

Técnicas de Integración 8

Sección 8.4

Sustituciones trigonométricas

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4^a Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

8.4 SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las integrales que implican una de las formas $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$, pueden a menudo simplificarse haciendo una sustitución trigonométrica. Estas sustituciones transforman el integrando en una forma trigonométrica similar a las que hemos estudiado en la sección anterior. Los tres casos, junto con las sustituciones sugeridas, son

- | | | |
|---|---|-------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none">1. Para $\sqrt{a^2 - x^2}$, hacer $a \sin u = x$.2. Para $\sqrt{a^2 + x^2}$, hacer $a \tan u = x$.3. Para $\sqrt{x^2 - a^2}$, hacer $a \sec u = x$. | } | En todos los casos, tomar $a > 0$. |
|---|---|-------------------------------------|

Para ilustrar la idea que hay detrás de estas sustituciones, consideremos el primer caso: $\sqrt{a^2 - x^2}$. Si hacemos $a \sin u = x$, entonces

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} = a\sqrt{1 - \sin^2 u} = a\sqrt{\cos^2 u} = a|\cos u|.$$

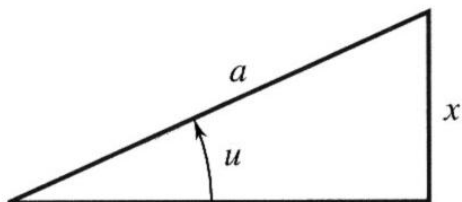
Dado que $a \sin u = x$, tenemos que $u = \arcsin(x/a)$, lo cual implica que $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ (sección 7.7). Por consiguiente, $\cos u \geq 0$ y

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u.$$

Así, la sustitución $a \sin u = x$ tiene el efecto de reemplazar el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$ por $a \cos u$. Los otros dos casos se pueden ilustrar de forma análoga.

Una manera fácil de relacionar las formas con sus correspondientes sustituciones es mediante triángulos rectángulos:

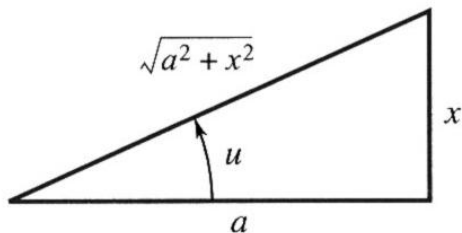
$$\sqrt{a^2 - x^2}$$



$$\sin u = x/a \quad \text{o bien} \quad x = a \sin u$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$$

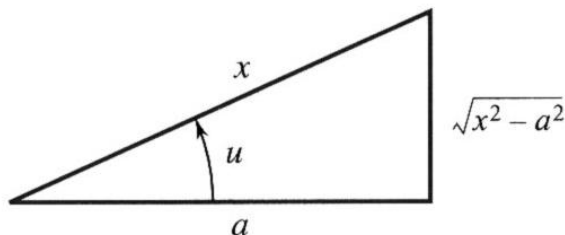
$$\sqrt{a^2 + x^2}$$



$$\tan u = x/a \quad \text{o bien} \quad x = a \tan u$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec u$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}$$



$$\sec u = x/a \quad \text{o bien} \quad x = a \sec u$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan u.$$

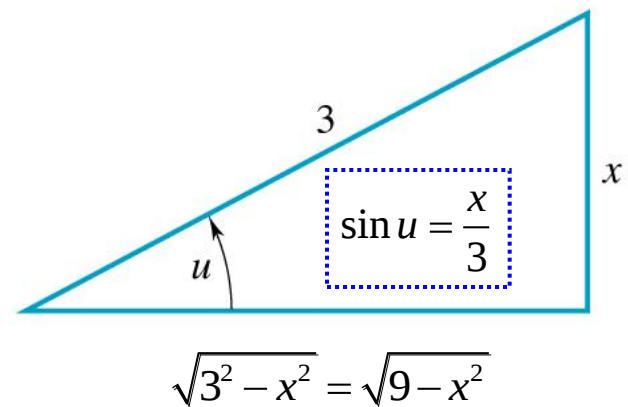
Ejemplo 1 Hallar $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$.

Solución Observemos primero que $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}} = \int \frac{dx}{[\sqrt{9-x^2}]^3}$;

la integral implica $\sqrt{9-x^2}$. Por tanto, hacemos

$$3 \sin u = x, \quad 3 \cos u \, du = dx. \text{ Entonces } \sqrt{9-x^2} = 3 \cos u.$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}} &= \int \frac{3 \cos u \, du}{(3 \cos u)^3} \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{\cos u}{\cos^3 u} \, du \\ &= \frac{1}{9} \int \sec^2 u \, du \\ &= \frac{1}{9} \tan u + C = \frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C. \end{aligned}$$



Ejemplo 2 Hallar $\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx$.

Solución Hacemos $a \tan u = x$, $a \sec^2 u \, du = dx$.

Entonces $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec u$. Luego

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx &= \int (a \sec u) a \sec^2 u \, du \\ &= a^2 \int \sec^3 u \, du \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{2} (\sec u \tan u + \ln |\sec u + \tan u|) + C$$

Ejemplo 9, sección 8.3 $\uparrow$

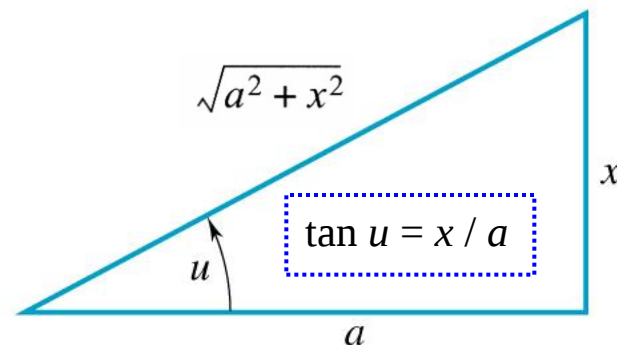
$$= \frac{a^2}{2} \left[\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \left(\frac{x}{a} \right) + \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| \right] + C$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) - \frac{1}{2} a^2 \ln a + C$$

Podemos incluir la constante $-\frac{1}{2} a^2 \ln a$ en C y escribir

(8.4.1)

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

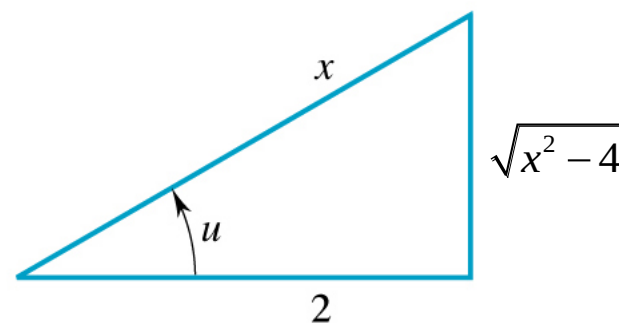


Ejemplo 3 Hallar $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}$.

Solución Hacemos $2 \sec u = x$, $2 \sec u \tan u \, du = dx$.

Entonces $\sqrt{x^2 - 4} = 2 \tan u$. Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} &= \int \frac{2 \sec u \tan u}{4 \sec^2 u \cdot 2 \tan u} \, du \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sec u} \, du \\ &= \frac{1}{4} \int \cos u \, du \\ &= \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{4x} + C. \end{aligned}$$



$$\cos u = \frac{2}{x} \Rightarrow \sec u = \frac{1}{\cos u} = \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \Rightarrow a \sin u = x, \quad d(a \sin u) = a \cos u du = dx \quad \text{y} \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a \sin u}{a \cos u} a \cos u du = a \int \sin u du = -a \cos u + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Observación Consideremos la integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

La presencia de $\sqrt{a^2 - x^2}$ en el integrando sugiere la sustitución $u = x$, y si llevamos a cabo esta sustitución obtendremos el resultado correcto. Sin embargo, hay un método mucho más simple. Hagamos

$$u = a^2 - x^2, \quad du = -2x dx.$$

Luego

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

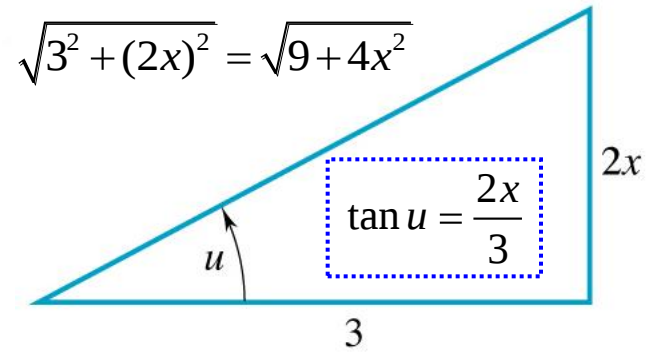
Hay que darse cuenta de que a veces hay más de una forma de calcular una integral. En tales casos, es obvio que tendremos más ventaja al elegir el método más fácil. Sólo la experiencia y la práctica pueden darnos la capacidad de hacer esto coherentemente.

Ejemplo 4 Hallar $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

Solución Hacemos $3 \tan u = 2x$, $3 \sec^2 u \, du = 2 \, dx$.

Entonces $\sqrt{4x^2+9} = 3 \sec u$. y

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} &= \int \frac{\frac{3}{2} \sec^2 u}{\frac{3}{2} \tan u \cdot 3 \sec u} \, du \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{\sec u}{\tan u} \, du \\ &= \frac{1}{3} \int \operatorname{cosec} u \, du \\ &= \frac{1}{3} \ln |\operatorname{cosec} u - \cot u| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{4x^2+9} - 3}{2x} \right| + C.\end{aligned}$$



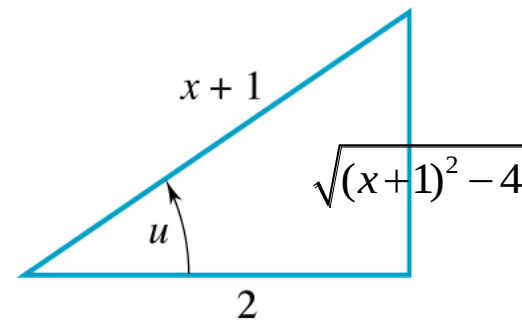
Ejemplo 5 Hallar $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx$.

primero $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{(x+1)^2 - 4}} dx$.

Ahora hacemos $2 \sec u = x + 1$, $2 \sec u \tan u du = dx$.

Entonces $\sqrt{(x+1)^2 - 4} = 2 \tan u$ y

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{(x+1)^2 - 4}} dx &= \int \frac{(2 \sec u - 1) 2 \sec u \tan u}{2 \tan u} du \\ &= \int (2 \sec^2 u - \sec u) du \\ &= 2 \tan u - \ln |\sec u + \tan u| + C \\ &= \sqrt{x^2 + 2x - 3} - \ln \left| \frac{x+1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{2} \right| + C. \end{aligned}$$



$$\cos u = \frac{2}{x+1} \Rightarrow \sec u = \frac{x+1}{2}$$

Ejemplo 6 Hallar el área encerrada por la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ (figura 8.4.6).

Solución Dado que la gráfica es simétrica respecto de los ejes x e y , el área total A encerrada por la elipse es cuatro veces el área de la región correspondiente al primer cuadrante. Esta región está limitada por la gráfica de

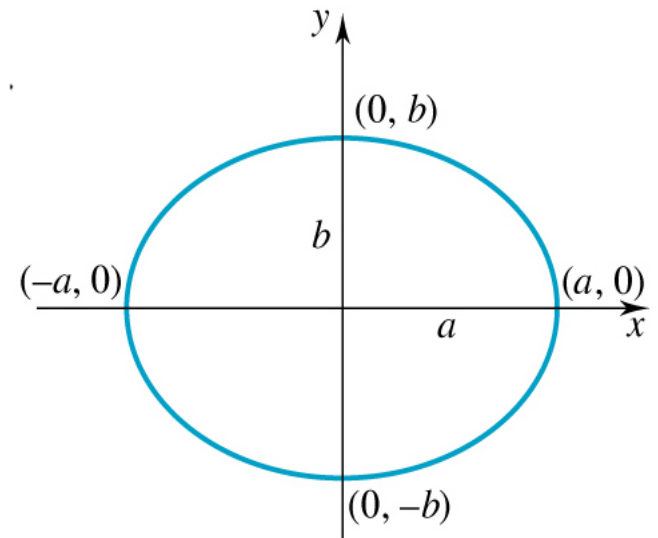
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$\text{Por tanto, } A = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Hagamos $a \sin u = x$, $a \cos u du = dx$. Entonces $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$.

Además, $u = 0$ en $x = 0$ y $u = \pi/2$ en $x = a$. Así,

$$\begin{aligned} A &= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} (a \cos u) \cdot a \cos u du \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = 4ab \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u \right) du \\ &= 2ab \left[u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_0^{\pi/2} = \pi ab. \end{aligned}$$



Finalmente, observamos que la sustitución trigonométrica puede también ser efectiva en casos en que el término cuadrático no está debajo de un radical. Por ejemplo, la fórmula de reducción

$$(8.4.2) \quad \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \cos^{2(n-1)} u \, du$$

se obtiene de la sustitución $a \tan u = x$, $a \sec^2 u \, du = dx$. La demostración se deja como ejercicio.

Problema 39:

$$a \tan u = x \Rightarrow d(a \tan u) = a d(\tan u) = a \sec^2 u du = dx \quad y$$

$$(x^2 + a^2)^n = (a^2 \tan^2 u + a^2)^n = a^{2n} (\tan^2 u + 1)^n = a^{2n} \sec^{2n} u$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \int \frac{a \sec^2 u du}{a^{2n} \sec^{2n} u} = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \frac{1}{\sec^{2n-2} u} du = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \cos^{2n-2} u du$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \cos^{2(n-1)} u du}$$

Problema 41: hallar la integral $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$

$$a=1 \wedge n=3 \Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{1^{2(3)-1}} \int \cos^{2(3-1)} u du = \int \cos^4 u du$$

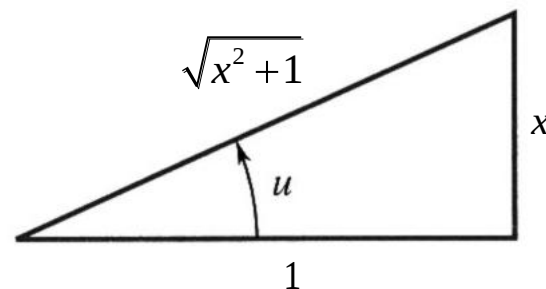
recordando que $\int \cos^m u du = \frac{1}{m} \cos^{m-1} u \sin u + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} u du$, para $m=4$

$$\Rightarrow \int \cos^4 u du = \frac{1}{4} \cos^{4-1} u \sin u + \frac{4-1}{4} \int \cos^{4-2} u du = \frac{1}{4} \cos^3 u \sin u + \frac{3}{4} \int \cos^2 u du$$

$$\Rightarrow \int \cos^4 u du = \frac{1}{4} \cos^3 u \sin u + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \cos^{2-1} u \sin u + \frac{2-1}{2} \int \cos^{2-2} u du \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \cos^4 u du &= \frac{1}{4} \cos^3 u \sin u + \frac{3}{8} \cos u \sin u + \frac{3}{8} u \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{3}{8} \tan^{-1} x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \tan^{-1} x + C}$$



$$\tan u = x \Rightarrow u = \tan^{-1} x$$

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} ; \sin u = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Problema 42: hallar la integral $\int x \arctan x \, dx = \int x \tan^{-1} x \, dx$

$$u = \tan^{-1} x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}; dv = x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$$

$$\Rightarrow \int x \tan^{-1} x dx = \int u dv = uv - \int v du = \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

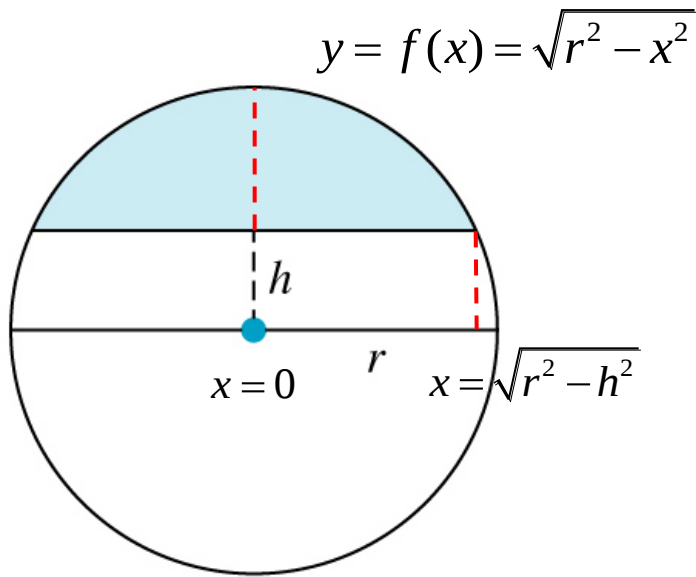
$$x = \tan u \Rightarrow dx = d(\tan u) = \sec^2 u du \wedge \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{\tan^2 u}{1+\tan^2 u} = \frac{\tan^2 u}{\sec^2 u}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int x \tan^{-1} x dx &= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{\tan^2 u}{\sec^2 u} \sec^2 u du = \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \tan^2 u du \\ &= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2-1} \tan^{2-1} u - \int \tan^{2-2} u du \right] \text{ pero } \tan u = x \\ &= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \tan u + \frac{1}{2} \int du = \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{1}{2} x + C$$

- 46.** Una cuerda situada a h unidades del centro de un disco de radio r genera una región denominada *segmento* (ver la figura). Hallar una fórmula para el área del segmento.



$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^{\sqrt{r^2 - h^2}} [f(x) - h] dx \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{r^2 - h^2}} (\sqrt{r^2 - x^2} - h) dx \\
 &= 2 \left[\int_0^{\sqrt{r^2 - h^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dx - h \int_0^{\sqrt{r^2 - h^2}} dx \right] \\
 &= 2 \left[\int_0^{\sqrt{r^2 - h^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dx - h \sqrt{r^2 - h^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r \sin u = x &\Rightarrow \int \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u} d(r \sin u) = r^2 \int \cos^2 u du \\
 &= \frac{1}{2} r^2 (\cos u \sin u + u) = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \frac{x}{r} + \sin^{-1} \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2} r^2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{r} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= 2 \left[\int_0^{\sqrt{r^2-h^2}} \sqrt{r^2-x^2} dx - h\sqrt{r^2-h^2} \right] \\
&= 2 \left[\frac{1}{2} x\sqrt{r^2-x^2} + \frac{1}{2} r^2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{r} \right) \right]_0^{\sqrt{r^2-h^2}} - 2h\sqrt{r^2-h^2} \\
&= \left[x\sqrt{r^2-x^2} + r^2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{r} \right) \right]_0^{\sqrt{r^2-h^2}} - 2h\sqrt{r^2-h^2} \\
&= \sqrt{r^2-h^2} \sqrt{r^2-(\sqrt{r^2-h^2})^2} + r^2 \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right) - 2h\sqrt{r^2-h^2} \\
&= h\sqrt{r^2-h^2} + r^2 \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right) - 2h\sqrt{r^2-h^2} \\
\Rightarrow \quad &\boxed{A(h) = r^2 \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right) - h\sqrt{r^2-h^2}}
\end{aligned}$$

$$a) \quad A(0) = r^2 \sin^{-1}(1) \Rightarrow A(0) = \frac{\pi}{2} r^2$$

$$b) \quad A(r/2) = r^2 \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{r^2 - (r/2)^2}}{r}\right) - \frac{r}{2} \sqrt{r^2 - (r/2)^2}$$

$$\text{como } \sqrt{r^2 - (r/2)^2} = \sqrt{r^2 - r^2/4} = \sqrt{3r^2/4} = \frac{r}{2} \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A(r/2) = r^2 \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}r/2}{r}\right) - \frac{r}{2} \frac{r}{2} \sqrt{3} = r^2 \sin^{-1}(\sqrt{3}/2) - \sqrt{3}r^2/4$$

$$\Rightarrow A(r/2) = \frac{\pi}{3} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \Rightarrow A\left(\frac{r}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) r^2$$

$$c) \quad A(r) = r^2 \sin^{-1}(0) - r(0) \Rightarrow A(r) = 0$$

Ejercicios sugeridos, Sección 8.4

Prácticos: 10, 16, 25, 29, 33, 38

Teóricos: 39, 41, 42, 43, 46, 51