Funciones Trascendentes 7

Sección 7.5

Potencias arbitrarias y otras bases

Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

7.5 POTENCIAS ARBITRARIAS; OTRAS BASES

Potencias arbitrarias: $\boxed{\text{la función } f(x) = x^r}$

La noción elemental de exponente sólo se aplica a los números racionales. Expresiones tales como

$$10^5, \quad 2^{1/3}, \quad 7^{-4/5}, \quad \pi^{-1/2}$$

tienen sentido, pero hasta ahora no hemos dado ningún significado a expresiones tales como

$$10^{\sqrt{2}}, \quad 2^{\pi}, \quad 7^{-\sqrt{3}}, \quad \pi^{e}.$$

La extensión de nuestro concepto de exponente al caso de los exponentes irracionales puede hacerse convenientemente mediante las funciones logaritmo y exponencial. La clave está en observar que para $x > 0$ y p/q racional

$$x^{p/q} = e^{(p/q)\ln x}.$$

(Para verificar esto, tomar el logaritmo de ambos miembros.) Para *definir* x^z para z irracional, basta hacer

$$x^z = e^{z \ln x}.$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } x > 0, \text{ entonces} \\ \qquad x^{r} = e^{r \ln x} \quad \text{para todo } r \text{ real.}\end{array}}$$

En particular

$$10^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ \ln 10}, \quad 2^{\pi} = e^{\pi\ \ln 2}, \quad 7^{-\sqrt{3}} = e^{-\sqrt{3}\ \ln 7}, \quad \pi^{e} = e^{e\ \ln\ \pi}.$$

Con este concepto generalizado del exponente, las leyes habituales de los exponentes

$$\boxed{x^{r+s} = x^r x^s, \quad x^{r-s} = \frac{x^r}{x^s}, \quad (x^r)^s = x^{rs}}$$

siguen siendo válidas:

$$x^{r+s} = e^{(r+s)\ln x} = e^{r\ln x} \cdot e^{s\ln x} = x^r x^s,$$

$$x^{r-s} = e^{(r-s)\ln x} = e^{r\ln x} \cdot e^{-s\ln x} = \frac{e^{r\ln x}}{e^{s\ln x}} = \frac{x^r}{x^s},$$

$$(x^r)^s = e^{s\ln x^r} = e^{rs\ln x} = x^{rs}.$$

En el capítulo 3, sección 3.7, demostramos que $d(x^p)/dx = px^{p-1}$ para cualquier número racional p. Podemos extender este resultado a potencias arbitrarias. Para *cualquier número real r*:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1} \qquad \text{para todo } x > 0.}$$

Demostración

$$\frac{d}{dx}(x^r) = \frac{d}{dx}(e^{r\ln x}) = e^{r\ln x}\frac{d}{dx}(r\ln x) = x^r\frac{r}{x} = rx^{r-1}.$$

También se puede escribir $f(x) = x^r$ y usar diferenciación logarítmica:

$$\ln f(x) = r\ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r}{x}$$

$$f'(x) = \frac{rf(x)}{x} = \frac{rx^r}{x} = rx^{r-1}.$$

Por ejemplo, $\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$, $\frac{d}{dx}(x^{\pi}) = \pi x^{\pi-1}$.

Si u es una función diferenciable de x, por la regla de la cadena,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u^r) = ru^{r-1}\frac{du}{dx}.}$$

Demostración

$$\frac{d}{dx}(u^r) = \frac{d}{du}(u^r)\frac{du}{dx} = ru^{r-1}\frac{du}{dx}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[(x^2+5)^{\sqrt{3}}] = \sqrt{3}(x^2+5)^{\sqrt{3}-1}(2x) = 2\sqrt{3}\,x(x^2+5)^{\sqrt{3}-1}.$$

Cada fórmula de derivada da lugar a una fórmula integral equivalente. La forma integral de (7.5.3) es

$$\boxed{\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \qquad \text{para } r \neq -1.}$$

Ejemplo 1 Hallar

$$\int \frac{x^3}{(2x^4+1)^\pi}\, dx.$$

Solución Hagamos

$$u = 2x^4 + 1, \qquad du = 8x^3\, dx.$$

$$\int \frac{x^3}{(2x^4+1)^\pi}\, dx = \tfrac{1}{8}\int \frac{du}{u^\pi} = \tfrac{1}{8}\left(\frac{u^{1-\pi}}{1-\pi}\right) + C = \frac{(2x^4+1)^{1-\pi}}{8(1-\pi)} + C.$$

Ejemplo 2 Hallar $\frac{d}{dx}[(x^2+1)^{3x}]$.

Solución Una manera de hallar esta derivada es observando que $(x^2+1)^{3x} = e^{3x\ \ln(x^2+1)}$ y luego diferenciando:

$$\frac{d}{dx}[(x^2+1)^{3x}] = \frac{d}{dx}[e^{3x\ \ln(x^2+1)}] = e^{3x\ \ln(x^2+1)}\left[3x\cdot\frac{2x}{x^2+1} + 3\ \ln(x^2+1)\right]$$

$$= (x^2+1)^{3x}\left[\frac{6x^2}{x^2+1} + 3\ \ln(x^2+1)\right].$$

Otra manera consiste en hacer $f(x) = (x^2+1)^{3x}$ y recurrir a la diferenciación logarítmica:

$$\ln f(x) = 3x\cdot\ln(x^2+1)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3x\cdot\frac{2x}{x^2+1} + [\ln(x^2+1)](3) = \frac{6x^2}{x^2+1} + 3\ \ln(x^2+1)$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{6x^2}{x^2+1} + 3\ \ln(x^2+1)\right]$$

$$= (x^2+1)^{3x}\left[\frac{6x^2}{x^2+1} + 3\ \ln(x^2+1)\right].$$

Base p: la función $f(x) = p^x$

Para formar la función $f(x) = x^r$ tomamos una variable x y la elevamos a una potencia constante r. Para formar la función $f(x) = p^x$, tomamos una constante positiva p y la elevamos a una potencia variable x. Dado que $1^x = 1$ para todo x, la función sólo tiene interés si $p \neq 1$.

Las funciones de la forma $f(x) = p^x$ se llaman *funciones exponenciales con base p*. La gran importancia del número e de Euler proviene del hecho que

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

Para otras bases la derivada tiene un factor suplementario.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(p^x) = p^x \ln p.}$$

Demostración

$$\frac{d}{dx}(p^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln p}) = e^{x \ln p} \ln p = p^x \ln p.$$

Luego, por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(10^x) = 10^x \ln 10.$$

Si u es una función diferenciable de x, por la regla de la cadena,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(p^u) = p^u \ln p \, \frac{du}{dx}.}$$

Demostración

$$\frac{d}{dx}(p^u) = \frac{d}{du}(p^u)\frac{du}{dx} = p^u \ln p \, \frac{du}{dx}.$$

Por ejemplo $\quad \frac{d}{dx}(2^{3x^2}) = 2^{3x^2}(\ln 2)(6x) = 6x \, 2^{3x^2} \ln 2.$

La forma integral de (7.5.6) es

$$\boxed{\int p^x \, dx = \frac{1}{\ln p} p^x + C, \qquad p > 0,\, p \neq 1.}$$

Por ejemplo, $$\int 2^x \, dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + C.$$

Ejemplo 3 Hallar $$\int x 5^{-x^2} \, dx.$$

Solución Hagamos

$$u = -x^2, \qquad du = -2x \, dx.$$

$$\int x 5^{-x^2} \, dx = -\tfrac{1}{2} \int 5^u \, du = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 5}\right) 5^u + C = \frac{-1}{2 \ln 5} 5^{-x^2} + C.$$

Ejemplo 4 Evaluar
$$\int_1^2 3^{2x-1}\,dx.$$

Solución Hagamos
$$u = 2x - 1, \qquad du = 2\,dx.$$

En $x = 1$, $u = 1$; en $x = 2$, $u = 3$. Luego
$$\int_1^2 3^{2x-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^3 3^u\,du = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^u\right]_1^3 = \frac{12}{\ln 3} \cong 10{,}923.$$

Base p: la función $f(x) = \log_p x$

Si $p > 0$, entonces $\ln p^t = t \ln p$ para todo t.

Si p también es distinto de 1, entonces $\ln p \neq 0$ y tenemos $\dfrac{\ln p^t}{\ln p} = t.$

Esto indica que la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln p}$, $x > 0$, satisface la relación

$$f(p^t) = t \qquad \text{para todo } t \text{ real.}$$

A la vista de este hecho, llamaremos a $\dfrac{\ln x}{\ln p}$ *el logaritmo de x en base p*

y escribiremos

para $p > 0$, $p \neq 1$,

$$\log_p x = \frac{\ln x}{\ln p}, \qquad x > 0.$$

Por ejemplo,

$$\log_2 32 = \frac{\ln 32}{\ln 2} = \frac{\ln 2^5}{\ln 2} = \frac{5 \ln 2}{\ln 2} = 5$$

y

$$\log_{100}(\tfrac{1}{10}) = \frac{\ln(\frac{1}{10})}{\ln 100} = \frac{\ln 10^{-1}}{\ln 10^2} = \frac{-\ln 10}{2 \ln 10} = -\frac{1}{2}.$$

Podemos obtener estos mismos resultados de manera más directa a partir de la relación

$$\boxed{\log_p p^t = t.}$$

De acuerdo con esta expresión tenemos

$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \qquad \text{y} \qquad \log_{100}(\tfrac{1}{10}) = \log_{100}(100^{-1/2}) = -\tfrac{1}{2}.$$

Diferenciando (7.5.9) se obtiene

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_p x) = \frac{1}{x \ln p}.}^{\dagger}$$

Cuando p es e, el factor $\ln p$ vale 1 y tenemos

$$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}.$$

Al logaritmo de base e, $\ln = \log_e$, se le llama "*logaritmo natural*" por ser el logaritmo cuya derivada tiene la expresión más sencilla.

Si u es una función positiva y diferenciable de x, entonces, por la regla de la cadena,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_p u) = \frac{1}{u \ln p} \cdot \frac{du}{dx}.}$$

† La función $f(x) = \log_p(x)$ verifica $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln p}, \qquad f'(1) = \dfrac{1}{\ln p}.$

Esto significa que, en general, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x} f'(1).$

Ejemplo 5 Hallar **(a)** $\frac{d}{dx}[\log_2(3x^2+1)]$ y **(b)** $\frac{d}{dx}(\log_5|x|)$.

Solución

(a) Utilizando (7.5.12), tenemos

$$\frac{d}{dx}[\log_2(3x^2+1)] = \frac{1}{(3x^2+1)\ln 2}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{6x}{(3x^2+1)\ln 2}.$$

Alternativamente, podíamos haber utilizado la definición de $\log_p x$ dada por (7.5.9):

$$\frac{d}{dx}[\log_2(3x^2+1)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln(3x^2+1)}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{(3x^2+1)}\cdot 6x$$

$$= \frac{6x}{(3x^2+1)\ln 2}.$$

(b) $\dfrac{d}{dx}(\log_5|x|)$.

(b) Aquí es más fácil utilizar (7.5.9):

$$\frac{d}{dx}(\log_5 |x|) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln |x|}{\ln 5}\right] = \frac{1}{x \ln 5}.$$

No es necesario considerar la forma integral complementaria de (7.5.11), dado que la integral

$$\int \frac{1}{x \ln p}\, dx = \frac{1}{\ln p}\int \frac{1}{x}\, dx = \frac{\ln |x|}{\ln p} + C$$

se puede expresar en términos de $\log_p$ utilizando (7.5.9), si se desea.

Ejercicios sugeridos, Sección 7.5

Prácticos: 2, 7, 16, 28, 34, 39, 51

Teóricos: 9, 18, 36, 42