

Técnicas de Integración 8

Sección 8.1

Tablas de integrales y repaso

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4^a Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

8.1 TABLAS DE INTEGRALES Y REPASO

Para empezar, recordaremos las integrales más importantes que el lector ya ha tenido ocasión de ver.

$$1. \int k \, dx = kx + C, \quad k \text{ constante.}$$

$$2. \int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \neq -1.$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$4. \int e^x \, dx = e^x + C.$$

$$5. \int p^x \, dx = \frac{p^x}{\ln p} + C, \quad p > 0 \text{ constante}, p \neq 1.$$

$$6. \int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

$$8. \int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C.$$

$$9. \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$10. \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

$$11. \int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C.$$

$$12. \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C.$$

$$13. \int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C.$$

$$14. \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C.$$

$$15. \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0 \text{ constante.}$$

$$17. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0 \text{ constante.}$$

$$18. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C, \quad a > 0 \text{ constante.}$$

$$19. \int \sinh x \, dx = \cosh x + C.$$

$$20. \int \cosh x \, dx = \sinh x + C.$$

Ejemplo 1 Calcular

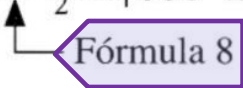
$$\int x \tan x^2 dx.$$

Solución Hagamos

$$u = x^2, \quad du = 2x dx.$$

Entonces

$$\int x \tan x^2 dx = \frac{1}{2} \int \tan u du = \frac{1}{2} \ln |\sec u| + C = \frac{1}{2} \ln |\sec x^2| + C.$$

Fórmula 8

Ejemplo 2 Calcular

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2} dx.$$

Solución Hagamos

$$u = e^x + 2, \quad du = e^x dx.$$

En $x = 0$, $u = 3$; en $x = 1$, $u = e + 2$. Luego

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2} dx &= \int_3^{e+2} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_3^{e+2} \\ &= \ln(e+2) - \ln 3 = \ln\left[\frac{1}{3}(e+2)\right] \cong 0,45. \end{aligned}$$

Fórmula 3

Ejemplo 3 Hallar

$$\int \frac{\cos 2x}{(2 + \sen 2x)^{1/3}} dx.$$

Solución Hagamos

$$u = 2 + \sen 2x, \quad du = 2 \cos 2x \, dx.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{(2 + \sen 2x)^{1/3}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{1/3}} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/3} du = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) u^{2/3} + C \\ &= \frac{3}{4} (2 + \sen 2x)^{2/3} + C. \end{aligned}$$

Fórmula 2

Ejemplo 4 Hallar

$$P = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

Solución Empezamos por completar el cuadrado en el denominador:

$$P = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 4} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2^2}.$$

Sabemos que

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{u}{a} \right) + C. \quad \text{Fórmula 17}$$

Haciendo

$$u = x + 1, \quad du = dx, \quad a = 2,$$

tenemos

$$P = \int \frac{du}{u^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{u}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x + 1}{2} \right) + C.$$

Utilización de una tabla de integrales Al final de este libro se ofrece una tabla con más de 100 integrales, que incluye las que se dan al principio de esta sección. Esta tabla es relativamente corta. Existen manuales de matemáticas que contienen tablas mucho más extensas.

En una tabla, las integrales se agrupan por la forma del integrando. Por ejemplo, “formas que contienen $a + bu$ ”, “formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$ ”, “formas trigonométricas” y así sucesivamente. La tabla que aparece al final del libro se agrupa de esta manera.

$$\sqrt{a^2 + u^2}, a > 0 \quad 77. \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$$

$$\sqrt{a^2 - u^2}, a > 0 \quad 90. \quad \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$a + bu \quad 109. \quad \int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C$$

Ejemplo 5 Utilizar la tabla de integrales de este libro para calcular

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Solución Hallar el grupo que contiene la forma $\sqrt{a^2+u^2}$ y ver la [fórmula 77](#).
Reemplazando a por 2 y u por x , tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C.$$

Ejemplo 6 Utilizar la tabla de integrales para calcular

$$\int \frac{dx}{3x^2(2x-1)}.$$

Solución Hallar el grupo que contiene $a + bu$ y ver la fórmula 109.
Reemplazando a por -1 , b por 2 y u por x , tenemos

$$\int \frac{dx}{3x^2(2x-1)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2(2x-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + 2 \ln \left| \frac{2x-1}{x} \right| \right) + C.$$

En ocasiones es necesario efectuar un cambio de variable antes de usar la tabla.

Ejemplo 7 Utilizar la tabla de integrales para calcular

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x^2} dx.$$

Solución La tabla de integrales contiene el grupo $\sqrt{a^2-u^2}$ y la fórmula 90 se parece a lo que necesitamos. Pero primero tenemos que poner el integrando en la forma adecuada. Hacemos

$$u = 2x, \quad du = 2 dx.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{9-u^2}}{(u^2/4)} du = 2 \left(-\frac{1}{u} \sqrt{9-u^2} - \arcsen \frac{u}{3} \right) + C \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2x} \sqrt{9-4x^2} - \arcsen \frac{2x}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

Ejercicios sugeridos, Sección 8.1

Prácticos: 9, 16, 22, 29, 33, 48

Teóricos: 50, 51, 52, 53