

Técnicas de Integración 8

Sección 8.3

Potencias y productos de funciones trigonométricas

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4^a Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

8.3 POTENCIAS Y PRODUCTOS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Senos y cosenos

I. Empezamos explicando cómo se calculan las integrales de la forma

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx \quad \text{con } m \text{ o } n \text{ entero positivo impar.}$$

Supongamos que n es impar. Si $n = 1$, la integral es de la forma

$$(1) \quad \int \sin^m x \cos x \, dx = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x + C, \quad m \neq -1.$$

Si $n > 1$, escribimos

$$\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x.$$

Dado que $n - 1$ es par, $\cos^{n-1} x$ puede expresarse mediante potencias de $\sin^2 x$ observando que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. La integral toma entonces la forma

$$\int (\text{suma de potencias de } \sin x) \cdot \cos x \, dx,$$

que puede descomponerse en integrales de la forma (1).

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x \, dx \\&= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx \\&= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) \cos x \, dx \\&= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.\end{aligned}$$

De manera análoga, si m es impar, escribimos

$$\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{m-1} x \operatorname{sen} x$$

y usamos la sustitución $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.



$$(2) \quad \int \cos^m x \sin x dx = -\frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x + C \quad ; \quad m \neq -1$$

Ejemplo 2

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen} x \, dx - 2 \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C. \end{aligned}$$

II. Para calcular integrales de la forma

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx \quad \text{con } m \text{ y } n \text{ ambos pares}$$

se usan las siguientes identidades:

2

1

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

3

La primera identidad se deduce de la fórmula del ángulo doble para la función seno. Las otras dos son las fórmulas del ángulo mitad para las funciones seno y coseno.

Ejemplo 3

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 4

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \, dx && \textcircled{1} \\&= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \, dx \\&= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) \, dx && \textcircled{2} \\&= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 5

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx && \textcircled{2} \\&= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\&= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) \, dx && \textcircled{3} \\&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \\&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.\end{aligned}$$

III. A continuación deduciremos *fórmulas de reducción* para integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx \quad \text{y} \quad \int \cos^n x \, dx \quad \text{donde } n \text{ es un entero positivo.}$$

Utilizaremos integración por partes para demostrar que

$$(8.3.1) \quad \int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx.$$

La fórmula correspondiente para $\int \cos^n x \, dx$ es

$$(8.3.2) \quad \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

La comprobación de esta fórmula se deja para el lector como ejercicio.

Las fórmulas tales como (8.3.1) y (8.3.2) se llaman fórmulas de reducción porque el exponente se reduce (de n a $n - 2$ en cada uno de estos casos).

Para demostrar (8.3.1) escribimos $\sin^n x$ como $\sin^{n-1} x \sin x$ y hacemos

$$u = \sin^{n-1} x, \quad dv = \sin x \, dx.$$

Entonces

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \, dx, \quad v = -\cos x \, dx.$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad \int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \underbrace{(1 - \sin^2 x)} \, dx. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int \sin^n x \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx.$$

Luego, sumando $(n-1) \int \sin^n x \, dx$ a ambos miembros, obtenemos

$$n \int \sin^n x \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx$$

de donde se deduce (8.3.1).

Una aplicación repetida de las fórmulas (8.3.1) y (8.3.2) reducirá cualquier potencia del seno o coseno a 0 ó 1, dependiendo de si n es par o impar.

Ejemplo 6

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \, dx &= -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x + \frac{4}{5}\int \sin^3 x \, dx \\ &= -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x + \frac{4}{5}\left[-\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}\int \sin x \, dx\right] \\ &= -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x - \frac{4}{15}\sin^2 x \cos x - \frac{8}{15}\cos x + C.\end{aligned}$$

Se debería comprobar que este resultado es equivalente al resultado del ejemplo 2.

La notación producto generalizado

$$a) \quad \prod_{j=1}^n f(j) = f(1) \cdot f(2) \cdots f(n-1) \cdot f(n) = f(1) \cdots f(n)$$

$$b) \quad f(1) \cdots f(n) = f(n) \cdots f(1) = \prod_{i=0}^{n-1} f(n-i) \quad ; \quad \prod_{j=1}^0 f(j) = 1 \quad (\text{producto "nulo"})$$

$$c) \quad \prod_{j=1}^n f(j) = \prod_{j=1}^n f_j = \prod_{k=1}^n f(k) = \prod_{k=1}^n f_k$$

$$d) \quad \prod_{j=1}^n f(j) = \prod_{x \in I} f(x) = \prod_{x \in I} f_x \quad ; \quad I = \{1, \dots, n\} \quad (\text{conjunto indizado})$$

$$e) \quad \prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n! = n(n-1)! = n \prod_{j=1}^{n-1} j = n(n-1) \prod_{j=1}^{n-2} j \quad (\text{factorial de } n)$$

$$f) \quad \prod_{k=1}^n f_k = f_1 f_2 \cdots f_{j-1} f_j f_{j+1} \cdots f_{n-1} f_n = \prod_{k=1}^j f_k \prod_{k=j+1}^n f_k \quad (\text{ley de separación})$$

$$g) \quad \frac{d}{dx} \prod_{i=1}^n g_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} g_i(x) \prod_{j \neq i} g_j(x) \quad (\text{derivación del producto generalizado})$$

Problema 62 a):

Partiendo de la fórmula de reducción 8.3.1, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx &= -\frac{1}{n} \left[\sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx \\ &= -\frac{1}{n} \left(\sin^{n-1} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin^{n-1} 0 \cos 0 \right) + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx \\ &= -\frac{1}{n} (1)(0) - (0)(1) + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx}$$

Problema 62 b): Fórmulas de Wallis

Aplicando la fórmula de reducción simplificada del inciso a), para $n = 2k \geq 2$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \, dx &= \frac{2k-1}{2k} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-2} x \, dx = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-4} x \, dx \\&= \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)}{2k(2k-2)(2k-4)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-6} x \, dx = \dots = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{2k(2k-2)\dots 2} \int_0^{\pi/2} dx \\&= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots 1}{n(n-2)(n-4)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n} \cdot \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

análogamente para $n = 2k + 1 \geq 3$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \, dx &= \frac{2k}{2k+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-1} x \, dx = \frac{2k(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-3} x \, dx \\&= \frac{2k(2k-2)(2k-4)}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-5} x \, dx = \dots = \frac{2k(2k-2)\dots 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 3} \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \\&= \frac{2k(2k-2)\dots 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 3} (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{(n-1)(n-3)\dots 2}{n(n-2)\dots 3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots n}\end{aligned}$$



John Wallis – *Arithmetica Infinitorum* (1656)
(1616-1703) ~ 87 años

Problema 62 b) : Fórmulas de Wallis

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{n/2} \frac{2j-1}{2j} \cdot \frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow n \geq 2 \text{ y } n \text{ es par} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n} = \prod_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{2j}{2j+1} & \Leftrightarrow n \geq 3 \text{ y } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Problema 62 c) : demostrar que $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{\pi}{2}-x} \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{\pi}{2}-x} \, dx$$

$$\Rightarrow u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx \text{ y } x=0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \wedge x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{\pi}{2}-x} \, dx = - \int_{\pi/2}^0 \sin^n u \, du = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \text{ (por aditividad)}$$

Problema 63 y 64: calcular las siguientes integrales definidas. Para la 1era integral se toma $n = 7 \geq 3$ que es el caso impar; para la 2da integral se toma $n = 6 \geq 2$ que corresponde al caso par, así

$$63.- \quad \int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx = \prod_{j=1}^{(7-1)/2} \frac{2j}{2j+1} = \prod_{j=1}^3 \frac{2j}{2j+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{16}{35}$$

$$64.- \quad \int_0^{\pi/2} \cos^6 x \, dx = \prod_{j=1}^{6/2} \frac{2j-1}{2j} \cdot \frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^3 \frac{2j-1}{2j} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32} \pi$$

IV. Finalmente estudiamos integrales de la forma

$$\int \sin mx \cos nx \, dx, \int \sin mx \sin nx \, dx, \int \cos mx \cos nx \, dx.$$

Si $m = n$, no hay dificultad. Para $m \neq n$ usamos las identidades

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)],$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)],$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)].$$

4

Estas identidades se deducen fácilmente de las fórmulas de adición habituales:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

Ejemplo 7

4

$$\begin{aligned}\int \sin 5x \sin 3x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\cos(5x - 3x) - \cos(5x + 3x)] \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 8x) \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C.\end{aligned}$$

Otras potencias trigonométricas

I. Consideramos en primer lugar integrales de la forma

$$\int \tan^n x \, dx, \quad \int \cot^n x \, dx, \quad n \geq 2 \text{ entero.}$$

Para integrar $\tan^n x$, hacemos

$$(1) \quad \tan^n x = \tan^{n-2} x \tan^2 x = (\tan^{n-2} x)(\sec^2 x - 1) = \tan^{n-2} x \sec^2 x - \tan^{n-2} x.$$

Si $n - 2 \geq 2$, entonces se repite la reducción para obtener

$$\begin{aligned} \tan^n x &= \tan^{n-2} x \sec^2 x - (\tan^{n-4} x \sec^2 x - \tan^{n-4} x) \\ &= \tan^{n-2} x \sec^2 x - \tan^{n-4} x \sec^2 x + \tan^{n-4} x. \end{aligned}$$

Se continúa hasta que el término final sea $\pm \tan x$ (n impar) o ± 1 (n par). La idea es obtener una suma de términos de la forma $\tan^k x \sec^2 x$, juntando una potencia de $\tan x$ con $\sec^2 x$. Estos términos serán fáciles de integrar dado que tienen la forma $\int u^k du$, donde $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$.

Ejemplo 8

$$\begin{aligned}\int \tan^6 x \, dx &= \int (\tan^4 x \sec^2 x - \tan^4 x) \, dx \\&= \int (\tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x \sec^2 x + \tan^2 x) \, dx \\&= \int (\tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x \sec^2 x + \underbrace{\sec^2 x - 1}_{\text{blue arrow}}) \, dx \\&= \int \tan^4 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx - \int dx \\&= \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - x + C.\end{aligned}$$

Observación La fórmula de reducción

$$(8.3.3) \quad \int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2,$$

se deduce inmediatamente de (1).

$$(1) \quad \tan^n x = \tan^{n-2} x \sec^2 x - \tan^{n-2} x \quad \wedge \quad n \geq 2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int \tan^n x dx &= \int (\tan^{n-2} x \sec^2 x - \tan^{n-2} x) dx = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \int (\tan x)^{n-2} d(\tan x) - \int \tan^{n-2} x dx = \frac{\tan^{n-2+1} x}{n-2+1} - \int \tan^{n-2} x dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx \quad ; \quad n \geq 2}$$

Las potencias de la función cotangente se manejan de la misma manera:

$$\cot^n x = \cot^{n-2} x \cot^2 x = (\cot^{n-2} x) \underbrace{(\operatorname{cosec}^2 x - 1)}_{\text{}} = \cot^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x - \cot^{n-2} x.$$

La fórmula de reducción para $\int \cot^n x dx$ se deja como ejercicio.

$$\begin{aligned}\cot^n x &= \cot^{n-2} x \csc^2 x - \cot^{n-2} x \quad \wedge \quad n \geq 2 \quad ; \text{ si } n-2 \geq 2 \\ \Rightarrow \cot^n x &= \cot^{n-2} x \csc^2 x - (\cot^{n-4} x \csc^2 x - \cot^{n-4} x) \\ \Rightarrow \cot^n x &= \cot^{n-2} x \csc^2 x - \cot^{n-4} x \csc^2 x + \cot^{n-4} x\end{aligned}$$

Problema 65:

$$\begin{aligned}\cot^n x &= \cot^{n-2} x \csc^2 x - \cot^{n-2} x \quad \wedge \quad n \geq 2 \quad \Rightarrow \\ \int \cot^n x dx &= \int (\cot^{n-2} x \csc^2 x - \cot^{n-2} x) dx = \int \cot^{n-2} x \csc^2 x dx - \int \cot^{n-2} x dx \\ &= \int (\cot x)^{n-2} d(-\cot x) - \int \cot^{n-2} x dx = -\frac{\cot^{n-2+1} x}{n-2+1} - \int \cot^{n-2} x dx \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx \quad ; \quad n \geq 2}$$

II. Consideramos ahora las integrales

$$\int \sec^n x \, dx, \quad \int \operatorname{cosec}^n x \, dx, \quad n \geq 2 \text{ entero.}$$

Utilizaremos integración por partes para deducir una fórmula de reducción. Hagamos

$$u = \sec^{n-2} x, \quad dv = \sec^2 x \, dx.$$

Entonces

$$du = (n-2)\sec^{n-3} x \sec x \tan x \, dx = (n-2)\sec^{n-2} x \tan x \, dx, \quad v = \tan x$$

y

$$\begin{aligned} \int \sec^n x \, dx &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x \, dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x \, dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx. \end{aligned}$$

Luego, despejando $\int \sec^n x \, dx$, obtenemos

$$(n-1) \int \sec^n x \, dx = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx,$$

de donde se deduce que

$$(8.3.4) \quad \int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2.$$

La fórmula de reducción correspondiente a $\int \operatorname{cosec}^n x \, dx$ se deja como ejercicio.

Ejemplo 9

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C. \end{aligned}$$

Esta integral es tan frecuente en las aplicaciones que se encuentra en la tabla del interior de las tapas de este libro.

Observación Hay otra forma de calcular $\int \sec^n x \, dx$ cuando n es pequeño y par. Este método es similar a la deducción de la fórmula de reducción de la función tangente. Supongamos que n es un entero positivo y par:

$$\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x = (\sec^2 x)^{(n-2)/2} \sec^2 x = \underbrace{(1 + \tan^2 x)^{(n-2)/2}} \sec^2 x.$$

Por tanto, una potencia par de la secante puede expresarse como una suma de términos de la forma $\tan^k x \sec^2 x$ que son integrados como $u^k \, du$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \int \sec^6 x \, dx &= \int \sec^4 x \sec^2 x \, dx = \int \underbrace{(\tan^2 x + 1)^2}_{\text{blue arrow}} \sec^2 x \, dx \\ &= \int (u^2 + 1)^2 \, du \quad (u = \tan x, \, du = \sec^2 x \, dx) \\ &= \int (u^4 + 2u^2 + 1) \, du = \frac{1}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + u + C \\ &= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C. \end{aligned}$$

Problema 67: $\int \csc^n x dx \quad \wedge \quad n \geq 2$; sean, $u = \csc^{n-2} x \quad \wedge \quad dv = \csc^2 x dx$

$$\Rightarrow du = (n-2) \csc^{n-2-1} x d(\csc x) = (n-2) \csc^{n-3} x (-\csc x \cot x) dx$$

$$\Rightarrow du = -(n-2) \csc^{n-2} \cot x dx \quad ; \text{ además, } v = \int \csc^2 x dx = -\cot x$$

$$\Rightarrow \int \csc^n x dx = \int u dv = uv - \int v du \quad (\text{fórmula de integración por partes})$$

$$= -\csc^{n-2} x \cot x - \int (-\cot x) [-(n-2) \csc^{n-2} x \cot x] dx$$

$$= -\csc^{n-2} x \cot x - (n-2) \int \csc^{n-2} x \cot^2 x dx$$

$$= -\csc^{n-2} x \cot x - (n-2) \int \csc^{n-2} x (\csc^2 x - 1) dx$$

$$= -\csc^{n-2} x \cot x - (n-2) \int \csc^n x dx + (n-2) \int \csc^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow (n-2) \int \csc^n x dx + \int \csc^n x dx = -\csc^{n-2} x \cot x + (n-2) \int \csc^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow (n-1) \int \csc^n x dx = -\csc^{n-2} x \cot x + (n-2) \int \csc^{n-2} x dx, \text{ de donde}$$

$$\int \csc^n x dx = -\frac{1}{n-1} \csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx ; \text{ equivalentemente}$$

$$\int \csc^n x dx = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{\sin^{n-2} x} \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx ; \text{ finalmente,}$$

$$(47) \quad \boxed{\int \csc^n x dx = -\frac{1}{n-1} \csc^{n-1} x \cos x + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx ; n \geq 2}$$

III. Finalmente nos ocupamos de las integrales de la forma

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx, \quad \int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx.$$

A. n es un entero positivo par.

Si n es par, escribimos

$$\tan^m x \sec^n x = \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 x$$

y expresamos $\sec^{n-2} x$ en función de $\tan^2 x$ usando la fórmula $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$.


Ejemplo 10

$$\begin{aligned} \int \tan^5 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^5 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^5 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^7 x \sec^2 x \, dx + \int \tan^5 x \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{8} \tan^8 x + \frac{1}{6} \tan^6 x + C. \end{aligned}$$


B. m es un entero positivo impar.

Cuando m es impar, escribimos

$$\tan^m x \sec^n x = \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x$$

y expresamos $\tan^{m-1} x$ en función de $\sec^2 x$ usando la fórmula $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.



Ejemplo 11

$$\begin{aligned} \int \tan^5 x \sec^3 x \, dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x \, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \tan x \, dx \\ &= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x) \sec x \tan x \, dx \\ &= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{2}{5} \sec^5 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C. \end{aligned}$$

C. n y m son enteros positivos impar y par, respectivamente.

Finalmente, si n es impar y m es par, podemos utilizar $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para escribir el producto como una suma de potencias impares de la secante. Luego se puede utilizar la integración por partes o bien la fórmula de reducción (8.3.4).

Ejemplo 12
$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \\ &= \int (\sec^3 x - \sec x) \, dx = \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx.\end{aligned}$$

Hemos calculado cada una de estas integrales antes:

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

y

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

De ahí que

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

Se puede proceder de manera análoga con integrales de $\cot^m x \operatorname{cosec}^n x$.

Ejercicios sugeridos, Sección 8.3

Prácticos: 5, 8, 16, 27, 35, 43

Teóricos: 57, 62, 65, 67