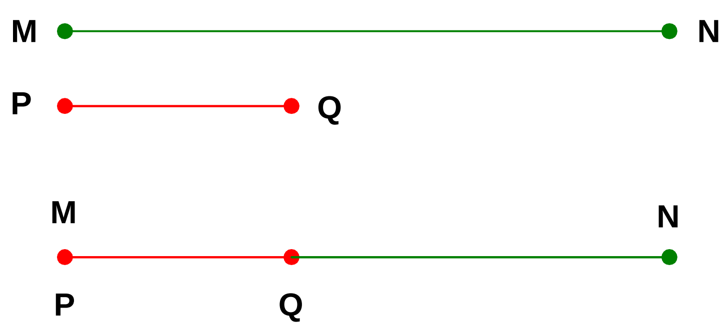
Generalidades

Capítulo 1. Ejercicios Resueltos (pp. 18 – 20)

(1) Señalar de las opciones a), b) y c), cuál es el axioma. *Recuérdese que un axioma es una proposición cuya verdad se admite sin demostración y cuya descripción es relativamente simple y evidente. El axioma corresponde a b) ya que la proposición, "La suma de las partes es igual al todo" tiene las características antes mencionadas. Nótese que este axioma es similar al dado en el texto como ejemplo, "El todo es mayor que cualquiera de sus partes." (pág. 8). Complementariamente, a) y c) son ejemplos de teoremas.*

(3) Señalar de las opciones a), b) y c), cuál es el teorema. *Recuérdese que un teorema es una proposición que puede ser demostrada empleando razonamientos que conducen a establecer su veracidad y en la cuál se pueden distinguir las hipótesis (lo que se supone) de la tesis (lo que se desea demostrar). El teorema corresponde al inciso a), pues la proposición "Las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio" no es simple o evidente y cuya verdad puede demostrarse encadenando razonamientos basados en definiciones, axiomas, postulados o teoremas (lemas) previamente dados o probados. En este caso particular, las hipótesis contemplan un rectángulo y sus diagonales, mientras que la tesis corresponde a que dichas diagonales se cortan en su punto medio. Complementariamente, b) y c) son ejemplos de axiomas.*

(5) Dibujar los segmentos: $\overline{MN} = 8$ cm y $\overline{PQ} = 3$ cm y restarlos gráficamente.



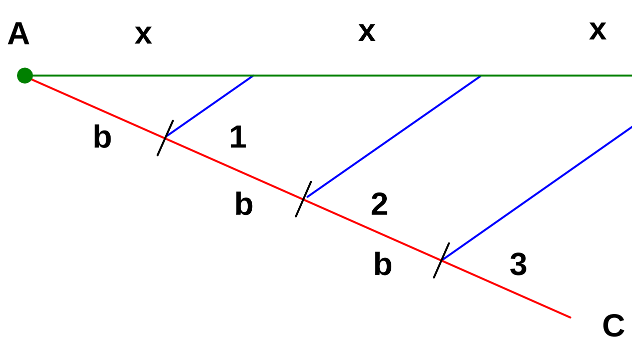
$\overline{MN} = 8$ cm

$\overline{PQ} = 3$ cm

$\overline{MN} - \overline{PQ} = 8\text{ cm} - 3\text{ cm}$

$= 5\text{ cm} = \overline{QN}$

(7) Dividir el segmento $\overline{AB} = 9$ cm en 3 partes iguales.



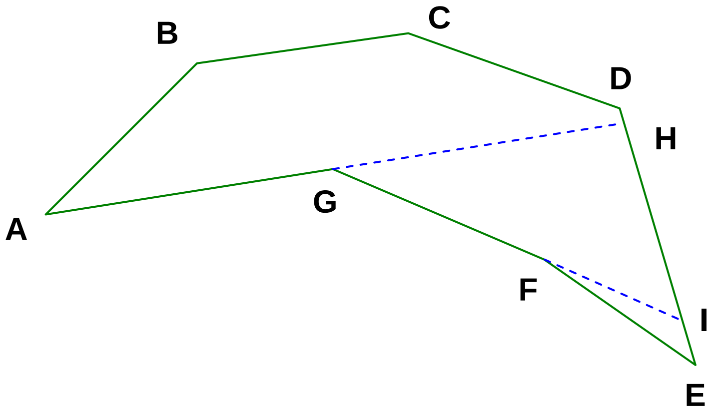
A partir del extremo A se traza la semirecta AC con cualquier inclinación. Sobre ella partiendo de A, se marcan sucesivamente 3 marcas de longitud b (divisor). El extremo del 3er segmento b se une con B y se trazan paralelas al segmento B3 por los puntos 1 y 2. Entonces,

$$x = \frac{\overline{AB}}{3} = \frac{9\text{ cm}}{3} = 3\text{ cm}$$

Generalidades

Capítulo 1. Ejercicios Resueltos (pp. 18 – 20)

(9) Demostrar que: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE} > \overline{AG}+\overline{GF}+\overline{FE}$



Las hipótesis para resolver este problema son: ABCDE es una poligonal envolvente, AGFE es la poligonal envuelta, y A,E son los extremos comunes a ambas poligonales convexas. La construcción auxiliar consiste, en este caso, en prolongar AG hasta cortar DE en H y GF hasta cortar DE en I. Además, por suma de segmentos,

$$\overline{DH}+\overline{HI}+\overline{IE}=\overline{DE}$$

Demostración: aplicando el postulado de la menor distancia entre dos puntos vemos que

en ABCDHG se tiene que $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DH} > \overline{AG}+\overline{GH}$ (1)

en GHIF se obtiene $\overline{GH}+\overline{HI} > \overline{GF}+\overline{FI}$ (2)

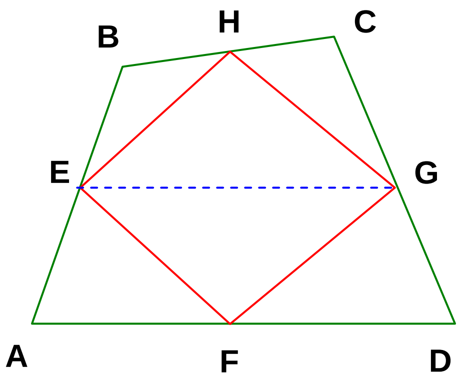
análogamente, en FIE $\overline{FI}+\overline{IE} > \overline{FE}$ (3) *sumando* (1), (2) y (3)

$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DH})+(\overline{GH}+\overline{HI})+(\overline{FI}+\overline{IE}) > (\overline{AG}+\overline{GH})+(\overline{GF}+\overline{FI})+\overline{FE}$ *equivalentemente*

$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD})+(\overline{DH}+\overline{HI}+\overline{IE})+(\overline{GH}+\overline{FI}) > (\overline{AG}+\overline{GF}+\overline{FE})+(\overline{GH}+\overline{FI})$ (4)

de donde, al aplicar suma de segmentos (ver hipótesis adicional) y simplificar el último término igual a ambos lados de la desigualdad (4), *queda demostrada la proposición dada.*

(11) Demostrar que: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA} > \overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HE}$



Como construcción auxiliar puede dividirse la figura dada en dos partes, superior e inferior, respecto al segmento EG. Aplicando el Teorema 1 (pág. 17) a las poligonales convexas de ambas partes es claro que

$\overline{EB}+\overline{BC}+\overline{CG} > \overline{EH}+\overline{HG}$ (1) ; $\overline{EA}+\overline{AD}+\overline{DG} > \overline{EF}+\overline{FG}$ (2)

de (1) + (2), *por simetría de extremos y suma de segmentos*

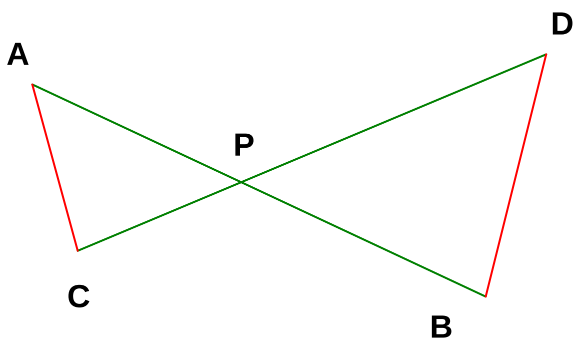
$$(\overline{EA}+\overline{EB})+\overline{BC}+(\overline{CG}+\overline{DG})+\overline{AD} > \overline{EF}+\overline{FG}+\overline{HG}+\overline{EH}$$

$$(\overline{AE}+\overline{EB})+\overline{BC}+(\overline{CG}+\overline{GD})+\overline{DA} > \overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HE}\ .$$

Generalidades

Capítulo 1. Ejercicios Resueltos (págs. 18 – 20)

(13) Demostrar que la suma de dos segmentos que se cortan es mayor que la suma de los segmentos que unen sus extremos.



Las hipótesis para resolver este problema son: AB y CD son segmentos que se cortan en el punto P y los segmentos AC y BD unen sus respectivos extremos. La tesis establece que: $\overline{AB}+\overline{CD}>\overline{AC}+\overline{BD}$

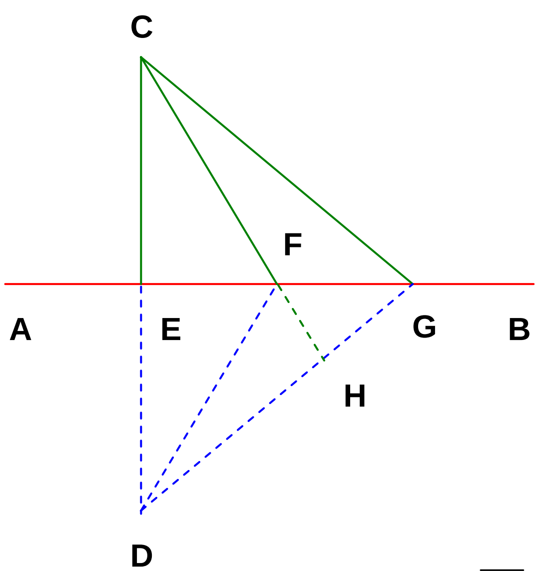
Demostración: por el postulado de menor distancia entre dos puntos aplicado respecto del punto P se obtiene

$\overline{AP}+\overline{PC}>\overline{AC}$ (1) ; $\overline{DP}+\overline{PB}>\overline{BD}$ (2)

$(\overline{AP}+\overline{PC})+(\overline{DP}+\overline{PB})>\overline{AC}+\overline{BD}$ *sumando* (1) y (2)

$(\overline{AP}+\overline{PB})+(\overline{CP}+\overline{PD})>\overline{AC}+\overline{BD}$ *por simetría de extremos y suma de segmentos*

(15) Si E es la intersección de los segmentos CD con AB y $CG=GD$, $CF=FD$ y $CE=ED$, demostrar que $\overline{CG}>\overline{CF}>\overline{CE}$.



Las hipótesis para resolver este problema corresponden a la igualdad de los segmentos CG, CF y CE (trazado sólido) respectivamente con los segmentos GD, FD y ED (trazado punteado). Empleando el postulado de menor distancia entre dos puntos resulta claro que

$$\overline{CG}+\overline{GH}>\overline{CF}+\overline{FH} \quad (1)$$
$$\overline{FH}+\overline{HD}>\overline{DF} \quad (2)$$
$$\overline{CF}+\overline{FD}>\overline{CE}+\overline{ED} \quad (3)$$

sumando (1) y (2) *y empleando las hipótesis dadas, resulta que*

$(\overline{CG}+\overline{GH})+(\overline{FH}+\overline{HD})>(\overline{CF}+\overline{FH})+\overline{DF}$

equivalentemente, $\overline{CG}+(\overline{GH}+\overline{HD})+\overline{FH}>(\overline{CF}+\overline{DF})+\overline{FH}$ *entonces,*

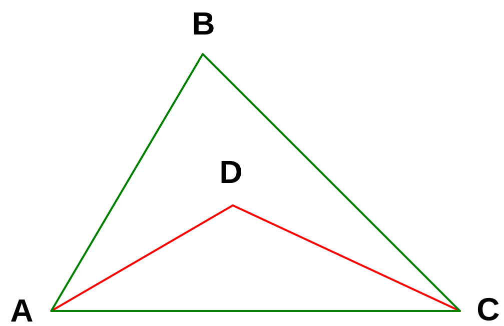
$\overline{CG}+\overline{GD}=2\overline{CG}>2\overline{CF}=(\overline{CF}+\overline{DF})$ *y de* (3)*, se obtiene también que* $2\overline{CF}>2\overline{CE}$.

Finalmente, la tesis se justifica por la transitividad de la desigualdad.

Generalidades

Capítulo 1. Ejercicios Resueltos (pp. 18 – 20)

(17) Demostrar que el perímetro del triángulo ABC es mayor que el perímetro del triángulo ADC.



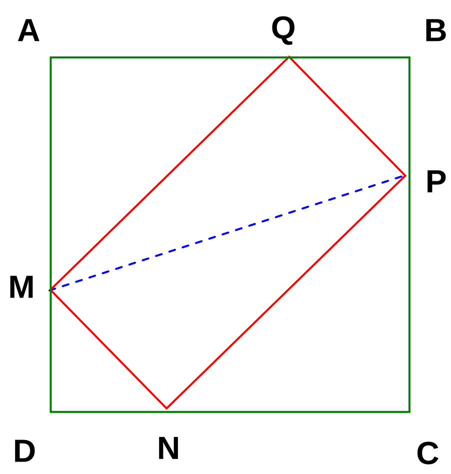
La hipótesis para resolver este problema es: los triángulos ABC y ADC comparten como base el segmento AC, que puede interpretarse respecto a los extremos comunes A y C, como la poligonal convexa ABC que envuelve a la poligonal convexa ADC. La tesis puede expresarse así,

$$\text{perímetro } \Delta\, ABC = \text{perímetro } \Delta\, ADC$$

equivalentemente, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} > \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CA}$.

Demostración: por el Teorema 1 (pág. 17), $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AD} + \overline{DC}$ *y al sumar el segmento CA a ambos lados de la desigualdad se demuestra la proposición dada.*

(19) Demostrar que el perímetro del □ $ABCD$ es mayor que el perímetro del □ $MNPQ$.



La hipótesis para resolver este problema corresponde al hecho de que los vértices o esquinas del rectángulo MNPQ están sobre los segmentos que determinan los lados del rectángulo exterior ABCD. La tesis puede expresarse así,

$$\text{perímetro } \square\, ABCD = \text{perímetro } \square\, MNPQ$$

equivalentemente,

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} > \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QM}\,.$$

Como construcción auxiliar puede dividirse la figura dada en dos partes, superior e inferior, respecto al segmento MP. Aplicando el Teorema 1 (pág. 17) a las poligonales convexas de ambas partes es claro que

$$\overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BP} > \overline{MQ} + \overline{QP} \quad (1) \quad ; \quad \overline{MD} + \overline{DC} + \overline{CP} > \overline{MN} + \overline{NP} \quad (2)$$

de (1) + (2), *por simetría de extremos y suma de segmentos*

$$\overline{AB} + (\overline{BP} + \overline{CP}) + \overline{DC} + (\overline{MA} + \overline{MD}) > \overline{MQ} + \overline{QP} + \overline{NP} + \overline{MN}$$
$$\overline{AB} + (\overline{BP} + \overline{PC}) + \overline{CD} + (\overline{DM} + \overline{MA}) > \overline{QM} + \overline{PQ} + \overline{NP} + \overline{MN}$$