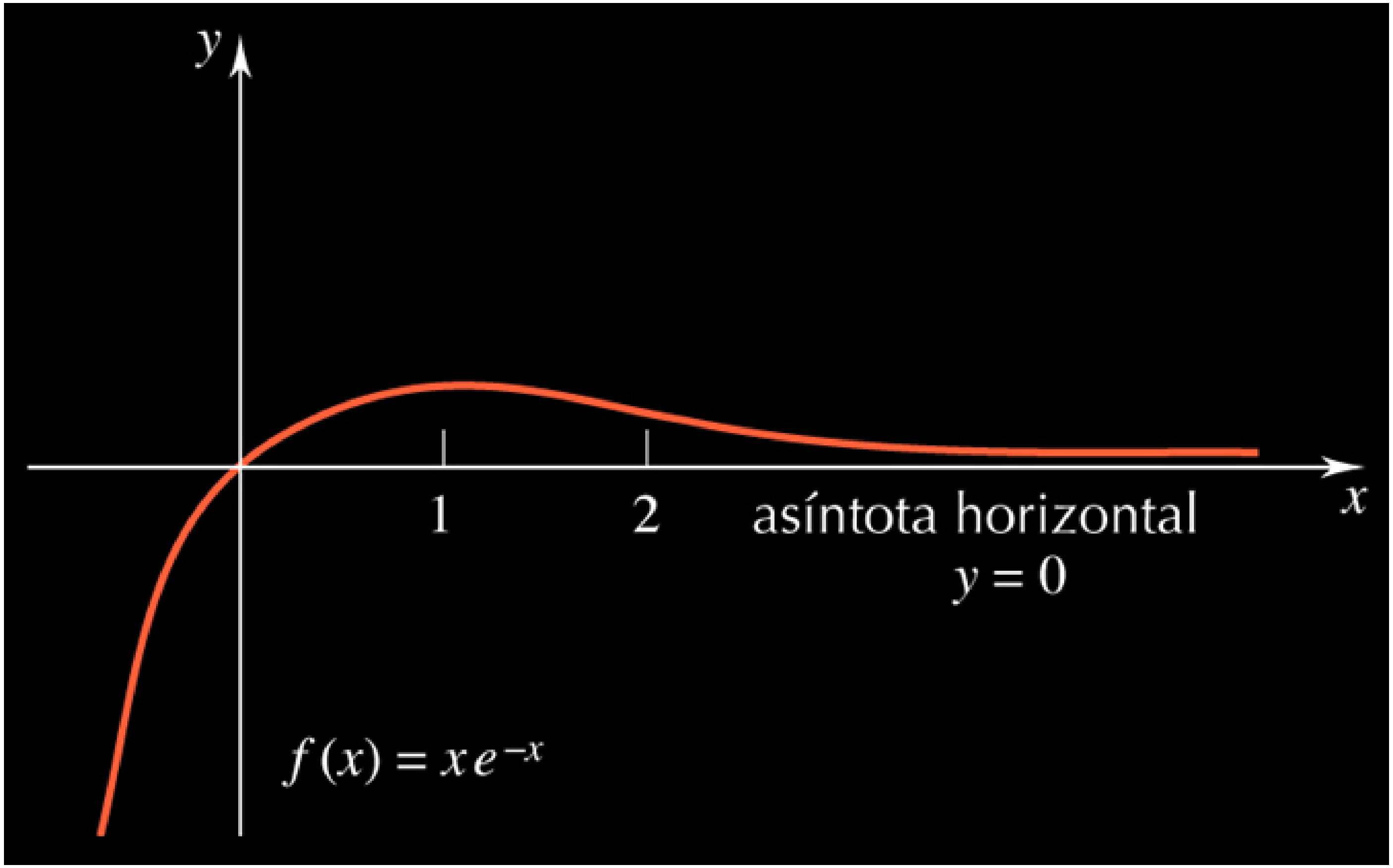
gráfica: 0 1 2 x

cóncava hacia abajo cóncava hacia arriba

La gráfica es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, \infty)$. El punto

$$(2, f(2)) = (2, 2e^{-2}) \cong \left(2, \frac{2}{(2{,}72)^2}\right) \cong (2, 0{,}27)$$

es el único punto de inflexión. En la sección 10.6 demostraremos que $f(x) = x/e^x \to 0$ cuando $x \to \infty$. Aceptando este resultado, se deduce que el eje x es una asíntota horizontal. La gráfica está representada en la figura 7.4.2.


y
x
1
2
asíntota horizontal
y = 0
f (x) = x e^{−x}

Ejemplo 3 Sea $f(x) = e^{-x^2/2}$ para todo real x.

(a) Determinar la simetría de la gráfica y las asíntotas, si las hay. **(b)** ¿En qué intervalos es f creciente? ¿Y decreciente? **(c)** Hallar los valores extremos. **(d)** Determinar la concavidad de la gráfica y hallar los puntos de inflexión. **(e)** Representar la gráfica.

NOTA: Esta función tiene un papel muy importante en los campos matemáticos de la probabilidad y la estadística. Como veremos después de completar los puntos (a)-(e), su gráfica es la familiar curva en forma de campana.

Solución Dado que $f(-x) = e^{-(-x)^2/2} = e^{-x^2/2} = f(x)$, f es una función par cuya gráfica es simétrica respecto del eje y. Cuando $x \to \pm\infty$, $e^{-x^2/2} \to 0$. Por tanto, el eje x es una asíntota horizontal. No hay asíntotas verticales.

Derivando f, obtenemos

$$f'(x) = e^{-x^2/2}(-x) = -xe^{-x^2/2}$$

$$f''(x) = -x(-xe^{-x^2/2}) - e^{-x^2/2} = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}.$$

Dado que $e^{-x^2/2} > 0$ para todo x, tenemos que $f'(x) = 0$ solamente en $x = 0$ (punto crítico). El signo de f' y el comportamiento de f son

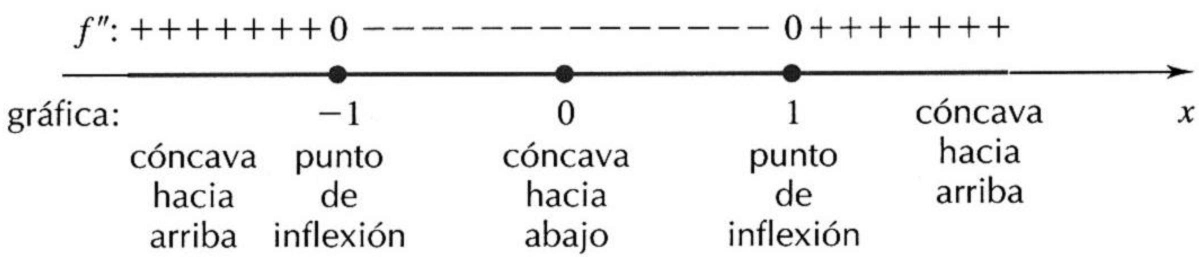
	$x < 0$	0	$x > 0$
f':	$+++++++++++$	0	$-----------$
f:	crece		decrece

Así, f es creciente en $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[0, \infty)$. El número

$$f(0) = e^0 = 1$$

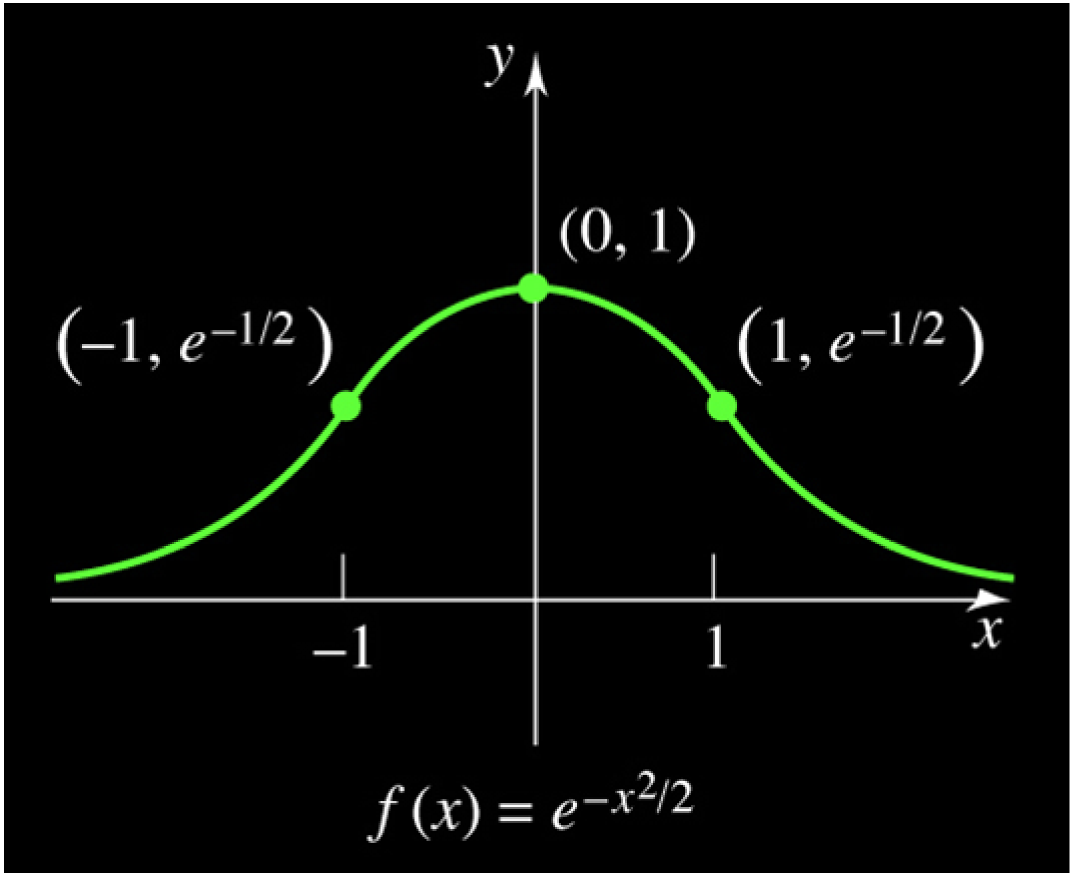
es un máximo local y absoluto. No hay otros valores extremos.

Consideremos ahora $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$. El signo de f'' y el comportamiento de la gráfica de f son



La gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, es cóncava hacia abajo en $(-1,1)$ y los puntos $(-1, e^{-1/2})$ y $(1, e^{-1/2})$ son puntos de inflexión.

En la figura 7.4.3 se muestra la gráfica de f.


y
(0, 1)
$\left(-1, e^{-1/2}\right)$
$\left(1, e^{-1/2}\right)$
–1
1
x
$f(x) = e^{-x^2/2}$

La versión integral del teorema 7.4.9 toma la forma

$$\boxed{\int e^x \, dx = e^x + C.}$$

En la práctica, $\int e^{g(x)} g'(x) \, dx$ se reduce a $\int e^u \, du$

haciendo $u = g(x), \quad du = g'(x) \, dx.$

Luego, tenemos una importante generalización de (7.4.11):

$$\boxed{\int e^{g(x)} g'(x) \, dx = e^{g(x)} + C.}$$

Ejemplo 4 Hallar

$$\int 9e^{3x}\,dx.$$

Solución Sea

$$u = 3x, \qquad du = 3\,dx.$$

$$\int 9e^{3x}\,dx = 3\int e^u\,du = 3e^u + C = 3e^{3x} + C.$$

Si uno se da cuenta desde el principio que

$$3e^{3x} = \frac{d}{dx}(e^{3x}),$$

entonces puede ahorrarse el cambio de variable y simplemente escribir

$$\int 9e^{3x}\,dx = 3\int 3e^{3x}\,dx = 3e^{3x} + C.$$

Ejemplo 5 Hallar $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Solución Sea $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{u}\,du = 2e^{u} + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Si uno se da cuenta que

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}),$$

entonces puede ahorrarse el cambio de variable e integrar directamente

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)dx = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Ejemplo 6 Hallar

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx.$$

Solución Podemos poner esta integral en la forma

$$\int \frac{du}{u}$$

haciendo

$$u = e^{3x}+1, \qquad du = 3e^{3x}\,dx.$$

Entonces

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx = \tfrac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \tfrac{1}{3}\ln|u| + C = \tfrac{1}{3}\ln(e^{3x}+1) + C.$$

Ejemplo 7 Las integrales que implican $xe^{-x^2/2}$ también desempeñan un importante papel en probabilidad y estadística. Evaluar

$$\int_0^{\sqrt{2\ \ln\ 3}} xe^{-x^2/2}\ dx.$$

Solución Hagamos

$$u = -\tfrac{1}{2}x^2, \qquad du = -x\ dx.$$

En $x = 0$, $u = 0$; en $x = \sqrt{2\ \ln\ 3}$, $u = -\ln 3$. Por lo tanto,

$$\int_0^{\sqrt{2\ \ln\ 3}} xe^{-x^2/2}\ dx = -\int_0^{-\ln\ 3} e^u\ du = -[e^u]_0^{-\ln\ 3} = 1 - e^{-\ln\ 3} = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

Ejemplo 8 Evaluar

$$\int_0^1 e^x(e^x+1)^{1/5}\,dx.$$

Solución Hagamos

$$u = e^x + 1, \qquad du = e^x\,dx.$$

En $x = 0$, $u = 2$; en $x = 1$, $u = e + 1$. Luego

$$\int_0^1 e^x(e^x+1)^{1/5}\,dx = \int_2^{e+1} u^{1/5}\,du = \left[\tfrac{5}{6}u^{6/5}\right]_2^{e+1} = \tfrac{5}{6}[(e+1)^{6/5} - 2^{6/5}].$$

Observación El cambio de variable simplifica mucho los cálculos, pero cuando el lector tenga más experiencia comprobará que en muchos casos se puede llevar a cabo la integración más rápidamente sin utilizarlo.

Ejercicios sugeridos, Sección 7.4

Prácticos: 5, 11, 18, 28 47, 52, 54

Teóricos: 55, 58, 69, 70