Funciones Trascendentes 7

Sección 7.8

Seno y coseno hiperbólicos

Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

7.8 SENO Y COSENO HIPERBÓLICOS

Ciertas combinaciones de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} son tan frecuentes en las aplicaciones matemáticas que reciben nombres especiales. El *seno hiperbólico* (senh) y el *coseno hiperbólico* (cosh) son las funciones definidas por

$$\boxed{\operatorname{senh} x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \qquad \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}).}$$

Las razones de tales nombres quedarán justificadas más adelante.

Como

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}[\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})] = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

y

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}[\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})] = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

tenemos

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x.}$$

Resumiendo, cada una de estas funciones es la derivada de la otra.

Las gráficas

Comenzamos con el seno hiperbólico. Puesto que

$$\operatorname{senh}(-x) = \tfrac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\tfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -\operatorname{senh} x,$$

el seno hiperbólico es una función impar. Luego su gráfica es simétrica respecto del origen. Dado que

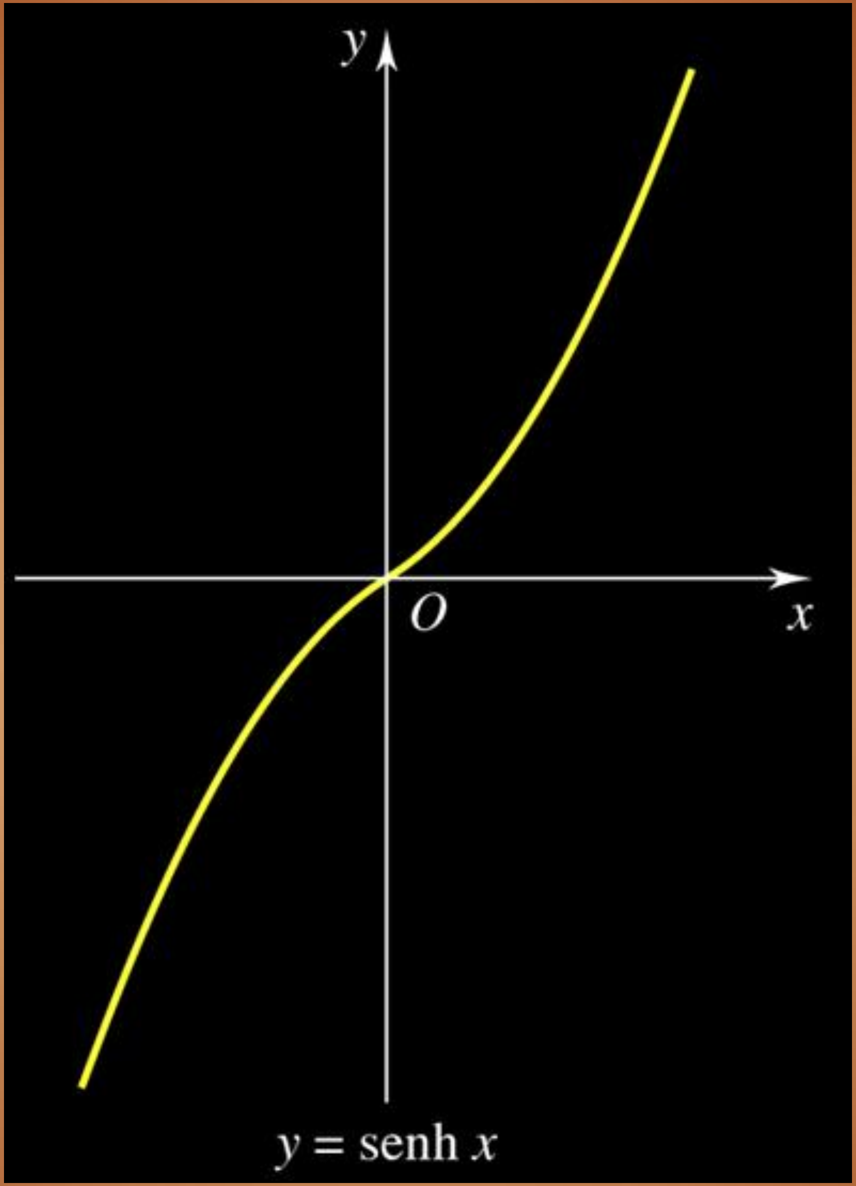
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) > 0 \qquad \text{para todo } x \text{ real},$$

el seno hiperbólico siempre es creciente. Dado que

$$\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x = \tfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}),$$

podemos ver que $$\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{senh} x) \text{ es } \begin{cases} \text{negativa,} & \text{para} \quad x < 0 \\ 0, & \text{en} \quad x = 0 \\ \text{positiva,} & \text{para} \quad x > 0. \end{cases}$$

Luego la gráfica es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$. El punto $(0, \operatorname{senh} 0) = (0, 0)$ es el único punto de inflexión. La pendiente en el origen es $\cosh 0 = 1$. En la figura 7.8.1 está representada esta gráfica.


y
O
x
y = senh x

Ocupémonos ahora del coseno hiperbólico. Puesto que

$$\cosh(-x) = \tfrac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = -\tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cosh x,$$

el coseno hiperbólico es una función par. Luego su gráfica es simétrica respecto del eje y. Dado que

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x,$$

podemos ver que $\frac{d}{dx}(\cosh x)$ es $\begin{cases} \text{negativa}, & \text{para} \quad x < 0 \\ 0, & \text{en} \quad x = 0 \\ \text{positiva}, & \text{para} \quad x > 0. \end{cases}$

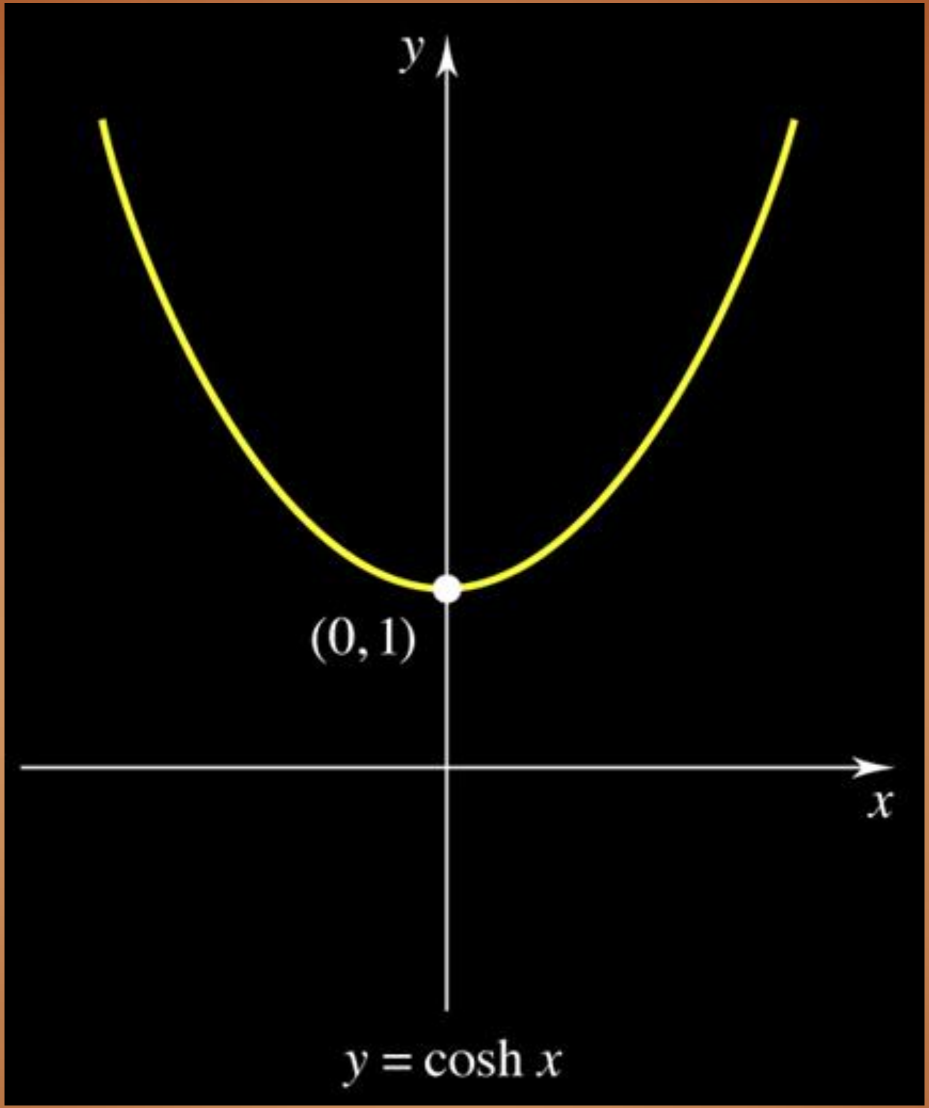
Luego la función decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$. El número

$$\cosh 0 = \tfrac{1}{2}(e^{0} + e^{-0}) = \tfrac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

es un mínimo local y absoluto. No existen otros valores extremos. Puesto que

$$\frac{d^2}{dx^2}(\cosh x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x > 0 \qquad \text{para todo } x \text{ real},$$

la gráfica siempre es cóncava hacia arriba. (Figura 7.8.2.)


y
(0, 1)
x
y = cosh x

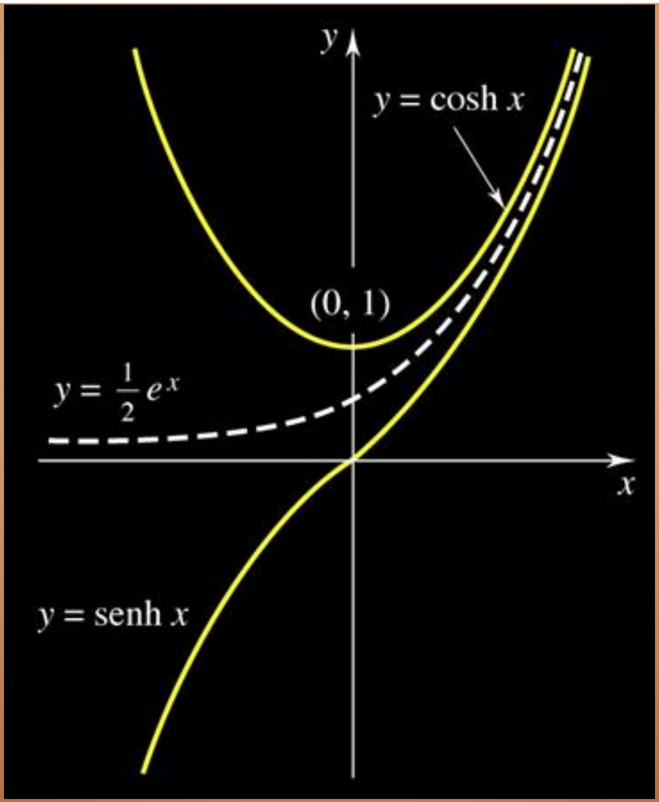
En la figura 7.8.3 hemos representado las gráficas de tres funciones

$$y = \operatorname{senh} x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad y = \tfrac{1}{2}e^x, \qquad y = \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Dado que $e^{-x} > 0$, se deduce que

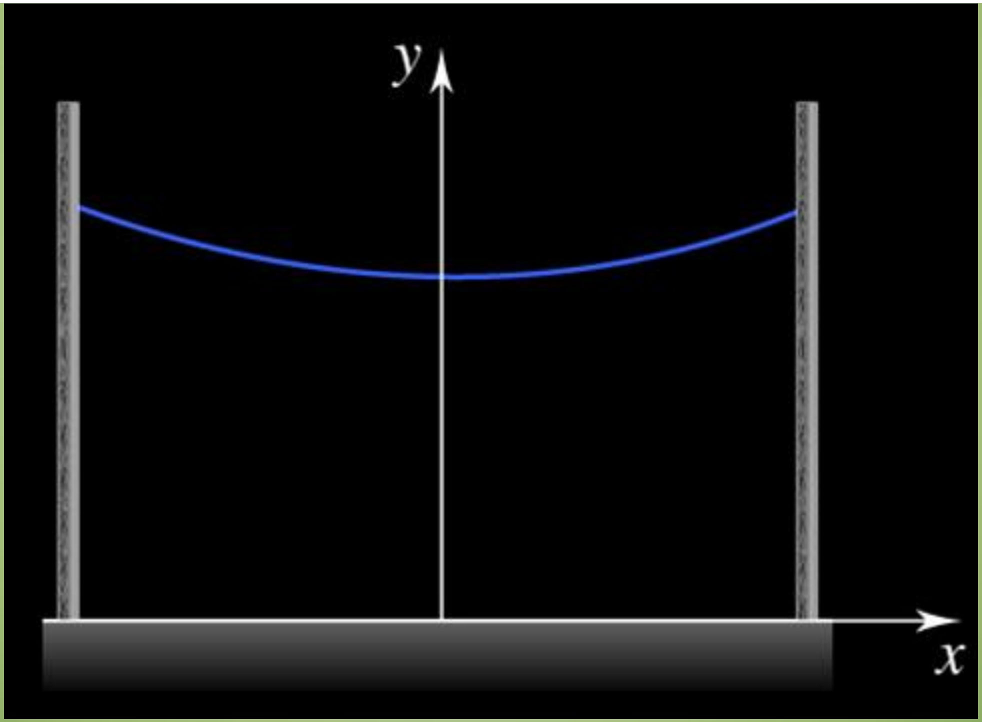
$$\operatorname{senh} x < \tfrac{1}{2}e^x < \cosh x \qquad \text{para todo } x \text{ real.}$$

Aunque marcadamente diferentes para las x negativas, estas funciones son casi indistinguibles para las x positivas grandes. La razón es que $e^{-x} \to 0$ cuando $x \to \infty$.



Aplicaciones

Las funciones hiperbólicas tienen muchas y variadas aplicaciones en ciencia e ingeniería. Quizás la aplicación mejor conocida es la utilización de la función coseno hiperbólico para describir la forma de una cadena o un cable flexibles suspendidos entre dos puntos. Por ejemplo, imaginemos un cable telefónico o una línea de alta tensión que se comban por su propio peso (figura 7.8.4).



Supongamos que tenemos un cable flexible de densidad uniforme suspendido entre dos puntos de igual altura. Si introducimos un sistema de coordenadas x-y de manera que el punto más bajo del cable se encuentre sobre el eje y (figura 7.8.5), se puede demostrar que la forma de la curva $y = f(x)$ debe verificar la ecuación diferencial

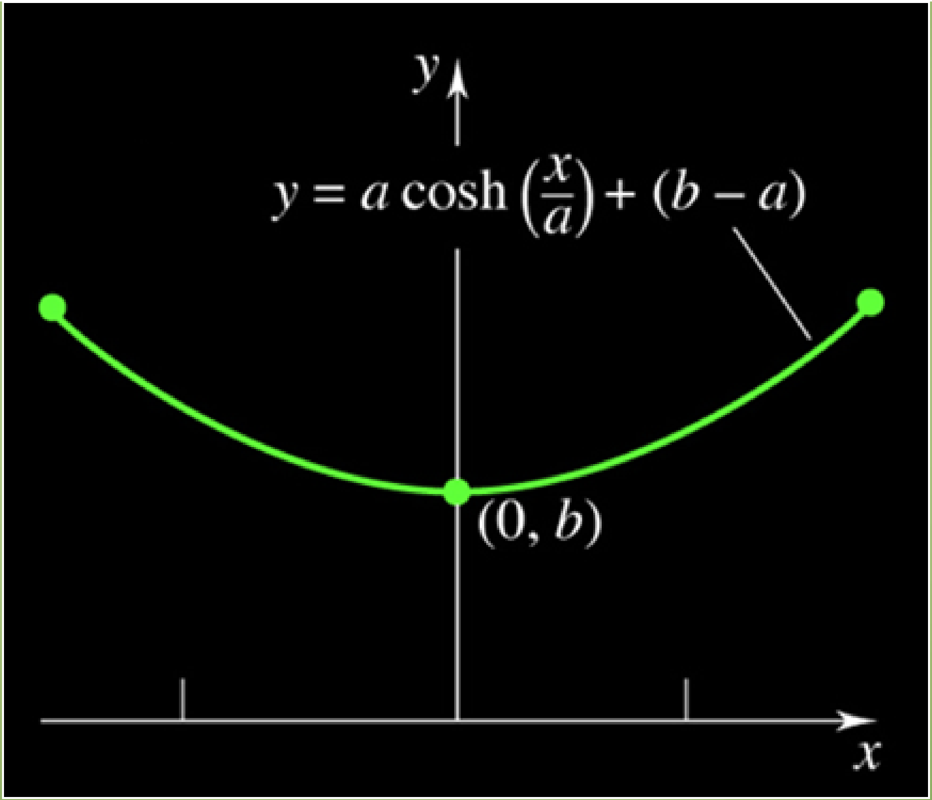
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},}$$

donde a es una constante que depende de la densidad del cable y de la tensión o fuerza horizontal en sus dos extremos.

En los ejercicios se pide demostrar que

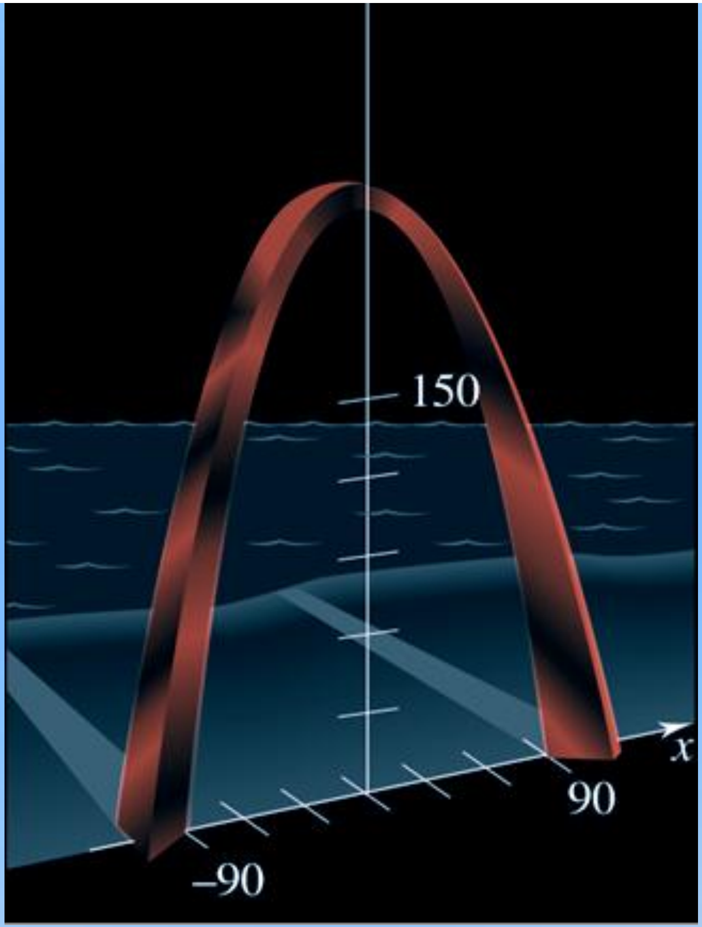
$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

es una solución de esta ecuación diferencial. La gráfica de esta solución se llama *catenaria*.



El Arco de la Puerta del Oeste de St. Louis (Missouri, Estados Unidos) tiene la forma de una catenaria invertida (figura 7.8.6). Mide 192 metros de altura en su centro y también mide 192 metros de anchura en su base. El valor de la constante a para este arco es aproximadamente 39 y su ecuación es

$$y = -39 \cosh (x/39) + 231.$$



Identidades

El seno y coseno hiperbólicos satisfacen identidades similares a las que satisfacen las funciones seno y coseno "circulares".

$$\begin{aligned}
\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t &= 1, \\
\operatorname{senh}(t+s) &= \operatorname{senh} t \cosh s + \cosh t \operatorname{senh} s, \\
\cosh(t+s) &= \cosh t \cosh s + \operatorname{senh} t \operatorname{senh} s, \\
\operatorname{senh} 2t &= 2 \operatorname{senh} t \cosh t, \\
\cosh 2t &= \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t.
\end{aligned}$$

La comprobación de estas identidades se deja al lector como ejercicio.

Relación con la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

El seno hiperbólico y el coseno hiperbólico están relacionados con la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ de la misma manera que el seno y el coseno "circulares" están relacionados con la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$:

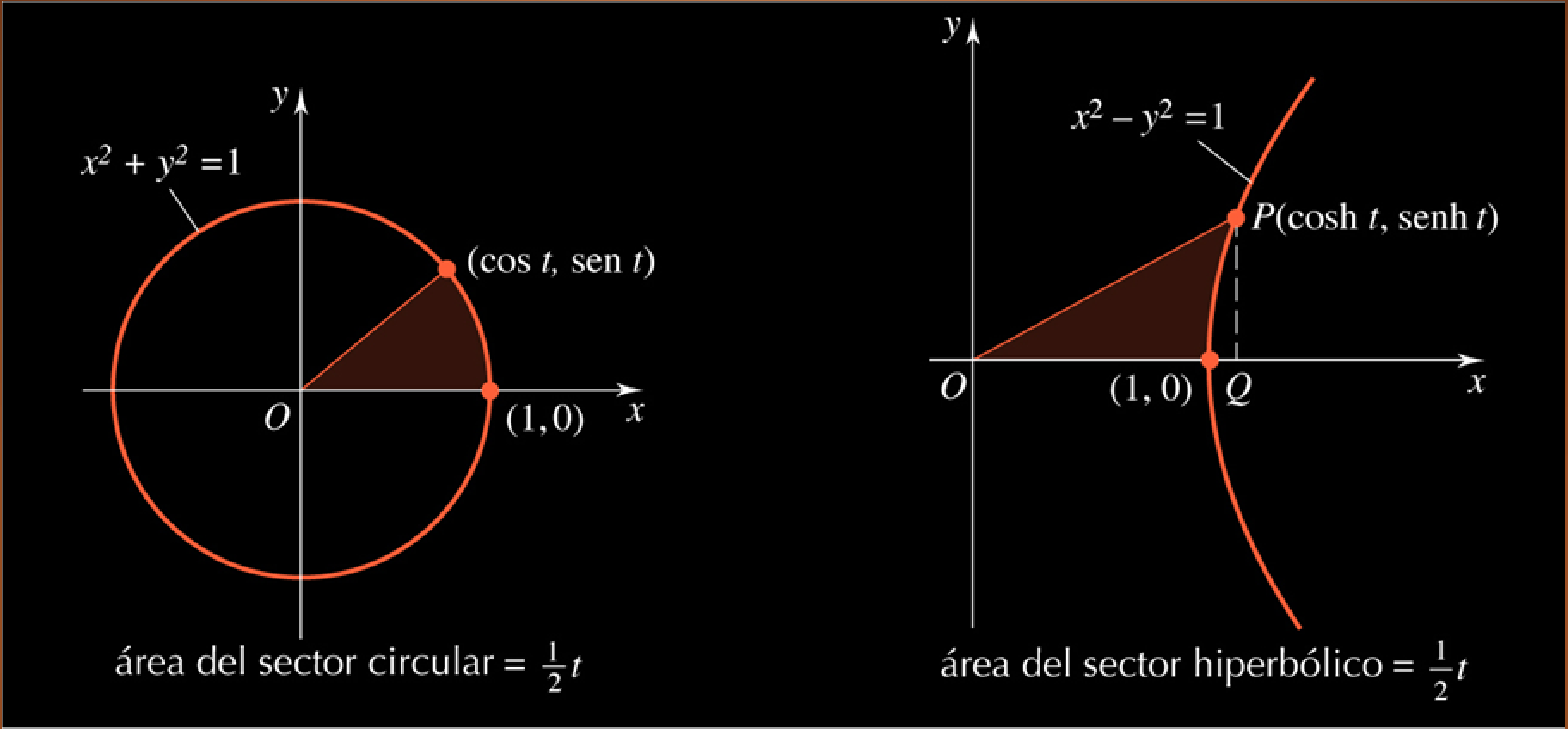
1. Para cada t real

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1,$$

luego el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Para cada t real,

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1,$$

luego el punto $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ está sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.



2. Para cada t en $[0, 2\pi]$ (ver la figura 7.8.7), el número $\frac{1}{2}t$ da el área del sector circular limitado por el arco circular que empieza en $(1, 0)$ y termina en $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Como demostraremos más abajo, para cada $t > 0$ (ver la figura 7.8.8), el número $\frac{1}{2}t$ da el área del sector hiperbólico limitado por el arco hiperbólico que comienza en $(1, 0)$ y termina en $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$.

Demostración Sea $A(t)$ el área del sector hiperbólico. No es difícil ver que

$$\boxed{A(t) = \tfrac{1}{2}\cosh t \; \operatorname{senh} t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1}\; dx.}$$

El primer término, $\frac{1}{2}\cosh t \operatorname{senh} t$, nos da el área del rectángulo OPQ, y la integral

$$\int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1}\; dx$$

nos da el área de la región no sombreada del triángulo. Queremos ver que

$$A(t) = \tfrac{1}{2}t \qquad \text{para todo } t \geq 0.$$

Lo haremos demostrando que

$$A'(t) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{para todo } t > 0 \qquad \text{y} \qquad A(0) = 0.$$

Diferenciando $A(t)$, obtenemos

$$A'(t) = \tfrac{1}{2}\left[\cosh t \frac{d}{dt}(\operatorname{senh} t) + \operatorname{senh} t \frac{d}{dt}(\cosh t)\right] - \frac{d}{dt}\left(\int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1}\; dx\right)$$

luego

(1) $$A'(t) = \tfrac{1}{2}(\cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t) - \frac{d}{dt}\left(\int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1}\, dx\right).$$

Diferenciemos ahora la integral:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1}\, dx\right) \underset{\uparrow (5.7.7)}{=} \sqrt{\cosh^2 t - 1}\, \frac{d}{dt}(\cosh t) = \operatorname{senh} t \cdot \operatorname{senh} t = \operatorname{senh}^2 t.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1), obtenemos

$$A'(t) = \tfrac{1}{2}(\cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t) - \operatorname{senh}^2 t = \tfrac{1}{2}(\cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t) = \tfrac{1}{2}.$$

No es difícil ver que $A(0) = 0$:

$$A(0) = (\tfrac{1}{2}\cosh 0 \ \operatorname{senh} 0 - \int_1^{\cosh 0} \sqrt{x^2 - 1}\, dx) = \tfrac{1}{2}(1)(0) - \int_1^1 \sqrt{x^2 - 1}\, dx = 0.$$

Ejercicios sugeridos, Sección 7.8

Prácticos: 8, 17, 19, 28, 33, 42, 43

Teóricos: 29, 30, 32, 36

TEMAS IMPORTANTES DEL CAPÍTULO

7.1 Funciones inversas

función inyectiva; función inversa (p. 366)
inyectividad y funciones crecientes/decrecientes; derivadas (p. 368)
relación entre las gráficas de f y de f^{-1} (p. 369)
continuidad y diferenciabilidad de funciones inversas (p. 370)
derivada de una inversa (p. 371)

7.2 La función logaritmo, parte I

definición de la función logaritmo (p. 376)

logaritmo natural: $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0;$ dominio $(0, \infty)$, imagen $(-\infty, \infty)$

$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$
para $x, y > 0$ y r racional

$$\ln ab = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^r = r \ln a.$$

gráfica de $y = \ln x$ (p. 379)

7.3 La función logaritmo, parte II

$$\frac{d}{dx}(\ln|u|) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad \int\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C, \qquad \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C,$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C, \qquad \int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C,$$

diferenciación logarítmica (p. 388)

7.4 La función exponencial

La función exponencial $y = e^x$ es la inversa de la función logaritmo $y = \ln x$.

gráfica de $y = e^x$ (p. 392); dominio $(-\infty, \infty)$, imagen $(0, \infty)$

$$\ln(e^x) = x, \qquad e^{\ln x} = x, \qquad e^0 = 1, \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \qquad e^{a+b} = e^a e^b, \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}, \qquad \int e^{g(x)}g'(x)\,dx = e^{g(x)} + C$$

7.5 Exponentes arbitrarios; otras bases; estimación de *e*

$x^r = e^{r \ln x}$ para todo $x > 0$ y todo r real

$$\frac{d}{dx}(p^u) = p^u \ln p \, \frac{du}{dx} \quad (p \text{ constante positiva}) \quad \log_p x = \frac{\ln x}{\ln p}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_p u) = \frac{1}{u \ln p} \frac{du}{dx}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad e \cong 2{,}71828$$

7.6 Crecimiento y caída exponencial

Las funciones lineales del tiempo varían en la misma *cantidad* durante períodos de tiempo de idéntica duración; las funciones exponenciales del tiempo se multiplican por un mismo *factor* durante los períodos de misma duración.

Todas las funciones que satisfacen la ecuación $f'(t) = kf(t)$ son de la forma $f(t) = Ce^{kt}$.

crecimiento de poblaciones (p. 409)
desintegración radiactiva, período de semidesintegración (p. 411)
interés compuesto, capitalización continua (p. 413)
regla del 72 (p. 415)

7.7 Funciones trigonométricas inversas

el arco seno, $y = \operatorname{arcsen} x$, es la función inversa de $y = \operatorname{sen} x, x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

el arco tangente, $y = \arctan x$, es la inversa de $y = \tan x, x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

el arco secante, $y = \operatorname{arcsec} x$, es la inversa de $y = \sec x, x \in [0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi]$.

gráfica de $y = \operatorname{arcsen} x$ (p. 418)

gráfica de $y = \arctan x$ (p. 421)

gráfica de $y = \operatorname{arcsec} x$ (p. 424)

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C \quad (a > 0)$$

definición de las demás funciones trigonométricas inversas (p. 426)

7.8 Seno y coseno hiperbólicos

$$\operatorname{senh} x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \qquad \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x.$$

gráficas (pp. 431-432)

identidades básicas (p. 433)