Técnicas de Integración 8

Sección 8.2

Integración por partes

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

8.2 INTEGRACIÓN POR PARTES

Comenzamos con la fórmula de la derivada de un producto

$$f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = (f \cdot g)'(x).$$

Integrando ambos miembros, obtenemos

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx = \int (f \cdot g)'(x)\,dx.$$

Puesto que

$$\int (f \cdot g)'(x)\,dx = f(x)g(x) + C,$$

tenemos

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) + C,$$

luego

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + C.$$

Como el cálculo de $\int f'(x)g(x)\ dx$

originará su propia constante arbitraria, no hay razón para guardar la constante C. Podemos, en consecuencia, suprimirla y escribir:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx.}$$

Esta fórmula, llamada *fórmula de integración por partes*, nos permite hallar

$$\int f(x)g'(x)\ dx \qquad \text{calculando} \qquad \int f'(x)g(x)\ dx$$

en su lugar. Claro está, es útil si la segunda integral es más fácil de calcular que la primera.

En la práctica, normalmente se hace

$$u = f(x), \qquad dv = g'(x)\ dx,$$

luego

$$du = f'(x)\ dx, \qquad v = g(x).$$

Entonces, con estas sustituciones, la fórmula de integración por partes puede escribirse

$$\boxed{\int u\ dv = uv - \int v\ du.}$$

El éxito con esta fórmula depende de la elección de u y dv de tal modo que

$$\int v\ du \qquad \text{sea más fácil de calcular que} \qquad \int u\ dv.$$

Ejemplo 1 Calcular $$\int xe^x\,dx.$$

Solución Queremos separar x de e^x. Haciendo

$$u = x, \qquad dv = e^x\,dx,$$

tenemos

$$du = dx, \qquad v = e^x.$$

Consecuentemente,

$$\int xe^x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = xe^x - \int e^x\,dx = \boxed{xe^x - e^x + C.}$$

Nuestra elección de u y dv ha funcionado muy bien. Pero, ¿hasta qué punto es importante la elección de u y dv? Si hubiéramos hecho

$$u = e^x, \qquad dv = x\,dx,$$

hubiéramos tenido

$$du = e^x\,dx, \qquad v = \tfrac{1}{2}x^2.$$

La integración por partes nos hubiera dado

$$\int xe^x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \boxed{\tfrac{1}{2}x^2e^x - \tfrac{1}{2}\int x^2e^x\,dx,}$$

una integral más complicada que la de partida. Es crucial una buena elección de u y dv.

Ejemplo 2 Calcular

$$\int x \operatorname{sen} 2x \; dx.$$

Solución Haciendo

$$u = x, \qquad dv = \operatorname{sen} 2x \; dx,$$

tenemos

$$du = dx, \qquad v = -\tfrac{1}{2}\cos 2x. \qquad \text{Por tanto,}$$

$$\int x \operatorname{sen} 2x \; dx = -\tfrac{x}{2}\cos 2x - \int -\tfrac{1}{2}\cos 2x \; dx = -\tfrac{x}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

Se puede comprobar que si hubiéramos hecho

$$u = \operatorname{sen} 2x, \qquad dv = x \; dx,$$

nos hubiéramos encontrado con el mismo tipo de dificultad que vimos en el ejemplo 1.

En los ejemplos 1 y 2 había solamente una elección efectiva para u y dv. Sin embargo, en algunos casos habrá más de una manera de elegir u y dv.

Ejemplo 3 Calcular

$$\int x \ln x \, dx.$$

Solución Haciendo

$$u = \ln x, \qquad dv = x \, dx,$$

tenemos

$$du = \frac{1}{x}\, dx, \qquad v = \frac{x^2}{2}.$$

Luego

$$\int x \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

Solución alternativa Esta vez hacemos

$$u = x \ln x, \qquad dv = dx,$$

de tal modo que

$$du = (1 + \ln x)\, dx, \qquad v = x.$$

Sustituyendo en

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du, \qquad \text{hallamos que}$$

$$(1) \qquad \int x \ln x\, dx = x^2 \ln x - \int x(1 + \ln x)\, dx.$$

Puede parecer que la integral de la derecha es más complicada que la de partida. Sin embargo, podemos escribir (1) como

$$\int x \ln x\, dx = x^2 \ln x - \int x\, dx - \int x \ln x\, dx.$$

Sumando $\int x \ln x\, dx$ a ambos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$2\int x \ln x\, dx = x^2 \ln x - \int x\, dx = x^2 \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + C \quad \text{y por tanto}$$

$$\int x \ln x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C \quad \text{(como es habitual, reemplazamos } C/2 \text{ por } C\text{)}$$

Observación Visto el acierto de los dos métodos del ejemplo 3, se podría intentar hacer

$$u = x, \qquad dv = \ln x \, dx.$$

Sin embargo, esta idea no funcionará porque no sabemos calcular v, esto es, no conocemos todavía ninguna antiderivada de $\ln x$. En realidad, como veremos al final de esta sección, $\int \ln x \, dx$ se calcula utilizando integración por partes.

Para calcular algunas integrales hace falta integrar por partes más de una vez.

Ejemplo 4 Evaluar

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

Solución Haciendo

$$u = x^2, \qquad dv = e^x \, dx,$$

tenemos

1

$$du = 2x \, dx, \qquad v = e^x,$$

luego

$$\int x^2 e^x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx.$$

Calculamos ahora la integral de la derecha aplicando de nuevo la integración por partes. Esta vez hacemos

$$u = 2x, \qquad dv = e^x\,dx.$$

Esto nos da

2

$$du = 2\,dx, \qquad v = e^x,$$

luego

$$\int 2xe^x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + C.$$

Lo cual, junto con nuestro cálculo anterior, nos da

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Ejemplo 5 Hallar

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

Solución Aquí integraremos dos veces por partes. Primero escribimos

$$u = e^x, \qquad dv = \cos x \, dx,$$
$$du = e^x \, dx, \qquad v = \operatorname{sen} x.$$

Esto nos da

(1) $$\int e^x \cos x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Ahora trabajaremos con la integral de la derecha. Haciendo

$$u = e^x, \qquad dv = \operatorname{sen} x \, dx,$$
$$du = e^x \, dx, \qquad v = -\cos x,$$

tenemos

(2) $$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

Sustituyendo (2) en (1), obtenemos

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

y estamos en una situación similar a la que teníamos en la solución alternativa del ejemplo 3. "Despejando" $\int e^x \cos x \, dx$ tenemos

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x),$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x).$$

Dado que esta integral es una integral indefinida, añadimos una constante arbitraria:

$$\int e^x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + C.$$

Observación El lector debería comprobar que si en el ejemplo 5 intercambiamos los papeles de u y dv haciendo

$$u = \cos x, \qquad dv = e^x\,dx,$$
$$du = -\operatorname{sen} x\,dx, \qquad v = e^x,$$

entonces se obtiene exactamente el mismo resultado exactamente del mismo modo.

La integración por partes se utiliza a menudo para calcular integrales en las que el integrando es una mezcla de tipos de funciones; por ejemplo, funciones polinómicas y exponenciales o funciones polinómicas y trigonométricas, etc. Sin embargo, a veces es mejor dejar algunos integrandos como mezclas; por ejemplo,

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2} + C \qquad \text{y} \qquad \int 3x^2 \cos x^3\,dx = \operatorname{sen} x^3 + C.$$

Cualquier intento de separar estos integrandos para su integración por partes es contraproducente. En estos integrandos las mezclas surgen de la regla de la cadena y las necesitamos para calcular las integrales.

El siguiente ejemplo ilustra una elección muy hábil de u y dv.

Ejemplo 6 Calcular

$$\int x^5 \cos(x^3)\, dx.$$

Solución Para integrar $\cos(x^3)$, necesitamos un factor x^2. Por tanto mantendremos x^2 junto a $\cos(x^3)$ y haremos

$$u = x^3, \qquad dv = x^2\cos(x^3).$$

Entonces

$$du = 3x^2, \qquad v = \tfrac{1}{3}\mathrm{sen}(x^3) \qquad \text{(comprobarlo)}$$

$$\text{y} \quad \int x^5 \cos(x^3)\, dx. = \tfrac{1}{3}x^3 \,\mathrm{sen}\,(x^3) - \int x^2 \,\mathrm{sen}\,(x^3)\, dx.$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 \,\mathrm{sen}\,(x^3) + \tfrac{1}{3}\cos(x^3) + C.$$

La integración por partes también puede aplicarse a integrales definidas. Supongamos que f' y g' son continuas en el intervalo $[a, b]$. Integrando la fórmula para la derivada de un producto, obtenemos

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \int_a^b [f(x)g(x)]'\,dx.$$

Sin embargo, por el teorema fundamental del cálculo, teorema 5.3.2,

$$\int_a^b [f(x)\cdot g(x)]'\,dx = [f(x)g(x)]_a^b.$$

Por tanto

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

y

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,}$$

que es la versión de la fórmula (8.2.1) para integrales definidas.

Ejemplo 7 Calcular

$$\int_1^2 x^3 \ln x \; dx.$$

Solución Haciendo

$$u = \ln x, \qquad dv = x^3 \; dx,$$

tenemos

$$du = \frac{1}{x} dx, \qquad v = \tfrac{1}{4} x^4.$$

Sustituyendo en (8.2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 \ln x \; dx &= [\tfrac{1}{4} x^4 \; \ln x]_1^2 - \tfrac{1}{4} \int_1^2 x^3 \; dx \\ &= 4 \; \ln 2 - \tfrac{1}{16} [x^4]_1^2 = 4 \; \ln 2 - \tfrac{15}{16}. \end{aligned}$$

Por último, las técnicas de integración por partes nos permiten integrar la función logaritmo y las funciones trigonométricas inversas:

$$\boxed{\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C.}$$

$$\boxed{\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + C.}$$

$$\boxed{\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \tfrac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.}$$

$$\boxed{\int \operatorname{arcsec} x \, dx = x \operatorname{arcsec} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C.}$$

Deduciremos (8.2.5) y dejaremos las restantes como ejercicios para el lector. Hagamos

$$u = \operatorname{arcsen} x, \qquad dv = dx.$$

Entonces $\quad du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad v = x$

y $\quad \displaystyle\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

La nueva integral se calcula mediante la sustitución

$$w = 1 - x^2, \qquad dw = -2x \, dx,$$

que da $\quad \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dw}{\sqrt{w}} = -\sqrt{w} = -\sqrt{1-x^2}.$ Por tanto,

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Ejercicios sugeridos, Sección 8.2

Prácticos: 4, 8, 15, 24, 32, 34

Teóricos: 38, 39, 41, 43