

Examen 3**13-Dic-2008****Geometría Plana y Trigonometría (SEP-INAOE)**

Nombre completo: _____

No. de grupo: _____

Nombre instructor: _____

Calificación: _____

- 1.- Explicar si son correctos o no los signos de las siguientes funciones:

a) $\sec 240^\circ = -2$; b) $\cos 150^\circ = -\sqrt{3}/3$

- 2.- Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $\csc^2 30^\circ + \tan^2 45^\circ$; b) $\frac{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}{\csc^2 30^\circ + \sec^2 45^\circ}$

- 3.- Reducir las siguientes funciones trigonométricas a otras equivalentes de ángulos menores de 45° .

a) $\csc 45^\circ 20'$; b) $\cos 85^\circ$

- 4.- Reducir las siguientes funciones trigonométricas a las de un ángulo positivo menor de 45° .

a) $\tan(-220^\circ)$; b) $\sec(-85^\circ 15')$

- 5.- Probar las siguientes identidades con el mínimo de pasos algebraicos:

a) $\sin x \sec x \cot x = 1$; b) $2 \tan x + \cos x = \frac{\cos^2 x + 2 \sin x}{\cos x}$

- 6.- Resolver la siguiente ecuación trigonométrica dando todas las soluciones posibles:

$$\frac{1}{3} \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 - \sin x)$$

- 7.- Calcular las seis funciones trigonométricas del ángulo de 15° empleando las fórmulas para las funciones trigonométricas de suma o diferencia de ángulos y los valores de estas funciones de los ángulos notables (30° , 45° y 60°).

- 8.- Demostrar la siguiente identidad: $\sin(x+y)\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$

- 9.- Calcular las seis razones trigonométricas del ángulo $22^\circ 30'$.

- 10.- Demostrar, transformando en producto, las siguientes igualdades:

a) $\cos 75^\circ - \sin 15^\circ = \sin 75^\circ - \cos 15^\circ$; b) $\cos(45^\circ + x) + \cos(45^\circ - x) = \sqrt{2} \cos x$

- 1.- Explicar si son correctos o no los signos de las siguientes funciones: $[0, \frac{1}{2}, 1]$
 a) *el signo negativo de $\sec 240^\circ$ es correcto ya que \sec es el recíproco de $\cos 240^\circ$ y estando el ángulo en el III cuadrante el lado adyacente es negativo y la hipotenusa es positiva, por tanto, $\cos 240^\circ$ es negativo y lo mismo $\sec 240^\circ$. Algebraicamente,*

$$\sec 240^\circ = \frac{1}{\cos 240^\circ} = \frac{1}{\cos(180^\circ + 60^\circ)} = \frac{1}{-\cos 60^\circ} = \frac{1}{-1/2} = -2 \quad [1/2]$$

b) el signo negativo de $\cos 150^\circ$ es correcto ya que estando el ángulo en el II cuadrante el lado adyacente es negativo y la hipotenusa es positiva; sin embargo el valor de $\cos 150^\circ$ en el texto es incorrecto ya que

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad [1]$$

- 2.- Calcular el valor de las siguientes expresiones: *estos problemas se resuelven por sustitución directa de los valores de las razones trigonométricas correspondientes a los ángulos notables de 30° , 45° y 60° , es decir,*

$[0, \frac{1}{2}, 1]$

$$a) \quad \csc^2 30^\circ + \tan^2 45^\circ = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \quad [1/2]$$

$$b) \quad \frac{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}{\csc^2 30^\circ + \sec^2 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{4 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{9} \quad [1]$$

- 3.- Reducir las siguientes funciones trigonométricas a otras equivalentes de ángulos menores de 45° . *Estos problemas se resuelven empleando las relaciones trigonométricas de ángulos complementarios, así,*

$[0, \frac{1}{2}, 1]$

$$a) \quad \csc 45^\circ 20' = \sec(90^\circ - 45^\circ 20') = \sec 44^\circ 40' \quad \text{y} \quad 44^\circ 40' < 45^\circ \quad [1/2]$$

$$b) \quad \cos 85^\circ = \sin(90^\circ - 85^\circ) = \sin 5^\circ \quad \text{y} \quad 5^\circ < 45^\circ \quad [1]$$

$[0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1]$

4.- Reducir las siguientes funciones trigonométricas a las de un ángulo positivo menor de 45° .

Como los ángulos dados son negativos, estos problemas se resuelven empleando primero las relaciones trigonométricas del ángulo $-a$ y enseguida reduciendo mediante las relaciones trigonométricas para ángulos complementarios o suplementarios. De este modo,

$$a) \quad \tan(-220^\circ) = -\tan 220^\circ = \tan(180^\circ - 220^\circ) = \tan(-40^\circ) = -\tan 40^\circ \quad y \quad 0^\circ < 40^\circ < 45^\circ$$

$[\frac{1}{4}]$

$[\frac{1}{2}]$

$$b) \quad \sec(-85^\circ 15') = \sec 85^\circ 15' = \csc(90^\circ - 85^\circ 15') = \csc 4^\circ 45' \quad y \quad 0^\circ < 4^\circ 45' < 45^\circ$$

$[\frac{3}{4}]$

$[1]$

5.- Probar las siguientes identidades con el mínimo de pasos algebraicos: $[0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1]$

$[\frac{1}{4}]$

$$a) \quad \sin x \sec x \cot x = \sin x \frac{1}{\cos x} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x} \frac{\cos x}{\cos x} = (1)(1) = 1 \quad [\frac{1}{2}]$$

$$b) \quad 2 \tan x + \cos x = \frac{\cos^2 x + 2 \sin x}{\cos x} \quad \therefore (2 \tan x + \cos x) \cos x = \cos^2 x + 2 \sin x$$

$$\text{entonces, } 2 \tan \cos x + \cos^2 x = 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cos x + \cos^2 x = 2 \sin x \frac{\cos x}{\cos x} + \cos^2 x \quad [\frac{3}{4}]$$

$$= \cos^2 x + 2 \sin x (1) = \cos^2 x + 2 \sin x \quad [1]$$

$[0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1]$

6.- Resolver la siguiente ecuación trigonométrica dando todas las soluciones posibles:

$$\frac{1}{3} \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 - \sin x) \quad \therefore 2 \cos^2 x = 2(1 - \sin x) = 3(1 - \sin x) \quad \text{de donde}$$

$$2 - 2 \sin^2 x = 3 - 3 \sin x, \text{ equivalentemente, } 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \quad [\frac{1}{4}]$$

$$\text{ec. de 2do grado que factorizada queda así, } (2 \sin x - 2)(\sin x - \frac{1}{2}) = 0 \quad [\frac{1}{2}]$$

expresión de la cual se obtienen dos ecuaciones lineales, a saber

$$2 \sin x - 2 = 0 \quad \therefore \sin x = 1 \quad \therefore x = 90^\circ \quad y$$

$$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore \sin x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = 30^\circ, 150^\circ \quad \text{ya que } \sin 30^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) \quad [\frac{3}{4}]$$

Finalmente a las soluciones fundamentales de 90° , 30° y 150° basta añadir un múltiplo entero (positivo o negativo) de 360° para obtener todas las soluciones posibles. [1]

[0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1]

- 7.- Calcular las seis funciones trigonométricas del ángulo de 15° empleando las fórmulas para las funciones trigonométricas de suma o diferencia de ángulos y los valores de estas funciones de los ángulos notables (30° , 45° y 60°).

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad [1/6]$$

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \quad [1/3]$$

$$\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \quad [1/2]$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \quad [2/3]$$

$$\sec 15^\circ = \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{4}{2 - 6}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) = \sqrt{6} - \sqrt{2} \quad [5/6]$$

$$\csc 15^\circ = \frac{1}{\sin 15^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{4}{6 - 2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \sqrt{6} + \sqrt{2} \quad [1]$$

[0, 1/4, 1/2, 3/4, 1]

- 8.- Demostrar la siguiente identidad: $\sin(x + y)\sin(x - y) = \cos^2 y - \cos^2 x$
Esta identidad se demuestra empleando primero la 4ta fórmula de transformación en producto, haciendo un cambio de variable para efectuar una substitución y finalmente usando la fórmula del ángulo doble. Así,

[1/4]

$$\text{como } -2\sin \frac{1}{2}(A + B)\sin \frac{1}{2}(A - B) = \cos A - \cos B, \text{ poniendo } A = 2x \text{ y } B = 2y \quad [1/2]$$

se obtiene $-2\sin(x + y)\sin(x - y) = \cos 2x - \cos 2y$, entonces

$$\sin(x + y)\sin(x - y) = \frac{1}{2}[\cos 2y - \cos 2x] = \frac{1}{2}[2\cos^2 y - 1 - (2\cos^2 x - 1)] \quad [3/4]$$

$$= \frac{1}{2}[2\cos^2 y - 1 - 2\cos^2 x + 1] = \cos^2 y - \cos^2 x \quad [1]$$

9.- Calcular las seis razones trigonométricas del ángulo $22^\circ 30'$. $[0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1]$

$$\operatorname{sen} 22^\circ 30' = \operatorname{sen} \frac{45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos 45^\circ}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{2}/2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad [1/6]$$

$$\cos 22^\circ 30' = \cos \frac{45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cos 45^\circ}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}/2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad [1/3]$$

$$\tan 22^\circ 30' = \tan \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1, \quad [1/2]$$

$$\cot 22^\circ 30' = \frac{1}{\tan 22^\circ 30'} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1, \quad [2/3]$$

$$\sec 22^\circ 30' = \frac{1}{\cos 22^\circ 30'} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \quad [5/6]$$

$$\csc 22^\circ 30' = \frac{1}{\operatorname{sen} 22^\circ 30'} = \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}. \quad [1]$$

10.- Demostrar, transformando en producto, las siguientes igualdades: $[0, 1/4, 1/2, 3/4, 1]$

$[1/4]$

a) cambiando $\cos 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ - \cos 15^\circ$ a $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ$

y usando las fórmulas de transformación de sumas en producto, se obtiene la igualdad ya que

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ + \cos 15^\circ &= 2 \cos \frac{1}{2}(75^\circ + 15^\circ) \cos \frac{1}{2}(75^\circ - 15^\circ) = 2 \cos 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ &= 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(75^\circ + 15^\circ) \cos \frac{1}{2}(75^\circ - 15^\circ) = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad [1/2]$$

b) aquí se emplea la 3era fórmula de transformación de suma en producto, así

$$\begin{aligned} \cos(45^\circ + x) + \cos(45^\circ - x) &= 2 \cos \frac{1}{2}[(45^\circ + x) + (45^\circ - x)] \cos \frac{1}{2}[(45^\circ + x) - (45^\circ - x)] \quad [3/4] \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(90^\circ) \cos \frac{1}{2}(2x) = 2 \cos 45^\circ \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \sqrt{2} \cos x \quad [1] \end{aligned}$$