Funciones Trascendentes 7

Sección 7.7

Funciones trigonométricas inversas

Una y Varias Variables 4ª Ed.

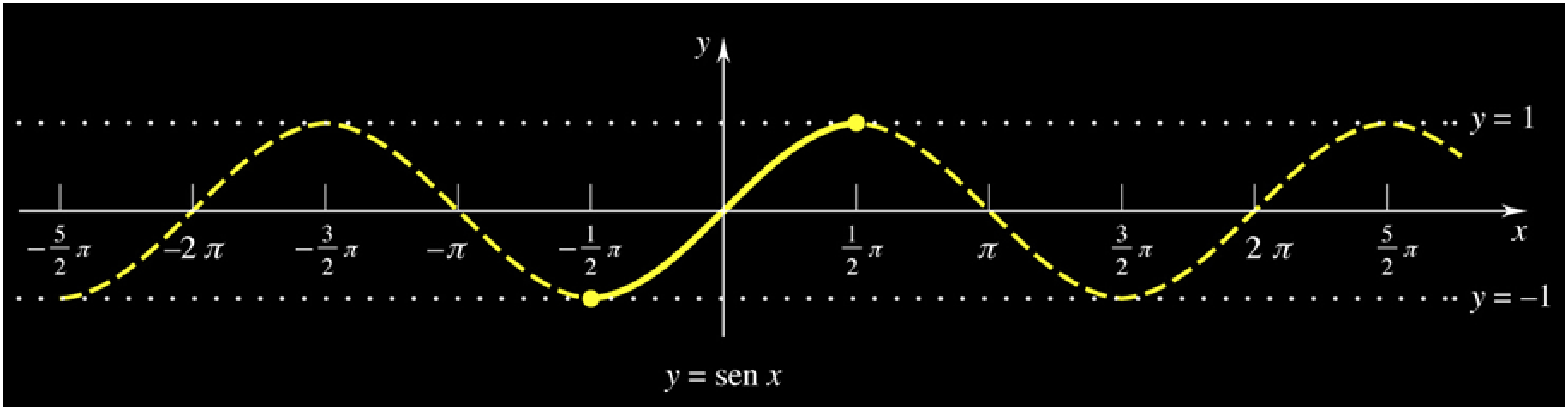
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

7.7 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Como ninguna de las funciones trigonométricas es inyectiva, ninguna puede tener inversa. ¿Qué son entonces las funciones trigonométricas inversas?

El arco seno

En la figura 7.1.1 se muestra la gráfica de $y = \text{sen } x$. Dado que cada recta entre -1 y 1 interseca la gráfica en infinitos puntos, la función seno no tiene inversa. Sin embargo, si restringimos el dominio al intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ (la parte de trazo continuo de la gráfica de la figura 7.1.1), tenemos que $y = \text{sen } x$ es inyectiva y en ese intervalo toma todos los valores de $[-1, 1]$. Así, si $x \in [-1, 1]$, existe un número y solamente uno en el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ en el cual la función seno toma el valor x. Este número se llama el *seno inverso de* x, o *el ángulo cuyo seno es* x y se escribe $\text{arcsen } x$.

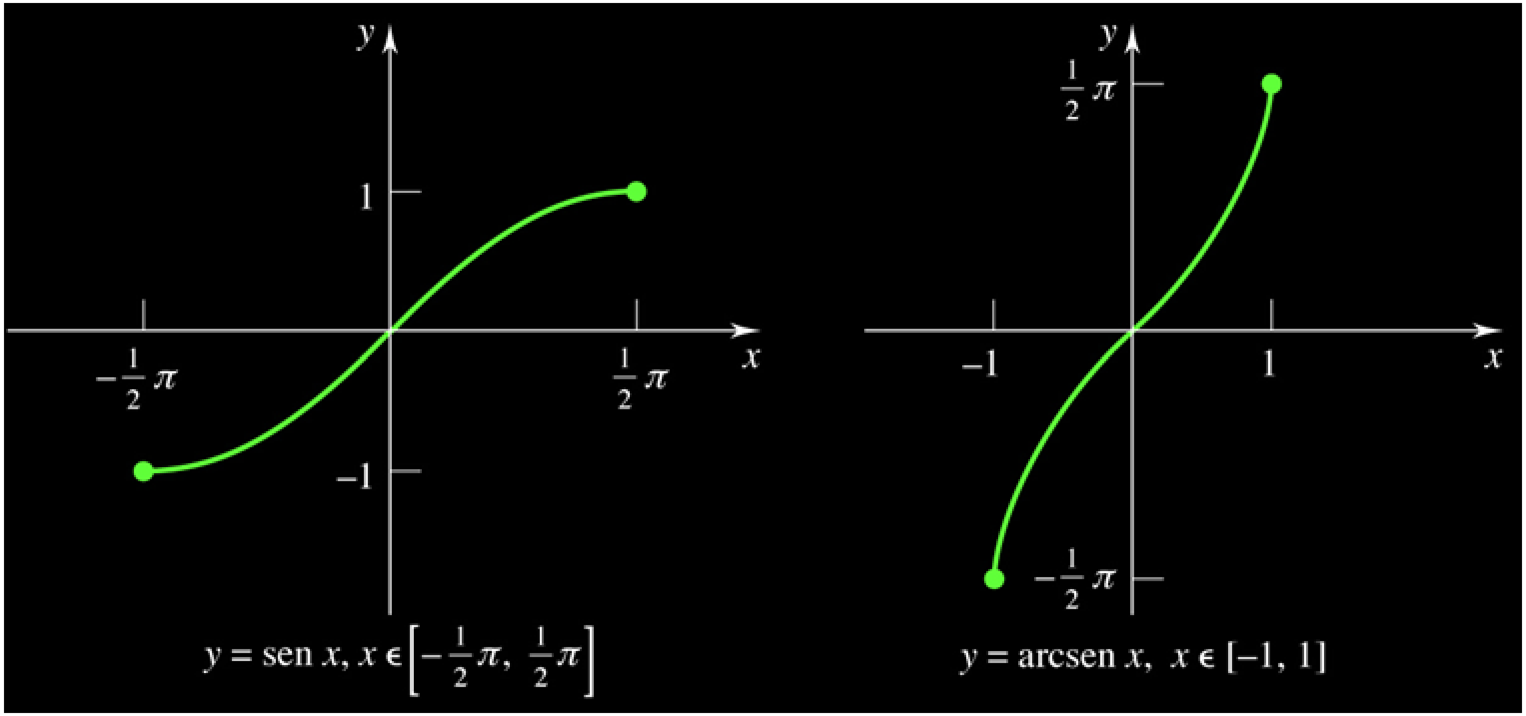


Observación Otra notación que se utiliza habitualmente en los textos en lengua inglesa es sen^{-1}. En estos casos, hay que recordar que el "–1" no es un exponente y no debe confundirse $\text{sen}^{-1}x$ con la recíproca $1/\text{sen}\, x$.

La *función arco seno* $y = \text{arcsen}\, x$, dominio: $[-1, 1]$, imagen: $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

es la inversa de la función $y = \text{sen}\, x$, dominio: $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, imagen: $[-1, 1]$.

Las gráficas de estas funciones están representadas en la figura 7.7.2. Cada curva es la simétrica de la otra respecto de la recta $y = x$.



Puesto que estas funciones son inversas una de otra, tenemos

$$\boxed{\text{para todo } x \in [-1, 1], \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x}$$

y

$$\boxed{\text{para todo } x \in [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi], \qquad \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x.}$$

La tabla 7.7.1 da algunos valores representativos de la función seno desde $x = -\frac{1}{2}\pi$ hasta $x = \frac{1}{2}\pi$. Intercambiando el orden de las columnas, obtenemos una tabla para la función arco seno (tabla 7.7.2).

Observando la tabla 7.7.2, uno puede conjeturar que para todo $x \in [-1, 1]$ se verifica

$$\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen} x.$$

Así es. Al ser la inversa de una función impar ($\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ para todo $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$), el arco seno también es una función impar. (Comprobarlo.)

TABLA 7.7.1	
x	sen x
$-\frac{1}{2}\pi$	-1
$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$-\frac{1}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	1

TABLA 7.7.2	
x	arcsen x
-1	$-\frac{1}{2}\pi$
$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\pi$
$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{4}\pi$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}\pi$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\pi$
$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}\pi$
$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\pi$
1	$\frac{1}{2}\pi$

Ejemplo 1 Calcular, si están definidos:

(a) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \frac{1}{16}\pi)$. **(b)** $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \frac{7}{3}\pi)$. **(c)** $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3})$.

(d) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \frac{9}{5}\pi)$. **(e)** $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} 2)$.

Solución

(a) Dado que $\frac{1}{16}\pi$ pertenece al intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, sabemos por (7.7.2) que

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \tfrac{1}{16}\pi) = \tfrac{1}{16}\pi.$$

(b) Dado que $\frac{7}{3}\pi$ no pertenece al intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, no podemos aplicar (7.7.2) directamente. Sin embargo, $\frac{7}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + 2\pi$ y $\operatorname{sen}(\frac{1}{3}\pi + 2\pi) = \operatorname{sen}(\frac{1}{3}\pi)$ (recordar que la función seno es periódica con período 2π). Luego

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \tfrac{7}{3}\pi) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\tfrac{1}{3}\pi + 2\pi)) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi) \underset{\text{por (7.7.2)}}{=} \tfrac{1}{3}\pi.$$

(c) Por (7.7.1), $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

(d) Dado que $\frac{9}{5}\pi$ no pertenece al intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, no podemos aplicar (7.7.2) directamente. Sin embargo, $\frac{9}{5}\pi = 2\pi - \frac{1}{5}\pi$. Luego

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \tfrac{9}{5}\pi) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(2\pi - \tfrac{1}{5}\pi)) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(-\tfrac{1}{5}\pi)) \underset{\text{por (7.7.2)}}{=} -\tfrac{1}{5}\pi.$$

(e) La expresión sen (arcsen 2) no tiene sentido puesto que 2 no pertenece al dominio de arco seno. El arco seno sólo está definido en $[-1, 1]$.

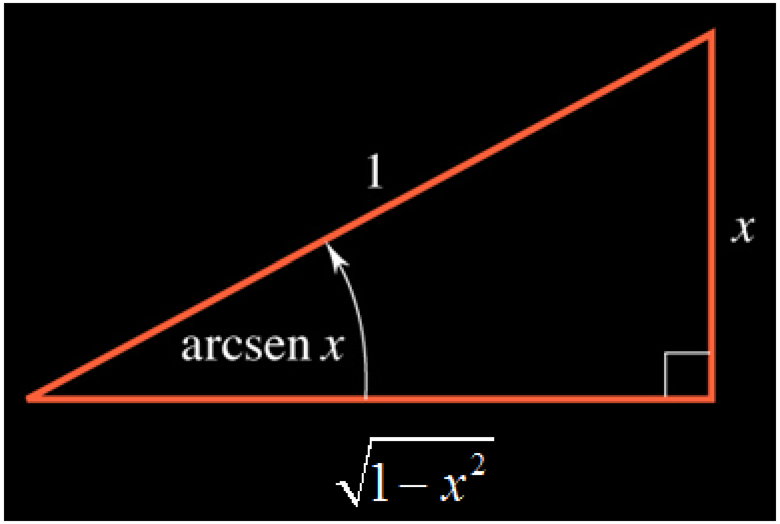
Si $0 < x < 1$, entonces arcsen x es la medida en radianes del ángulo agudo cuyo seno es x. Podemos construir un ángulo que mida arcsen x radianes dibujando un triángulo rectángulo con un cateto de longitud x y una hipotenusa de longitud 1. (Figura 7.7.3.)

Analizando la figura, obtenemos:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x, \qquad \cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$\tan(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \cot(\operatorname{arcsen} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\sec(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \operatorname{cosec}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{x}.$$



Puesto que la derivada de la función seno, $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$,

no toma el valor 0 en el intervalo *abierto* $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, (recordar que $\cos x > 0$ para $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$), la función arco seno es diferenciable en el intervalo abierto $(-1, 1)$.† Podemos hallar su derivada de la siguiente manera:

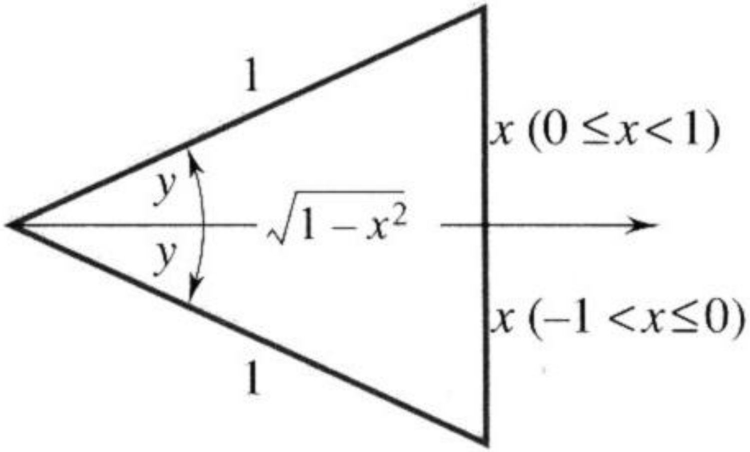
$$y = \operatorname{arcsen} x,$$

$$\operatorname{sen} y = x,$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \text{(Ver figura.)}$$

Resumiendo,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$



Ejemplo 2 Hallar

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen } (3x^2)].$$

NOTA: Aunque no hemos insistido en ello, continuamos con la convención de que si el dominio de una función f no está explícitamente especificado, entonces se entiende que es el conjunto más grande de números reales x para los cuales $f(x)$ es un número real. En ese caso, el dominio es el conjunto de números reales x tales que $-1 \leq 3x^2 \leq 1$, es decir, $|x| \leq 1/\sqrt{3}$.

Solución En general, debido a la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen } u] = \frac{d}{du}[\text{arcsen } u] \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}.$$

Luego

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen } (3x^2)] = \frac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}} \frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}.$$

Ejemplo 3 Demostrar que para $a > 0$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C.}$$

Solución Realizamos un cambio de variable de tal manera que la a^2 del denominador se transforme en un 1 y podamos usar (7.7.3). Hacemos

$$au = x, \qquad a\,du = dx.$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\,du}{\sqrt{a^2 - a^2u^2}} \underset{\text{dado que } a>0}{=} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \operatorname{arcsen} u + C = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Ejemplo 4 Hallar

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Solución Por (7.7.4)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

De ahí que

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcsen} 0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}.$$

El arco tangente

Aunque no es biunívoca en todo su dominio, la función tangente sí lo es en el intervalo $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ y en dicho intervalo toma como valores todos los números reales (ver figura 7.7.4). Es decir, para todo x existe un único número del intervalo abierto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ en el cual la función tangente toma el valor x. Este número se llama *arco tangente de x,* o *el ángulo cuya tangente es* x, y se escribe $\arctan x$ (en la literatura matemática anglosajona se emplea también la notación $\tan^{-1} x$).

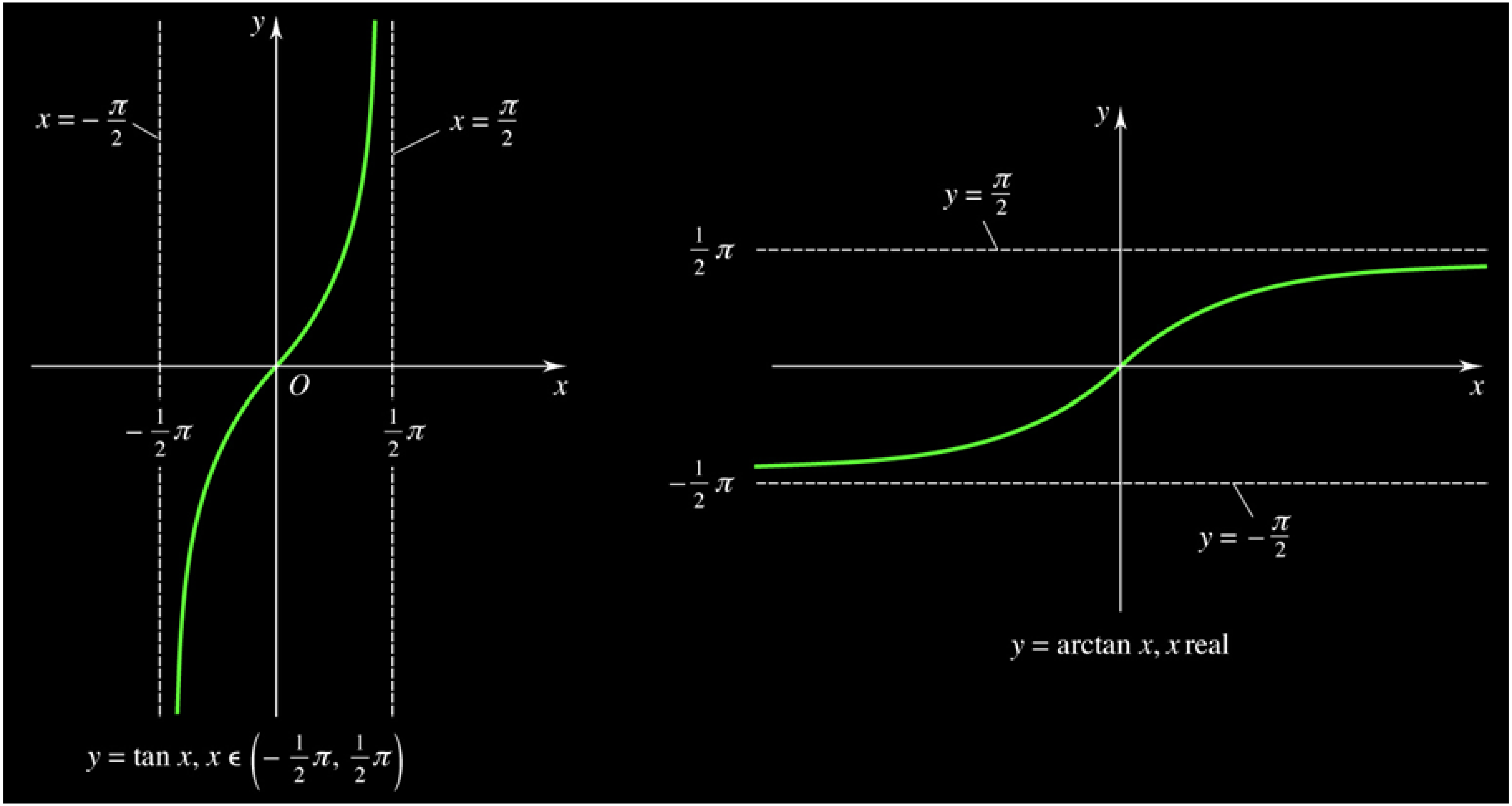
La *función arco tangente*

$$y = \arctan x, \qquad \text{dominio: } (-\infty, \infty), \qquad \text{imagen: } (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$$

es la inversa de la función

$$y = \tan x, \qquad \text{dominio: } (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi), \qquad \text{imagen: } (-\infty, \infty).$$

Las gráficas de estas dos funciones están representadas en la figura 7.7.4. Cada curva es la simétrica de la otra respecto de la recta $y = x$. Mientras que la tangente tiene asíntotas verticales, el arco tangente tiene asíntotas horizontales. Ambas funciones son impares.



Dado que estas funciones son inversas la una de la otra,

(7.7.5) $\boxed{\text{para todo número } x \text{ real,} \qquad \tan(\arctan x) = x}$

y

(7.7.6) $\boxed{\text{para todo } x \in (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi), \qquad \arctan(\tan x) = x.}$

Es difícil equivocarse con la primera relación, pues ésta se verifica para todos los números reales. Con la segunda hay que tener el cuidado habitual:

$$\arctan(\tan \tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi \qquad \text{pero} \qquad \arctan(\tan \tfrac{7}{5}\pi) \neq \tfrac{7}{5}\pi.$$

Podemos calcular arctan (tan $\frac{7}{5}\pi$) de la siguiente manera: $\frac{7}{5}\pi = \frac{2}{5}\pi + \pi$ y $\tan(\frac{2}{5}\pi + \pi) = \tan \frac{2}{5}\pi$ (recordar que la función tangente es periódica con período π). La relación arctan (tan $\frac{2}{5}\pi$) = $\frac{2}{5}\pi$ es válida puesto que $\frac{2}{5}\pi$ pertenece al intervalo $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

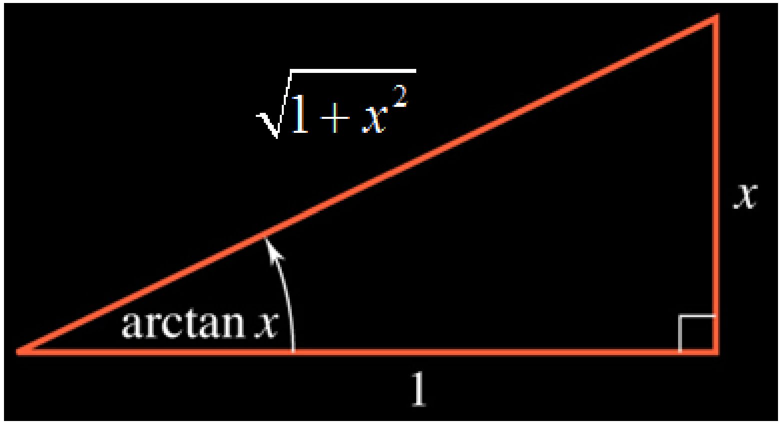
Si $x > 0$, entonces $\arctan x$ es la medida en radianes del ángulo agudo cuya tangente es x. Podemos construir un ángulo cuya medida en radianes sea $\arctan x$ dibujando un triángulo rectángulo con catetos de longitudes x y 1 (figura 7.7.5). Los valores de

$$\tan(\arctan x) = x \qquad \cot(\arctan x) = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{sen}(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2} \qquad \operatorname{cosec}(\arctan x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

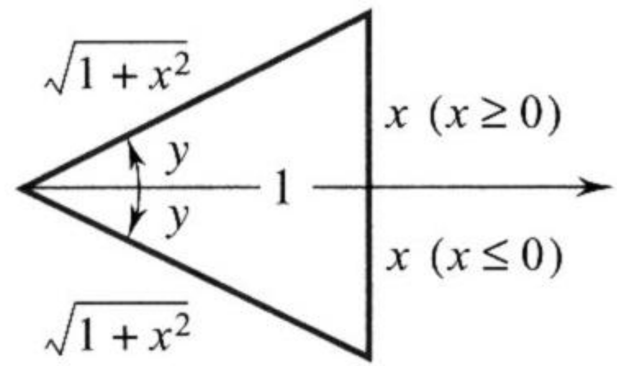
pueden obtenerse a partir de dicho triángulo.



Dado que la derivada de la función tangente, $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

no se anula nunca en $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, la función arco tangente es diferenciable en todas partes (sección 7.1). Podemos hallar la derivada con el mismo procedimiento que el empleado para el arco seno:

$$y = \arctan x,$$
$$\tan y = x,$$
$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$



Hemos obtenido que $$\boxed{\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

Ejemplo 5 Calcular

$$\frac{d}{dx}[\arctan\,(ax^2 + bx + c)].$$

Solución En general, debido a la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{d}{dx}[\arctan\,u] = \frac{d}{du}[\arctan\,u]\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\arctan\,(ax^2 + bx + c)] &= \frac{1}{1+(ax^2+bx+c)^2}\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)\\ &= \frac{2ax+b}{1+(ax^2+bx+c)^2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 6 Para $a \neq 0$, demostrar que

(7.7.8)
$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.}$$

Solución Haremos un cambio de variable de manera que el sumando a^2 del denominador se transforme en un 1 y podamos utilizar (7.7.7). Sea

$$au = x, \qquad a\,du = dx.$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a\,du}{a^2 + a^2u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1 + u^2} \underset{(7.7.7)}{=} \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Ejemplo 7 Calcular

$$\int_0^2 \frac{dx}{4 + x^2}.$$

Solución Por (7.7.8),

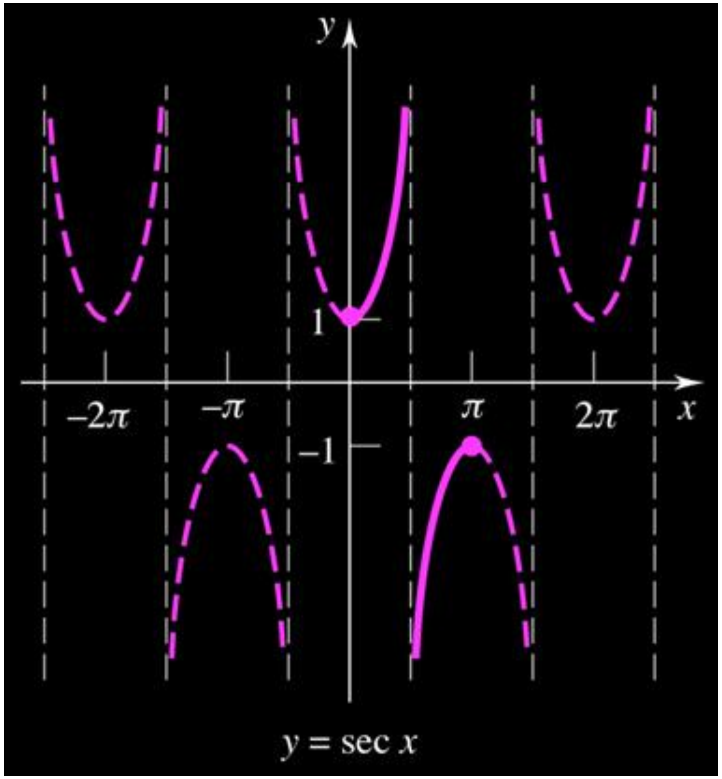
$$\int \frac{dx}{4 + x^2} = \int \frac{dx}{2^2 + x^2} = \tfrac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C,$$

luego

$$\int_0^2 \frac{dx}{4 + x^2} = \left[\tfrac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 = \tfrac{1}{2}\arctan(1) - \tfrac{1}{2}\arctan(0) = \frac{\pi}{8}.$$

Secante inversa

El procedimiento para definir la secante inversa es el mismo que el que se utilizó para las funciones seno y tangente inversas. En la figura 7.7.6 se muestra la gráfica de $y = \sec x$. Observar que $|\sec x| \geq 1$ para todo x en el dominio. Si restringimos el dominio al conjunto $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi]$ (la parte de trazo continuo en la gráfica de la figura 7.7.6), la función secante es inyectiva y para cada número real x tal que $|x| \geq 1$ existe un número y sólo uno en $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi]$ para el cual la función secante tiene el valor x. Este número se llama la *secante inversa de* x, o *el ángulo cuya secante es* x, y se escribe arcsec x o $\sec^{-1}x$.

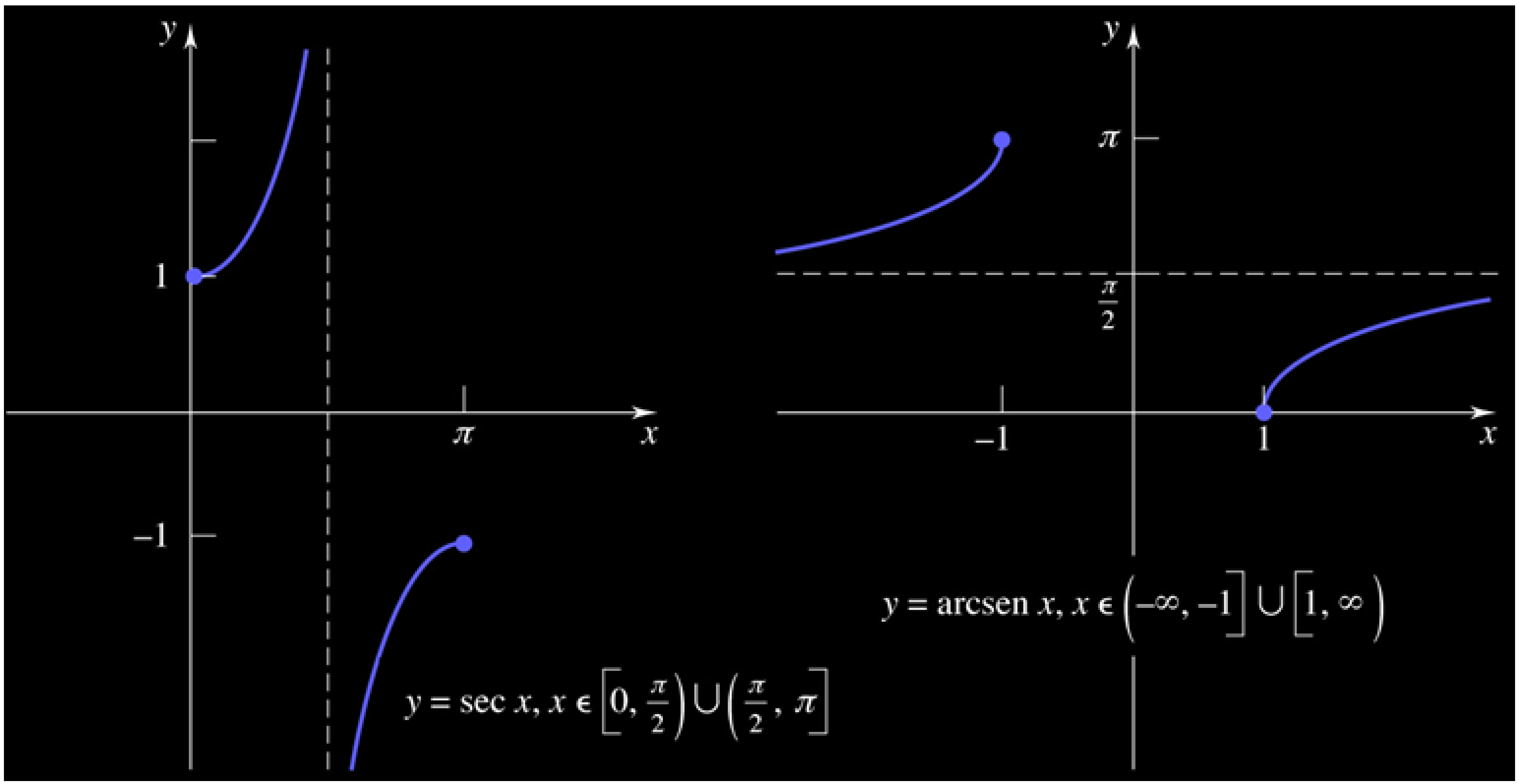


La *función secante inversa*

$$y = \operatorname{arcsec} x, \qquad \text{dominio: } (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \qquad \text{imagen: } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup (\tfrac{1}{2}\pi, \pi]$$

es la inversa de la función

$$y = \sec x, \qquad \text{dominio: } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup (\tfrac{1}{2}\pi, \pi], \qquad \text{imagen: } (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$



Las relaciones entre la función y la función inversa para sec x y arcsec x son

$$\boxed{\text{para todo } x \text{ tal que } |x| \geq 1, \qquad \sec(\operatorname{arcsec} x) = x}$$

$$\boxed{\text{para todo } x \in [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup (\tfrac{1}{2}\pi, \pi], \qquad \operatorname{arcsec}(\sec x) = x.}$$

Como hemos visto anteriormente, la segunda relación requiere especial atención:

$$\operatorname{arcsec}(\sec \tfrac{1}{3}\pi) = \tfrac{1}{3}\pi \qquad \text{pero} \qquad \operatorname{arcsec}(\sec \tfrac{7}{4}\pi) \neq \tfrac{7}{4}\pi.$$

Calculamos $\operatorname{arcsec}(\sec \tfrac{7}{4}\pi)$ como sigue:

$$\operatorname{arcsec}(\sec \tfrac{7}{4}\pi) = \operatorname{arcsec}(\sec [2\pi - \tfrac{1}{4}\pi]) = \operatorname{arcsec}(\sec \tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi.$$

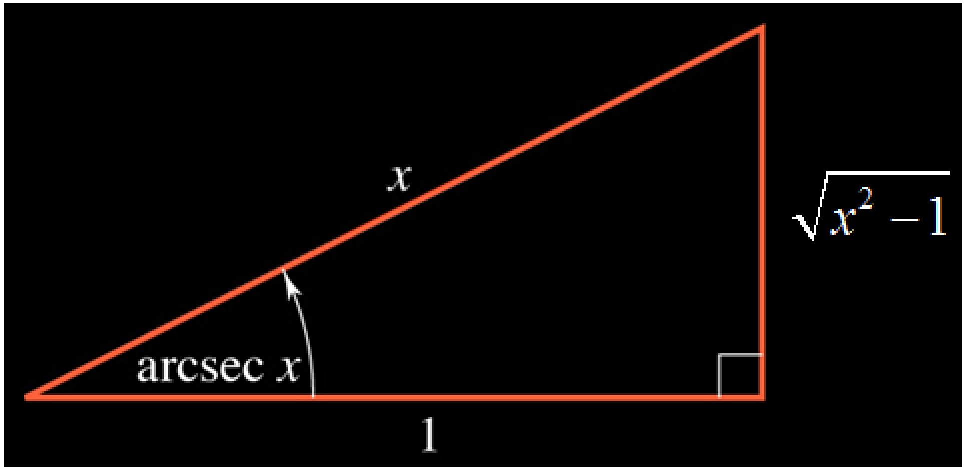
Si $x > 1$, entonces arcsec x es la medida en radianes del ángulo agudo que tiene secante x. Podemos construir un ángulo de arcsec x medido en radianes dibujando un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud x y un cateto de longitud 1 (figura 7.7.8). Todos los valores

$$\sec(\operatorname{arcsec} x) = x \qquad \operatorname{cosec}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \qquad \cos(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{x}$$

$$\tan(\operatorname{arcsec} x) = \sqrt{x^2-1} \qquad \cot(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

pueden leerse a partir de este triángulo.

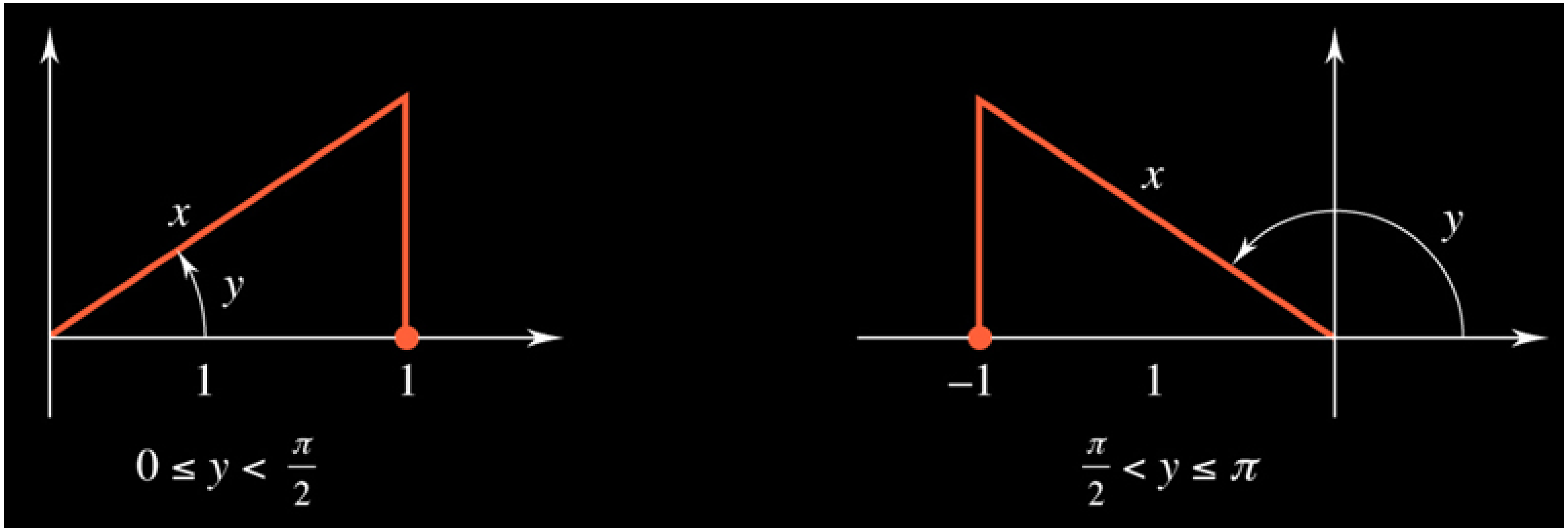


La derivada de la función secante, $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$,

no se anula en $(0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi)$. Por tanto, la función secante inversa es diferenciable para $|x| > 1$. Podemos hallar su derivada como sigue:

$$
\begin{aligned}
y &= \operatorname{arcsec} x, \\
\sec y &= x, \\
\sec y \tan y \frac{dy}{dx} &= 1, \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y \tan y}.
\end{aligned}
$$

Para completar el cálculo, tenemos que expresar el producto sec y tan y en función de x. Claramente, sec $y = x$ y en la figura 7.7.9 vemos que $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$. Ahora bien, si $x > 1$, entonces $0 < y < \frac{1}{2}\pi$ y tan $y = \sqrt{x^2 - 1}$; si $x < -1$, entonces $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ y tan $y = -\sqrt{x^2 - 1}$. En ambos casos, el producto sec y tan y es *positivo*.



Por tanto, tenemos $$\boxed{\frac{d}{dx}(\text{arcsec } x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.}$$

Observar que $dy/dx > 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$, lo que implica que $y = \text{arcsec } x$ es una función creciente en cada uno de estos intervalos. Esto es coherente con la gráfica que se muestra en la figura 7.7.7.

Ejemplo 8 Hallar

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec}(2\ \ln x)].$$

Solución Por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{d}{du}[\operatorname{arcsec} u]\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\ \frac{du}{dx}.$$

Luego

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec}(2\ \ln x)] = \frac{1}{|2\ \ln x|\sqrt{(2\ \ln x)^2-1}}\ \frac{d}{dx}(2\ \ln x) = \frac{1}{|2\ \ln x|\sqrt{4(\ln x)^2-1}}\cdot\frac{2}{x}$$

$$= \frac{1}{x|\ln x|\sqrt{4(\ln x)^2-1}}.$$

Ejemplo 9 Demostrar que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}|x| + C.$$

Solución Si $x > 1$, $\operatorname{arcsec}|x| = \operatorname{arcsec} x$ y

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Si $x < -1$, $\operatorname{arcsec}|x| = \operatorname{arcsec}(-x)$ y

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec}(-x)] = \frac{1}{|-x|\sqrt{x^2-1}}(-1) = \frac{-1}{-x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Por tanto, se deduce que $f(x) = \operatorname{arcsec}|x|$ es una antiderivada para $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Dejamos como ejercicio el demostrar que si $a > 0$ es constante, entonces

$$\boxed{\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C.}$$

Ejemplo 10 Calcular

$$\int_{2\sqrt{2}}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}.$$

Solución Utilizamos (7.7.12) con $a = 2$:

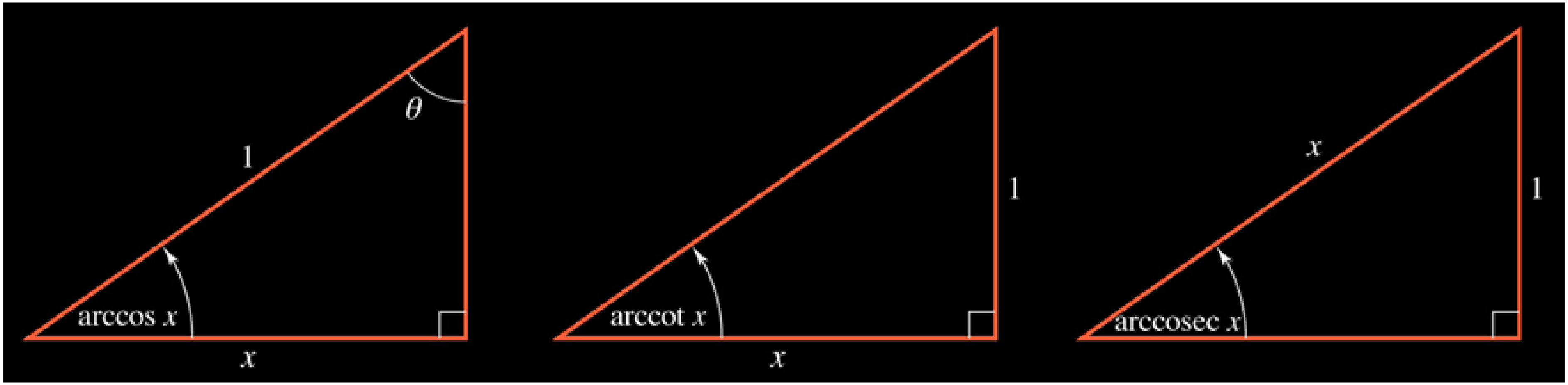
$$\int_{2\sqrt{2}}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}} = \left[\tfrac{1}{2} \operatorname{arcsec} \frac{|x|}{2}\right]_{2\sqrt{2}}^{4} = \tfrac{1}{2} \operatorname{arcsec} 2 - \tfrac{1}{2} \operatorname{arcsec} \sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}.$$

Las otras funciones trigonométricas inversas

Existen otras tres funciones trigonométricas inversas:

el *arco coseno*, $y = \text{arccos } x$, es la inversa de $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$;
el *arco cotangente*, $y = \text{arccot } x$, es la inversa de $y = \cot x$, $x \in (0, \pi)$;
el *arco cosecante*, $y = \text{arccosec } x$ es la inversa de $y = \text{cosec } x$, $x \in [-\frac{1}{2}\pi, 0) \cup (0, \frac{1}{2}\pi]$.

La figura 7.7.10 ilustra cada una de estas inversas entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$ en términos de triángulos rectángulos.



Las fórmulas de diferenciación de estas funciones son

$$\frac{d}{dx}(\text{arccos } x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d}{dx}(\text{arcsen } x)$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arccot } x) = \frac{-1}{1+x^2} = -\frac{d}{dx}(\text{arctan } x)$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arccosec } x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = -\frac{d}{dx}(\text{arcsec } x).$$

En los ejercicios se pide comprobar estas fórmulas. Dado que las derivadas de estas funciones difieren de las derivadas de sus correspondientes cofunciones en un factor constante, no son necesarias para el cálculo de antiderivadas.

Observación En la figura 7.7.10*a* utilizamos θ para indicar el otro ángulo agudo del triángulo rectángulo. Dado que los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, tenemos

$$\theta + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2}.$$

Pero observar que sen $\theta = x$, lo que significa que $\theta = \operatorname{arcsen} x$. Por tanto,

$$\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x.$$

Se puede comprobar que las relaciones correspondientes funcionan para los pares $\{\tan x, \cot x\}$ y $\{\sec x, \operatorname{cosec} x\}$:

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{arccosec} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x.$$

Este es otro hecho que justifica que limitemos nuestra atención a arcsen x, arctan x y arcsec x.

Ejercicios sugeridos, Sección 7.7

Prácticos: 4, 7, 22, 31, 52, 58, 70

Teóricos: 43, 44, 45, 46