Técnicas de Integración 8

Sección 8.5

Fracciones parciales (o simples)

© Salas / Hille / Etgen, CALCULUS, Vol. I
Una y Varias Variables 4ª Ed.
Editorial Reverté (Reimpresión 2007)

8.5 FRACCIONES SIMPLES

En esta sección presentamos un modo de integración para funciones racionales. Recordar que, por definición, una función racional es el cociente de dos polinomios. Así, por ejemplo,

$$\frac{1}{x^2-4}, \qquad \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}, \qquad \frac{3x^4-20x^2+17}{x^3+2x^2-7}$$

son ejemplos de funciones racionales, mientras que

$$\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{x^2+1}{\ln x}, \qquad \frac{|x-2|}{x^2+1}$$

no lo son.

Se dice que una función racional $R(x) = P(x)/Q(x)$ es *propia* si el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, entonces se dice que la función racional es *impropia*.† Centraremos nuestra atención en las *funciones racionales propias* porque cualquier función racional impropia puede escribirse como la suma de un polinomio y una función racional propia

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}. \quad ††$$

Esto se realiza simplemente dividiendo el numerador por el denominador (el polinomio p se llama el cociente y el polinomio r es el resto).

En álgebra se demuestra que toda función racional propia puede escribirse en una y solamente una manera como una suma de fracciones de la forma

(8.5.1)
$$\boxed{\frac{A}{(x-\alpha)^k} \quad \text{y} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}}$$

donde el polinomio cuadrático $x^2 + \beta x + \gamma$ es irreducible (es decir, que no se puede descomponer como producto de dos polinomios de orden 1 con coeficientes reales; $\beta^2 - 4\gamma < 0$).Tales fracciones se denominan *fracciones simples*. Cuando una función racional $R(x)$ se expresa como suma de fracciones simples, esta suma se denomina *descomposición en fracciones simples de R.*

Ejemplo 1 (*El denominador se descompone en factores lineales distintos.*) La descomposición en fracciones simples de la función racional

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$$

tiene la forma

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2},$$

donde A y B son constantes cuyos valores hay que determinar. Es una identidad que se verifica para todo $x \neq 2, -2$. Reduciendo a común denominador e igualando los numeradores, obtenemos

(1) $$1 = A(x+2) + B(x-2),$$

que continúa siendo una identidad, pero ahora se verifica para todo x. Veremos dos métodos para hallar A y B .

En general, cada factor distinto $x-\alpha$ en el denominador da lugar a un término de la forma

$$\frac{A}{x-\alpha}.$$

Método 1 Reemplazar x por números en (1):

Haciendo $x = 2$, obtenemos $1 = 4A$, que da $A = \frac{1}{4}$;

Haciendo $x = -2$, obtenemos, $1 = -4B$, que da $B = -\frac{1}{4}$.

Así, la descomposición deseada es

$$\boxed{\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}.}$$

Esto se puede comprobar efectuando la resta del segundo miembro.

Método 2 Eliminar los paréntesis en el segundo miembro de (1) y volver a escribir la ecuación como

$$1 = (A + B)x + 2A - 2B.$$

A continuación se igualan las correspondientes potencias de x para obtener el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 2A - 2B &= 1. \end{aligned}$$

Luego se pueden obtener A y B resolviendo simultáneamente estas ecuaciones. Las soluciones son, por supuesto, $A = \frac{1}{4}$ y $B = -\frac{1}{4}$.

Hemos descompuesto las funciones racionales en fracciones simples para poder integrarlas. A continuación llevamos a cabo dichas integraciones, dejando algunos de los detalles para el lector.

Ejemplo 1′ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4} = \tfrac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx$

$$= \tfrac{1}{4}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

Ejemplo 2 (*El denominador tiene un factor lineal repetido.*) Para

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2},$$

escribimos

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

De ello se deduce que

$$2x^2+3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx.$$

Para determinar los tres coeficientes A, B, C necesitamos sustituir x por tres valores numéricos. Escogemos 0 y 1 dado que para esos valores varios términos del segundo miembro se eliminan. Como tercer valor de x vale cualquier otro número; para que el cálculo aritmético sea más sencillo escogemos el valor 2.

Haciendo $x = 0$, obtenemos $3 = A$.
Haciendo $x = 1$, obtenemos $5 = C$.
Haciendo $x = 2$, obtenemos $11 = A + 2B + 2C$,
lo cual, con $A = 3$ y $C = 5$ nos da $B = -1$.

Luego la descomposición es

$$\boxed{\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}.}$$

Observación Se puede comprobar que el método alternativo para hallar las constantes A, B y C conduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B \qquad &= 2 \\ -2A - B + C &= 0 \\ A \qquad\qquad &= 3. \end{aligned}$$

Luego se pueden obtener A, B y C resolviendo simultáneamente estas ecuaciones. En general, este método implica más álgebra, por lo que en los siguientes ejemplos haremos hincapié en el método de sustituir x por valores *correctamente elegidos*. También es posible combinar los dos métodos y, con práctica, se verá que a menudo esto es conveniente. Ilustraremos todo esto en el siguiente ejemplo.

En general, cada factor de la forma $(x-\alpha)^k$ en el denominador da lugar a una expresión de la forma

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

Ejemplo 2′

$$\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left[\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}\right] dx$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x^3}{x-1}\right| - \frac{5}{x-1} + C.$$

Ejemplo 3 (*El denominador tiene un factor cuadrático irreducible.*) Para

$$\frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)},$$

escribimos

$$\frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

y obtenemos

$$x^2+5x+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1).$$

Esta vez, usamos $-1, 0$ y 1.

Haciendo $x=-1$, obtenemos $-2=2A$, luego $A=-1$.
Haciendo $x=0$, obtenemos $2=A+C$, luego $C=3$.
Haciendo $x=1$, obtenemos $8=2A+2B+2C$,
lo cual, dado que $A=-1$ y $C=3$, nos da que $B=2$.

Alternativamente, después de sustituir por -1 y 0, podíamos haber observado que el coeficiente de x^2 en el segundo miembro es $A+B$ y que en el primer miembro es 1. Así, $A+B=1$ y $B=1-(-1)=2$. Esto ilustra el método "combinado". La descomposición obtenida es

$$\boxed{\frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1} - \frac{2x+3}{x^2+1}.}$$

En general, cada factor cuadrático irreducible $x^2 + \beta x + \gamma$ en el denominador da lugar a un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{x^2 + \beta x + \gamma}.$$

Ejemplo 3′ $$\int \frac{x^2 + 5x + 2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} - \frac{2x+3}{x^2+1} \right) dx = -\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx.$$

Dado que $\quad -\int \frac{1}{x+1}\,dx = -\ln|x+1| + C_1 \quad$ y

$$\int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + 3 \arctan x + C_2,$$

tenemos

$$\int \frac{x^2 + 5x + 2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = -\ln|x+1| + \ln(x^2+1) + 3 \arctan x + C$$

$$= \ln\left|\frac{x^2+1}{x+1}\right| + 3 \arctan x + C.$$

Ejemplo 4 (*El denominador tiene un factor cuadrático irreducible.*) Para

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)}$$

escribimos $$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

y obtenemos $$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)x.$$

De nuevo escogemos los valores de x que anulan términos o simplifican los cálculos en el segundo miembro.

$$\begin{aligned} 1 &= A & (x &= 0), \\ 1 &= 3A+B+C & (x &= 1), \\ 1 &= A+B-C & (x &= -1). \end{aligned}$$

De ahí que $A = 1, \quad B = -1, \quad C = -1,$ luego

$$\boxed{\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}.}$$

Ejemplo 4′ $\quad P = \int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) dx = \ln|x| - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx.$

Para calcular la integral restante, observar que $(d/dx)(x^2+x+1) = 2x+1$, y por tanto podemos manipular el integrando para obtener un término de la forma du/u, donde $u = x^2+x+1$ y $du = (2x+1)\, dx$:

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{2}[2x+1]+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} = \tfrac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Por tanto $\quad \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$

La primera integral es un logaritmo:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + C_1.$$

(NOTA: $x^2+x+1 > 0$ para todo x.)

La segunda integral es un arco tangente:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C_2.$$

Combinando estos resultados, tenemos

$$P = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C.$$

Ejemplo 5 (*El denominador tiene un factor cuadrático repetido.*) Para

$$\frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x+1)(x^2+4)^2}$$

escribimos

$$\frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x+1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} 3x^4 &+ x^3 + 20x^2 + 3x + 31 \\ &= A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+4) + (Dx+E)(x+1). \end{aligned}$$

En general, cada factor cuadrático irreducible repetido $(x^2 + \beta x + \gamma)^k$ en el denominador da lugar a una expresión de la forma

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \cdots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k}.$$

Esta vez usamos $-1, 0, 1, 2,$ y -2.

$$\begin{aligned}
50 &= 25A & &(x = -1),\\
31 &= 16A + 4C + E & &(x = 0),\\
58 &= 25A + 10B + 10C + 2D + 2E & &(x = 1),\\
173 &= 64A + 48B + 24C + 6D + 3E & &(x = 2),\\
145 &= 64A + 16B - 8C + 2D - E & &(x = -2).
\end{aligned}$$

Con un poco de paciencia se puede ver que

$$A = 2, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = 0 \quad \text{y} \quad E = -1.$$

Luego la descomposición es

$$\boxed{\frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x+1)(x^2+4)^2} = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{(x^2+4)^2}.}$$

Ejemplo 5′

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x + 1)(x^2 + 4)^2}\, dx = \int \left[\frac{2}{x + 1} + \frac{x}{x^2 + 4} - \frac{1}{(x^2 + 4)^2}\right] dx.$$

Las dos primeras fracciones son fáciles de integrar:

$$\int \frac{2}{x + 1}\, dx = 2\ln|x + 1| + C_1,$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 4}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 4}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C_2.$$

La integral de la última fracción es de la forma

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Como vimos en la sección anterior, estas integrales pueden calcularse utilizando la sustitución trigonométrica $a \tan u = x$ [ver (8.4.2)]. En este caso tenemos

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{8}\int \cos^2 u \, du$$

$2 \tan u = x$

$$= \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2u)du$$

$$= \frac{1}{16}u + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 2u + C_3$$

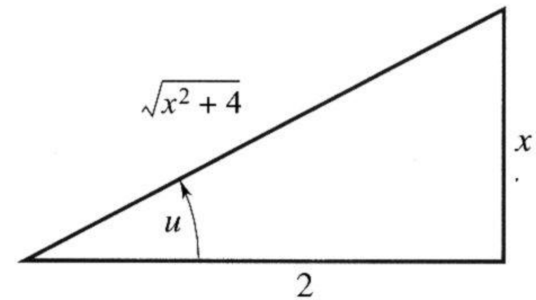
fórmula del ángulo mitad

$$= \frac{1}{16}u + \frac{1}{16}\operatorname{sen} u \cos u + C_3$$

$$= \frac{1}{16}\arctan \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right) + C_3$$

$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$

$$= \frac{1}{16}\arctan \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4}\right) + C_3.$$



Por lo tanto, la integral que buscamos vale

$$2\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4}\right) - \frac{1}{16}\arctan \frac{x}{2} + C.$$

Como indicábamos al principio de esta sección, si la función racional es impropia, aparece un polinomio en la descomposición.

Ejemplo 6 (*Una función racional impropia.*) La función

$$\frac{x^5+2}{x^2-1}$$

es impropia. Dividiendo el numerador por el denominador, obtenemos

$$\boxed{\frac{x^5+2}{x^2-1} = x^3 + x + \frac{x+2}{x^2-1}.} \qquad \text{(verificarlo)}$$

La descomposición del resto es

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}.$$

Esto nos da

$$x+2 = A(x-1) + B(x+1)$$

y, como podemos comprobar, $A = -\frac{1}{2}$ y $B = \frac{3}{2}$. La descomposición toma la forma

$$\boxed{\frac{x^5+2}{x^2-1} = x^3 + x - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x-1)}.}$$

Ejemplo 6′

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx = \int\left[x^3+x-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{3}{2(x-1)}\right]dx$$

$$= \tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}\ln|x+1|+\tfrac{3}{2}\ln|x-1|+C.$$

Las fracciones simples intervienen en toda una variedad de aplicaciones que implican soluciones a ecuaciones diferenciales. En la sección 8.9 se dan algunos ejemplos.

Problema 25: $\int \frac{dx}{x^4+4}$; por la sugerencia, $\boxed{x^4+a^2=(x^2+\sqrt{2a}x+a)(x^2+\sqrt{2a}x+a)}$

con $a=2 \Rightarrow x^4+4=x^4+2^2=(x^2+\sqrt{2(2)}x+2)(x^2-\sqrt{2(2)}x+2)=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

$x^2+2x+2 \Rightarrow \beta^2-4\gamma=2^2-4(2)=4-8=-4<0 \therefore$ es factor cuadrático irreducible,

$x^2-2x+2 \Rightarrow \beta^2-4\gamma=(-2)^2-4(2)=4-8=-4<0 \therefore$ es factor cuadrático irreducible

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2} \Rightarrow (Ax+B)(x^2-2x+2)+(Cx+D)(x^2+2x+2)=1$$

$$x=-1 \Rightarrow (-A+B)((-1)^2-2(-1)+2)+(-C+D)((-1)^2+2(-1)+2)=-5A+5B-C+D=1$$
$$x=0 \;\Rightarrow (B)(2)+(D)(2)=2B+2D=1$$
$$x=1 \;\Rightarrow (A+B)(1^2-2(1)+2)+(C+D)(1^2+2(1)+2))=A+B+5C+5D=1$$
$$x=2 \;\Rightarrow (2A+B)(2^2-2(2)+2)+(2C+D)(2^2+2(2)+2)=4A+2B+20C+10D=1$$

de donde resolviendo el sistema de 4×4 se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} -5A+5B-\;\;C+\;\;\;\;D=1 \\ 2B+\qquad\;\;2D=1 \\ A+\;\;B+5C+\;\;\;5D=1 \\ 4A+2B+20C+10D=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{8},\,B=\frac{1}{4},\,C=-\frac{1}{8},\,D=\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}=\frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}+\frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{x^4+4}=\frac{x+2}{8(x^2+2x+2)}-\frac{x-2}{8(x^2-2x+2)}}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^4+4} = -\frac{1}{8}\int \frac{x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8}\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$= -\frac{1}{16}\int \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2-2x+2} + \frac{1}{16}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x^4+4} = -\frac{1}{16}\int \frac{d(x^2-2x+2)}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2-2x+2} + \frac{1}{16}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$= -\frac{1}{16}\ln(x^2-2x+2) + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{16}\ln(x^2+2x+2) + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= -\frac{1}{16}\ln(x^2-2x+2) + \frac{1}{8}\tan^{-1}(x-1) + \frac{1}{16}\ln(x^2+2x+2) + \frac{1}{8}\tan^{-1}(x+1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int \frac{dx}{x^4+4} = \frac{1}{16}\ln\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right) + \frac{1}{8}\left[\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1)\right] + C}$$

Problema 43: deducir la siguiente fórmula de integración

$$\int \frac{du}{(a+bu)(c+du)} = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{c+du}{a+bu}\right| + C \quad ; \quad ad-bc \neq 0$$

$$a+bu=0 \Rightarrow -bu=a \Rightarrow -u_1 = a/b \wedge c+du=0 \Rightarrow -du=c \Rightarrow -u_2 = c/d$$

$$\Rightarrow -u_1 \neq -u_2 \Leftrightarrow a/b \neq c/d \Leftrightarrow ad-bc \neq 0$$

condición bajo la cual los factores lineales son distintos (no repetidos)

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+bu)(c+du)} = \frac{A}{a+bu} + \frac{B}{c+du} \Leftrightarrow A(c+du)+B(a+bu)=1$$

$$\Leftrightarrow cA+aB+(dA+bB)u=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} cA+aB=1 \\ dA+bB=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = -(ad-bc) \neq 0$$

por lo que el sistema de 2×2 tiene una única solución dada por Cramer

$$A = \Delta A/\Delta = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{vmatrix} = \frac{b}{\Delta} = -\frac{b}{ad-bc} \; ; \; B = \Delta B/\Delta = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} c & 1 \\ d & 0 \end{vmatrix} = -\frac{d}{\Delta} = \frac{d}{ad-bc}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+bu)(c+du)} = \frac{A}{a+bu} + \frac{B}{c+du} = -\frac{1}{ad-bc}\frac{b}{a+bu} + \frac{1}{ad-bc}\frac{d}{c+du}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{(a+bu)(c+du)} = -\frac{1}{ad-bc}\int \frac{b}{a+bu}du + \frac{1}{ad-bc}\int \frac{d}{c+du}\,du$$

$$= -\frac{1}{ad-bc}\int \frac{d(a+bu)}{a+bu} + \frac{1}{ad-bc}\int \frac{d(c+du)}{c+du}$$

$$= -\frac{1}{ad-bc}\ln\left|a+bu\right| + \frac{1}{ad-bc}\ln\left|c+du\right|$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{du}{(a+bu)(c+du)} = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{c+du}{a+bu}\right| + C \quad ; \quad ad-bc \neq 0}$$

Problema 44: deducir la siguiente fórmula de integración

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C \quad ; \quad a \neq 0}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{du}{a^2-u^2} = \int \frac{du}{(a-u)(a+u)} = \int \frac{du}{(a+(-1)u)(a+(1)u)} \Rightarrow b=-1, c=a \wedge d=1$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a(1)-(-1)a}\ln\left|\frac{a+(1)u}{a+(-1)u}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C \quad ; \quad a(1)-(-1)a \neq 0$$

Ejercicios sugeridos, Sección 8.5

Prácticos: 10, 12, 18, 25, 33, 34

Teóricos: 40, 42, 43, 44, 46, 48