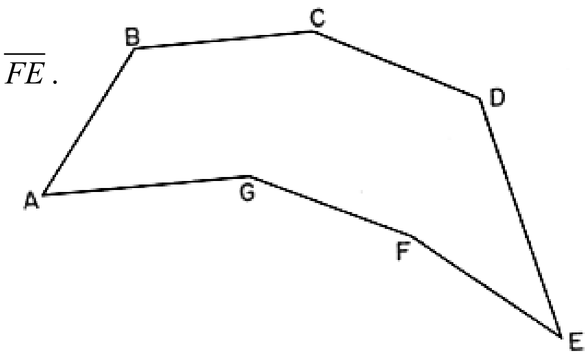
Examen 1 **15-Nov-2008**

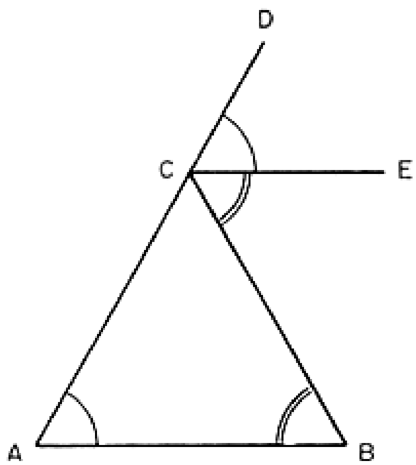
Geometría Plana y Trigonometría (SEP-INAOE)

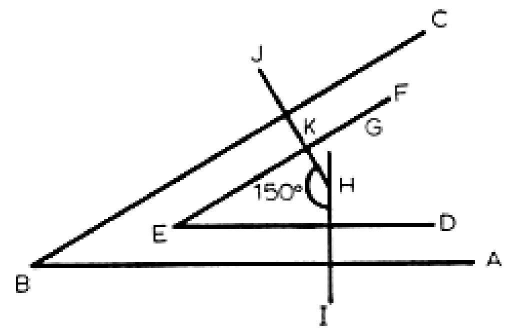
Nombre completo: ____ No. de grupo: _____
Nombre instructor:____ Calificación: _____

1.- Demostrar que: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE} > \overline{AG}+\overline{GF}+\overline{FE}$.



2.- Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su suplemento.



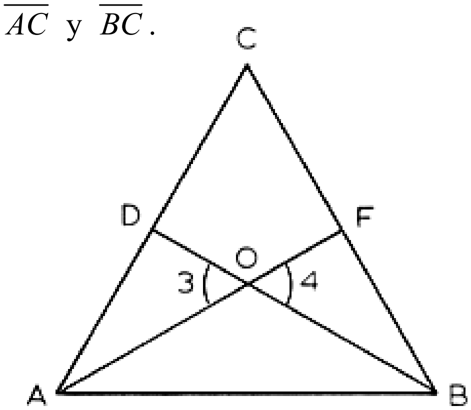


3.- Figura izquierda: la recta $\overleftrightarrow{CE}$ es bisectriz del $\angle BCD$ y $\angle A = \angle B$. Demostrar que $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

4.- Figura derecha: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{EF}; \overleftrightarrow{HI} \perp \overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{HK} \perp \overleftrightarrow{EF}$ y $\angle JHI = 150°$. Hallar $\angle ABC$.

5.- Los ángulos en la base de un triángulo isósceles miden 40˚ cada uno.
¿ Cuánto mide el ángulo opuesto a la base?

6.- El ΔABC es isósceles; D y F son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
Demostrar que, $\overline{AO} = \overline{BO}, \overline{DO} = \overline{FO}$ y $\angle 3 = \angle 4$.

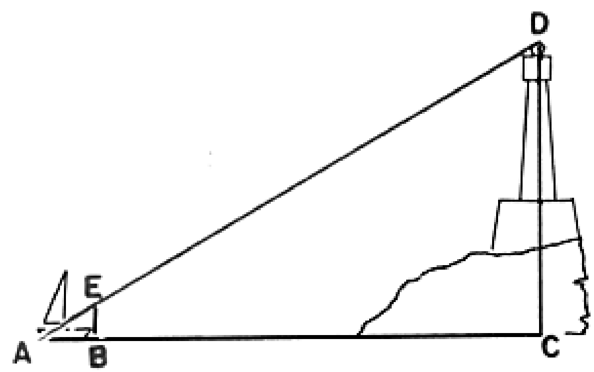


7.- ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 2340˚?

8.- Un ángulo de un romboide mide 36˚. ¿Cuánto miden los otros tres ángulos?

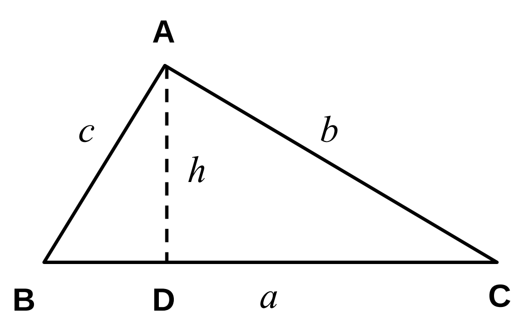
9.- Hallar gráficamente la longitud del segmento x que es la tercera proporcional a segmentos a y b que miden 3 cm y 4 cm, respectivamente.

10.- Si $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overline{AB} = 12$ m, $\overline{BE} = 8$ m y $\overline{CD} = 120$ m. Calcular $\overline{BC}$.



11.- Clasificar el triángulo cuyos lados miden: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 2$ cm.

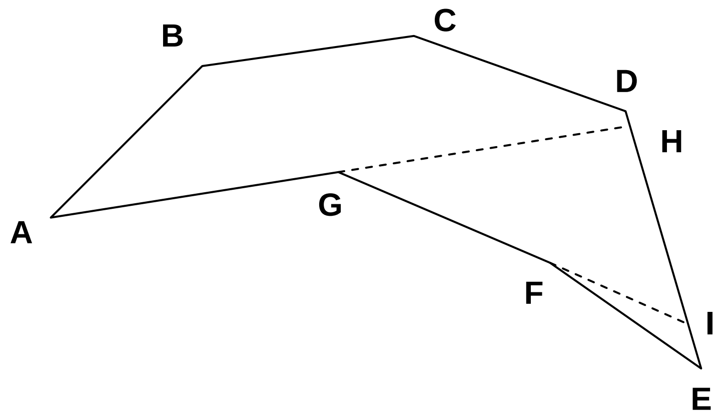
12.- En el $\Delta\, ABC$ desarrollar una expresión algebraica para calcular la altura $h = \overline{AD}$ en función de los lados a, b y c, considerando que el ángulo B es agudo .



Revisor: *M.C. Daniel López*

1.- Demostrar que: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE} > \overline{AG}+\overline{GF}+\overline{FE}$. [0,¼,½,¾,1]

Las hipótesis para resolver este problema son: ABCDE es una poligonal envolvente, AGFE es la poligonal envuelta, y A,E son los extremos comunes a ambas poligonales convexas. La construcción auxiliar consiste, en este caso, en prolongar AG hasta cortar DE en H y GF hasta cortar DE en I. Además, por suma de segmentos,



$$\overline{DH}+\overline{HI}+\overline{IE}=\overline{DE}$$

[¼]

Demostración: aplicando el postulado de la menor distancia entre dos puntos vemos que

en ABCDHG se tiene que $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DH} > \overline{AG}+\overline{GH}$ (1)

en GHIF se obtiene $\overline{GH}+\overline{HI} > \overline{GF}+\overline{FI}$ (2) [½]

análogamente, en FIE $\overline{FI}+\overline{IE} > \overline{FE}$ (3) *sumando* (1), (2) y (3)

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DH})+(\overline{GH}+\overline{HI})+(\overline{FI}+\overline{IE}) > (\overline{AG}+\overline{GH})+(\overline{GF}+\overline{FI})+\overline{FE}$$ *equivalentemente*

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD})+(\overline{DH}+\overline{HI}+\overline{IE})+(\overline{GH}+\overline{FI}) > (\overline{AG}+\overline{GF}+\overline{FE})+(\overline{GH}+\overline{FI}) \quad (4)$$ [¾]

de donde, al aplicar suma de segmentos (ver hipótesis adicional) y simplificar el último término igual a ambos lados de la desigualdad (4), *queda demostrada la proposición dada.*

[1]

2.- Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su suplemento. *Sea x el ángulo buscado, por definición, su suplemento está dado por* $180°-x$ *y según el planteamiento dado, se cumple que*

[0,½,1]

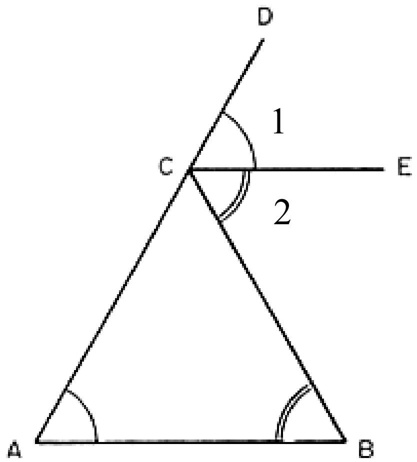
$$x=\frac{1}{2}(180°-x) \quad \text{de donde} \quad 2x=180°-x$$ [½]

$$\text{entonces,} \quad 3x=180° \quad \text{y} \quad x=\frac{180°}{3}=60°.$$ [1]

Revisor: *M.C. Carlos Ortiz*

3.- Figura izquierda: la recta $\overleftrightarrow{CE}$ es bisectriz del $\angle BCD$ y $\angle A = \angle B$. Demostrar que $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

[0,¼,½,¾,1]



La suma de los ángulos interiores en el $\Delta\, ABC$ *está dada por*

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \quad (1)$$

análogamente, los ángulos consecutivos formados sobre la recta AD suman dos rectos, es decir,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180° \quad (2)$$ [¼]

por transitividad de (1) y (2) *se sigue que*

$$\angle A + \angle B = \angle 1 + \angle 2$$ [½]

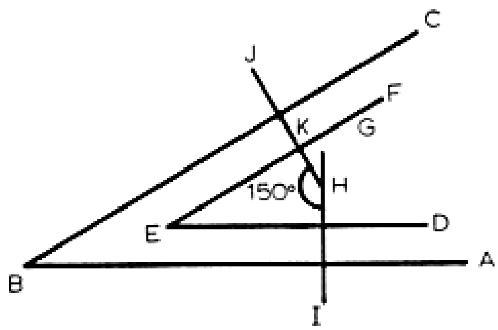
Además, por hipótesis, $\angle A = \angle B$ y $\angle 1 = \angle 2$ *de modo que*

$$\angle A = \angle 1 \quad \text{y} \quad \angle B = \angle 2$$ [¾]

Consecuentemente la recta secante AD forma ángulos correspondientes iguales con las rectas CE y AB, por tanto CE || AB (postulado de una secante). Equivalentemente, la recta secante BC forma ángulos alternos internos iguales con las rectas CE y AB, en consecuencia CE || AB (teorema recíproco). [1]

4.- Figura derecha: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{HI} \perp \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{HK} \perp \overleftrightarrow{EF}$ y $\angle JHI = 150°$. Hallar $\angle ABC$.

[0,½,1]



Por hipótesis, el ángulo agudo FED y el ángulo obtuso JHI tienen sus lados mutuamente perpendiculares, por lo tanto son suplementarios. Entonces,

$$\angle FED = 180° - \angle JHI = 180° - 150° = 30°$$ [½]

Por otra parte, los ángulos agudos FED y ABC son iguales por tener sus lados paralelos y orientados en el mismo sentido. Por tanto,

$$\angle ABC = \angle FED = 30°$$ [1]

Revisor: *Dr. Juan Pablo Torres*

[0,½,1]

5.- Los ángulos en la base de un triángulo isósceles miden 40˚ cada uno. ¿ Cuánto mide el ángulo opuesto a la base? *En un triángulo isósceles los ángulos en la base son iguales y como la suma de los ángulos interiores en un triángulo es igual a dos rectos, resulta que*

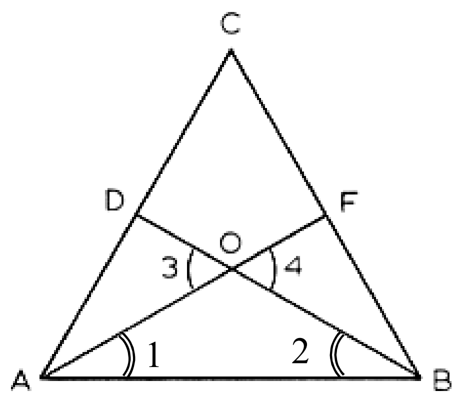
$\angle A + \angle B + \angle C = 2R = 180°$ entonces, $2\angle A + \angle C = 180°$, de donde [½]

$\angle C = 180° - 2\angle A = 180° - 2\times 40° = 180° - 80° = 100°$ (ángulo opuesto a la base) [1]

6.- El $\Delta\, ABC$ es isósceles; D y F son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
Demostrar que, $\overline{AO} = \overline{BO}$, $\overline{DO} = \overline{FO}$ y $\angle 3 = \angle 4$.

[0,¼,½,¾,1]

[¼]



Por ser el $\Delta\, ABC$ *isósceles,* $AC = BC$. *Siendo además* D *y* F *los puntos medios de los lados iguales, se tiene que* $CF = CD$. *Así,* $\Delta\, ACF = \Delta\, BCD$ *por tener dos lados iguales y el ángulo* C *comprendido entre ellos.*

Por lo tanto, a los lados homólogos CF *y* CD *se oponen ángulos iguales, es decir,* $\angle CAF = \angle CBD$ *y como por hipótesis* $\Delta\, ABC$ *es isósceles, los ángulos en su base son iguales. De este modo,*

$$\angle 1 = \angle A - \angle CAF = \angle B - \angle CBD = \angle 2 .$$ [½]

Consecuentemente, el $\Delta\, AOB$ *es también isósceles y a ángulos iguales se oponen lados iguales, así* $AO = BO$, *y como, por hipótesis* $AD = BF$, *se deduce que* $\Delta\, AOD = \Delta BOF$, *por tener dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos, ya que*

$\angle DAO = \angle CAF = \angle CBD = \angle FBO$, de donde [¾]
los opuestos son iguales $\therefore$ $\overline{DO} = \overline{FO}$.

Finalmente, por ser ángulos exteriores al $\Delta\, AOB$,

$$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = \angle 4 .$$ [1]

7.- ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 2340°? *La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados está dada por*

[0,½,1]

$$S_i = 2R(n-2), \quad \text{entonces} \quad n = \frac{S_i}{2R} + 2 \quad \text{y al substituir,}$$ [½]

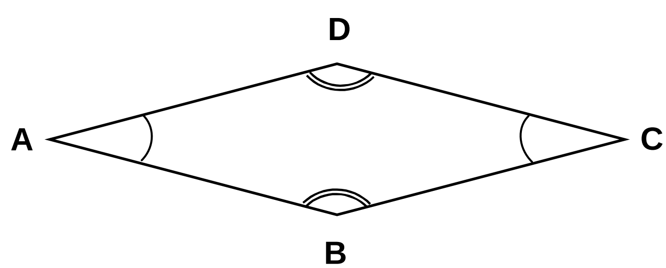
$$n = \frac{2340°}{180°} + 2 = 13 + 2 = 15$$ [1]

que resulta ser un polígono de 15 lados o pentedecágono.

8.- Un ángulo de un romboide mide 36˚. ¿Cuánto miden los otros tres ángulos? *Por definición, un romboide tiene los ángulos contiguos desiguales y como todo romboide es un paralelogramo, estos ángulos son suplementarios. Así, de acuerdo a la figura mostrada, se obtienen*

[¼]

[0,¼,½,¾,1]



[½]

$$\angle A = 36° \ \text{(hipótesis)}$$

$$\angle B = 2R - \angle A = 180° - 36° = 144°$$ [¾]

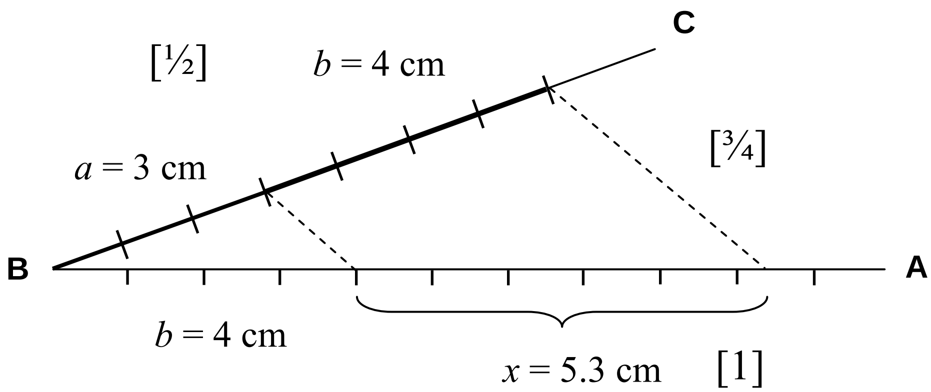
$$\angle C = 2R - \angle B = 180° - 144° = 36°$$

$$\angle D = 2R - \angle C = 180° - 36° = 144°$$ [1]

9.- Hallar gráficamente la longitud del segmento x que es la tercera proporcional a segmentos a y b que miden 3 cm y 4 cm, respectivamente. [0,¼,½,¾,1]

[¼] *La construcción gráfica consiste en formar el ángulo ABC de cuyo vértice B se traza la semirrecta BC sobre la cual se llevan consecutivamente los segmentos* $a = 3$ cm *y* $b = 4$ cm. *Luego, sobre la semirrecta BA se coloca, partiendo de B, el segmento* $b = 4$ cm *y se unen los extremos de a con b (sobre BA). Finalmente, se traza en el extremo de b una paralela al segmento ab que corte BA formando así el segmento x que es tercera proporcional de los segmentos dados. Aritméticamente,*

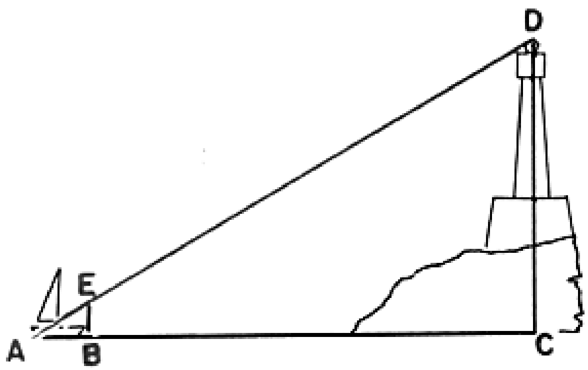
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \quad \text{ya que} \quad \frac{a}{b} = \frac{3}{4} = \frac{4}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \approx 5.3 \text{ cm.}$$



10.- Si $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overline{AB} = 12$ m, $\overline{BE} = 8$ m y $\overline{CD} = 120$ m. Calcular $\overline{BC}$.

[0,¼,½,¾,1]

[¼]



Los triángulos ABE y ACD son semejantes por ser rectángulos, ya que $\angle B = \angle C = R$, *y tener el ángulo agudo* A *igual. Estableciendo la proporcionalidad de los lados se tiene que*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}$$ y por suma de segmentos [½]

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}$$ entonces, [¾]

$$\overline{BC} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \cdot \overline{AB} - \overline{AB} = \frac{120}{8} \cdot 12 - 12 = 168 \text{ m.}$$ [1]

Revisor: *Dr. Gonzalo Urcid*

11.- Clasificar el triángulo cuyos lados miden: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 2$ cm. *Se escoge el lado mayor como opuesto al ángulo que clasifica al triángulo y los otros dos lados para ver si existe o no exceso o defecto entre el cuadrado del lado mayor y la suma de cuadrados de los otros dos lados (criterio basado en el Teorema de Pitágoras y sus generalizaciones). Así, como $b > a$ y $b > c$, se obtiene* [¼]

[0,¼,½,¾,1]

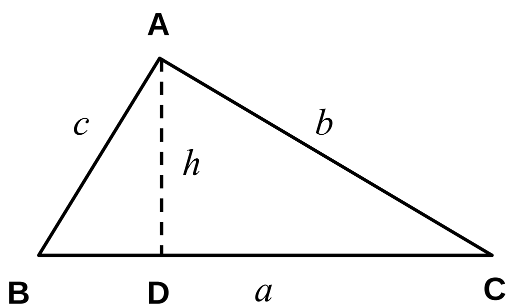
$b^2 = 4^2 = 16, \quad a^2 + c^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$ de modo que [½]

$b^2 = 16 > 13 = a^2 + c^2$ (exceso en el cuadrado del lado mayor) [¾]

$\therefore$ el triángulo es obtusángulo. [1]

12.- En el $\Delta\, ABC$ desarrollar una expresión algebraica para calcular la altura $h = \overline{AD}$ en función de los lados a, b y c, considerando que el ángulo B es agudo .

[0,¼,½,¾,1]



De la figura, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABD, se obtiene

$$h^2 = \overline{AD}^2 = c^2 - \overline{BD}^2 \qquad (1)$$ [¼]

y por la generalización del Teorema de Pitágoras para la hipótesis de ángulo agudo, respecto del ángulo B (supuesto), vemos que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a\ \mathrm{proy}_a c = a^2 + c^2 - 2a \cdot \overline{BD}$$

de donde $$\overline{BD} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \qquad (2)$$

Substituyendo (2) *en* (1), *desarrollando algebraicamente y considerando que $a + b + c = 2p$ (semiperímetro), se obtiene* [½]

$$h^2 = c^2 - \overline{BD}^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$= \left(\frac{(a^2 + 2ac + c^2) - b^2}{2a}\right)\left(\frac{b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)}{2a}\right) = \frac{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}{4a^2}$$ [¾]

$$= \frac{1}{4a^2}(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c) = \frac{1}{4a^2}(2p)(2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2a)$$

$$= \frac{16}{4a^2}\, p(p-a)(p-b)(p-c) \quad \therefore \quad h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$ [1]