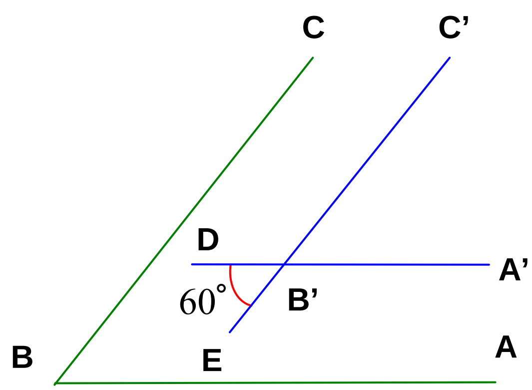
Ángulos con lados ∥ o ⊥

Capítulo 4. Ejercicios Resueltos (pp. 51 – 53)

(1) La recta *AB* es paralela a la recta *A'B'*, la recta *BC* es paralela a la recta *B'C'* y el ángulo *EB'D* = 60˚. Hallar el ángulo *ABC*.

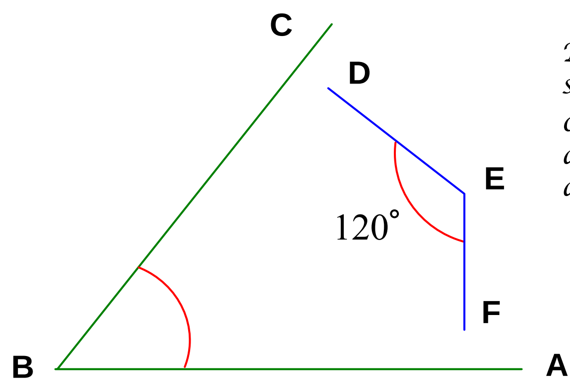


Por hipótesis, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$ *de modo que son dos ángulos de lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido. Por el Teorema 12 (pág. 47) se sigue los ángulos ABC y A'B'C' son iguales, es decir,* $\angle ABC = \angle A'B'C'$. *Además, el ángulo dado EB'D es opuesto por el vértice al ángulo A'B'C' y por el Teorema 3 (pág. 26) son iguales. Consecuentemente,*

como $\angle ABC = \angle A'B'C'$ y $\angle A'B'C' = \angle EB'D$

entonces, $\angle ABC = 60° = \angle EB'D$

(3) El segmento *EF* es perpendicular al segmento *AB*, el segmento *DE* es perpendicular al segmento *BC* y el ángulo *DEF* = 120˚. Hallar el ángulo *ABC*.

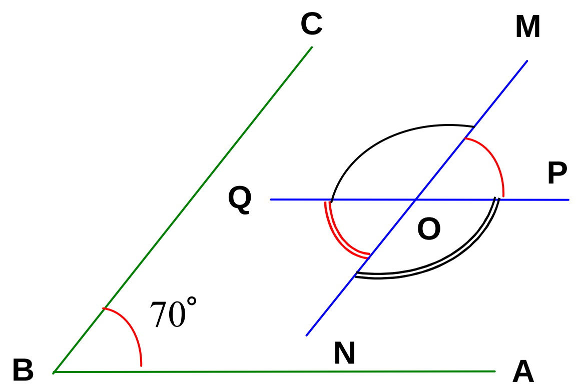


Por hipótesis, $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ y $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ *de modo que son dos ángulos de lados respectivamente perpendiculares siendo ABC un ángulo agudo y DEF un ángulo obstuso. Por el Teorema 16 (pág. 50) se sigue que estos ángulos son suplementarios. Así,*

$\angle ABC + \angle DEF = 2R$ de donde

$\angle ABC = 180° - 120° = 60°$

(5) La recta *AB* es paralela a la recta *PQ*, la recta *BC* es paralela a la recta *MN* y el ángulo *ABC* = 70˚. Hall los ángulos *MOP*, *NOP*, *NOQ* y *MOQ*.



Por hipótesis, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ *de modo que los ángulos ABC y MOP tienen respectivamente, lados paralelos con la misma dirección. Al aplicar el Teorema 12 (pág. 47) resulta que* $\angle MOP = \angle ABC$. *El ángulo NOQ es opuesto por el vértice O al ángulo MOP y por el Teorema 3 (pág. 26) son iguales. Además, el ángulo MOP es adyacente al ángulo NOP y este último es opuesto por el vértice a MOQ*

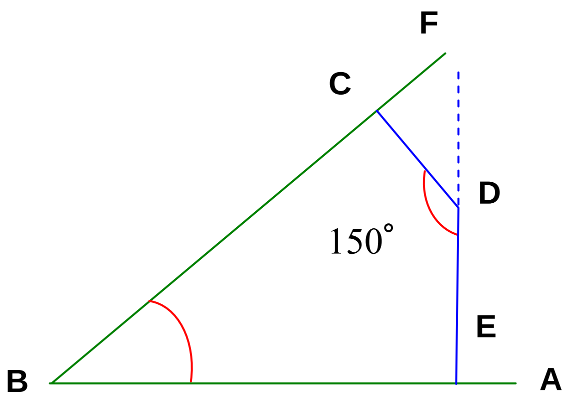
$\therefore \angle MOP = \angle ABC = 70°$; $\angle NOP = 180° - \angle MOP = 110°$

$\angle NOQ = \angle MOP = 70°$ y $\angle MOQ = \angle NOP = 110°$

Ángulos con lados ∥ o ⊥

Capítulo 4. Ejercicios Resueltos (pp. 51 – 53)

(7) La recta *AB* es perpendicular a la recta *ED*, la recta *BF* es perpendicular a la recta *CD* y el ángulo *CDE* = 150˚. Hallar el ángulo *ABC*.



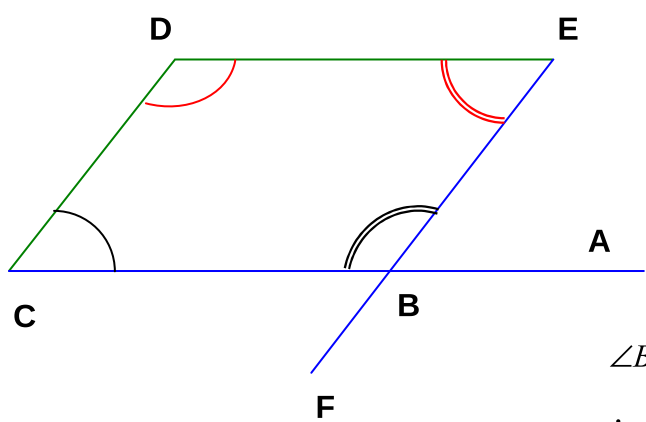
Por hipótesis, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{ED}$ y $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{CD}$ *de modo que son dos ángulos de lados respectivamente perpendiculares siendo ABC un ángulo agudo y CDE un ángulo obtuso. Por el Teorema 16 (pág. 50) se sigue que estos ángulos son suplementarios. Así,*

$$\angle ABC + \angle CDE = 2R \text{ de donde}$$
$$\angle ABC = 180° - 150° = 30°$$

Puede notarse que este problema es parecido al Problema (3) *y por ello el razonamiento es el mismo.*

Para un argumento diferente, considere la prolongación del segmento ED. En tal caso, el ángulo CDF es adyacente al ángulo conocido, por tanto, $\angle CDF = 180° - \angle CDE = 30°$. *Ahora, los ángulos ABC y CDF tienen lados respectivamente perpendiculares y son agudos, por lo que, al aplicar el Teorema 15 (pág. 49) se deduce que estos son iguales, es decir,* $\angle ABC = \angle CDF = 30°$.

(9) La recta *AC* es paralela a la recta *DE*, la recta *EF* es paralela a la recta *CD* y el ángulo *EBC* es el doble del ángulo *BED*. Hallar los ángulos *B*, *C*, *D* y *E*.



Por hipótesis, $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. *En 1er lugar, puede considerarse a la recta EF como secante a las paralelas AC y DE. En consecuencia, por el Teorema 10 (pág. 42) los ángulos conjugados internos, EBC y BED son suplementarios. Por lo cual,*

$$\angle EBC + \angle BED = R$$

y de la relación supuesta $\angle EBC = 2\angle BED$ *se obtiene el valor de los ángulos E y B*

$$\angle BED = R - \angle EBC = R - 2\angle BED$$

$$\therefore \quad \angle E = \angle BED = \frac{R}{3} = 60° \text{ y } \angle B = \angle EBC = 120°$$

Finalmente, los ángulos encontrados, B y E tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario con los ángulos D y C. Según el Teorema 13 (pág. 48) se concluye la igualdad entre los ángulos B y D y la igualdad entre los ángulos E y C. Así,

$$\angle D = \angle EDC = \angle B = 120° \quad \text{y} \quad \angle C = \angle BCD = \angle E = 60°.$$