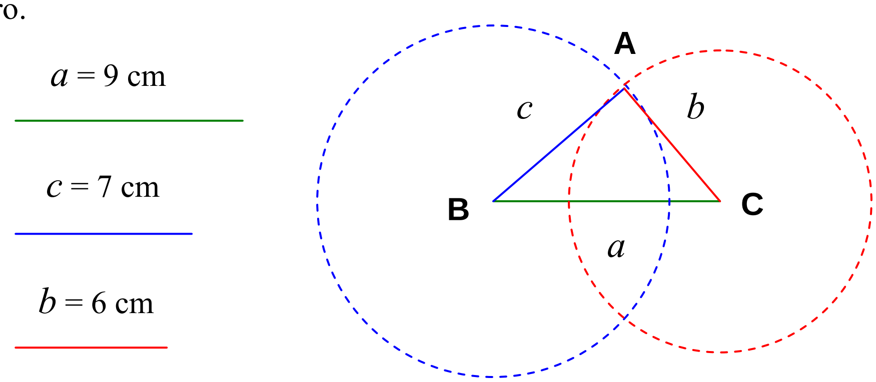
Triángulos y generalidades

Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

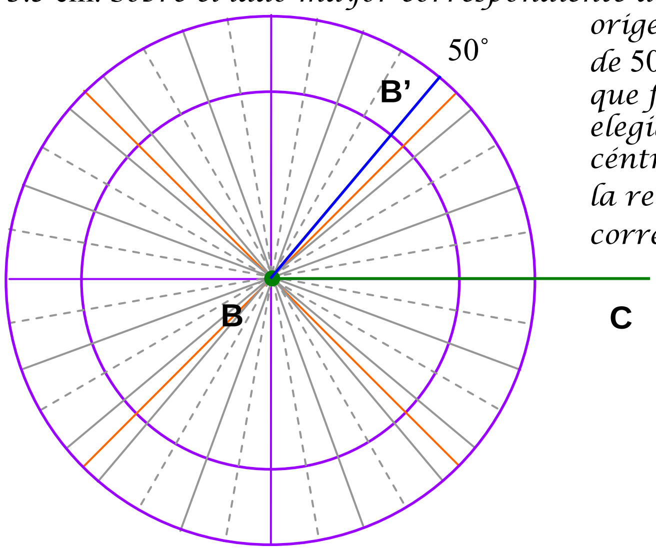
(1) Los lados de un triángulo miden 6 cm, 7 cm y 9 cm. Construir el triángulo y calcular su perímetro y su semiperímetro.



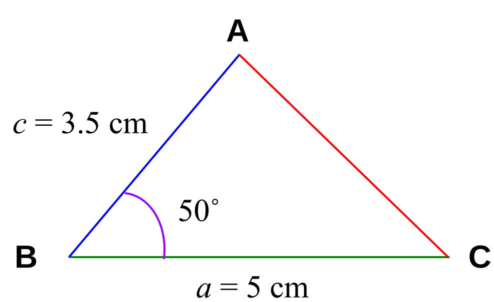
Para construir el triágulo pedido, se establecen los segmentos a, b y c con sus respectivas longitudes. Tomando el lado a como base del triángulo se dibujan dos circunferencias. La primera de radio b con centro en el punto C y la segunda de radio c con centro en el punto B. Estas dos circunferencias se cortan en el punto A del cual se trazan los segmentos AC = b y AB = c. El triángulo ABC tiene los lados dados. Por definición el perímetro es la suma de las longitudes de los lados. Así,

$$2p = a + b + c = 9 + 7 + 6 = 22 \text{ cm} \quad \text{de donde} \quad p = 11 \text{ cm (semiperímetro)}$$

(3) Construir un triángulo que tenga un ángulo de 50˚ y los dos lados que lo forman midan 5 cm y 3.5 cm. *Sobre el lado mayor correspondiente al segmento $BC = a = 5$ cm, se coloca el origen del transportador para marcar el ángulo de 50˚ como un punto B' sobre la circunferencia que forma el borde del transportador (aquí se ha elegido cualquiera de las dos circunferencias concéntricas trazadas en color morado). Luego, sobre la recta BB' se mide el otro lado dado (menor) que corresponde al segmento $AB = c = 3.5$ cm. Uniendo los extremos A y C se forma el tercer lado b completando así el triángulo ABC.*



Este transportador primitivo está dividido cada 10˚, las líneas en naranja señalan los ángulos múltiplos de 45˚.

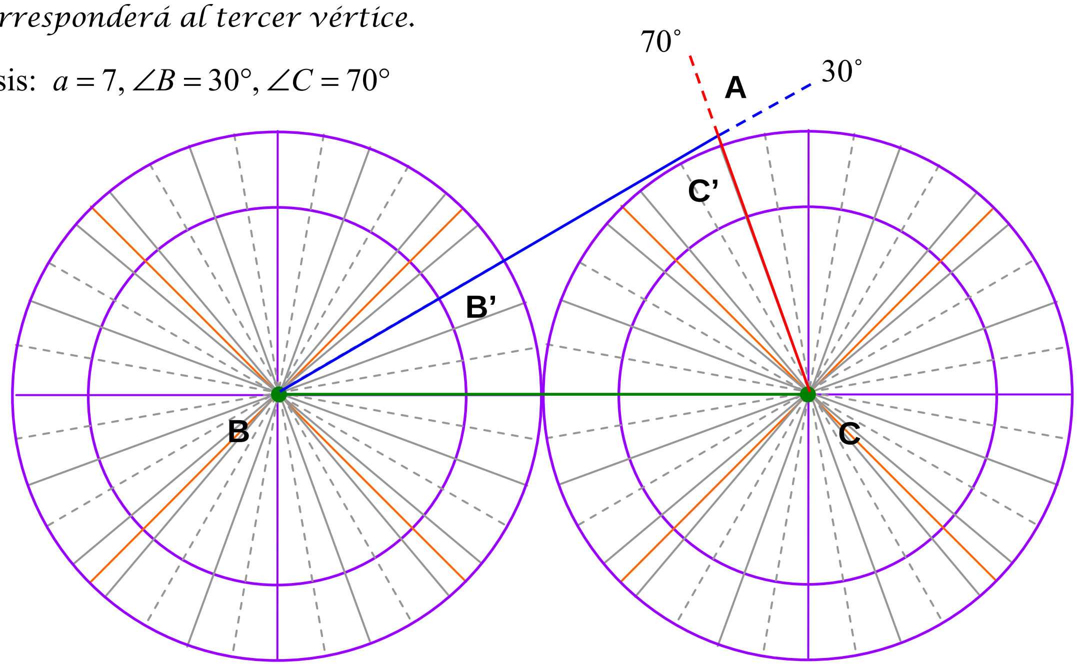


Triángulos y generalidades

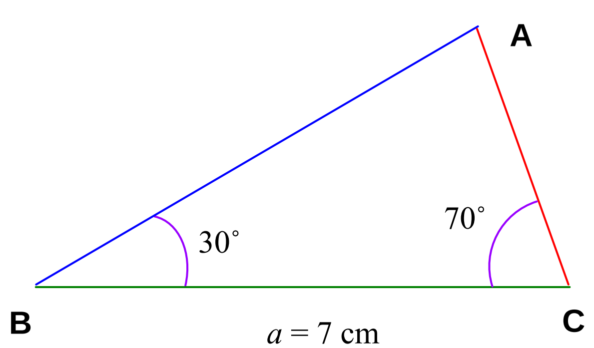
Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

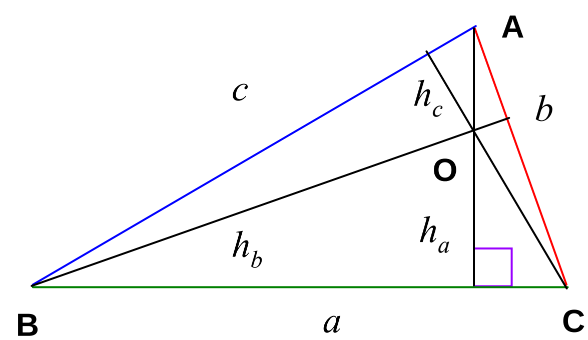
(5) Construir un triángulo que tenga un lado que mida 7 cm y los dos ángulos adyacentes midan 30˚ y 70˚. Trazar las tres alturas y señalar el ortocentro. *Sobre el lado dado correspondiente al segmento* $BC = a = 7$ cm, *se coloca el origen del transportador primero en B para marcar el ángulo de* 30˚ *con el punto B' y luego en C para marcar el ángulo de* 70˚ *con el punto C'. Después se trazan las rectas BB' y CC' las cuales, al prolongarlas se cortan en el punto A que corresponderá al tercer vértice.*

Hipótesis: $a = 7, \angle B = 30°, \angle C = 70°$



Uniendo los extremos, AB y AC forman los lados faltantes, respectivamente iguales a b y c, formando así el triángulo requerido ABC que se muestra abajo a la izquierda. Las alturas corresponden a las perpendiculares trazadas de cada vértice A, B y C al lado opuesto respectivo a, b y c (ver Definición, pág. 57) y concurren en el punto O que es el ortocentro. Para trazar una altura debe usarse la construcción auxiliar siguiente: por un punto exterior (vértice) a un segmento dado bajar una perpendicular del punto al segmento. O bien, emplear una escuadra alineando el ángulo recto al segmento en cuestión.





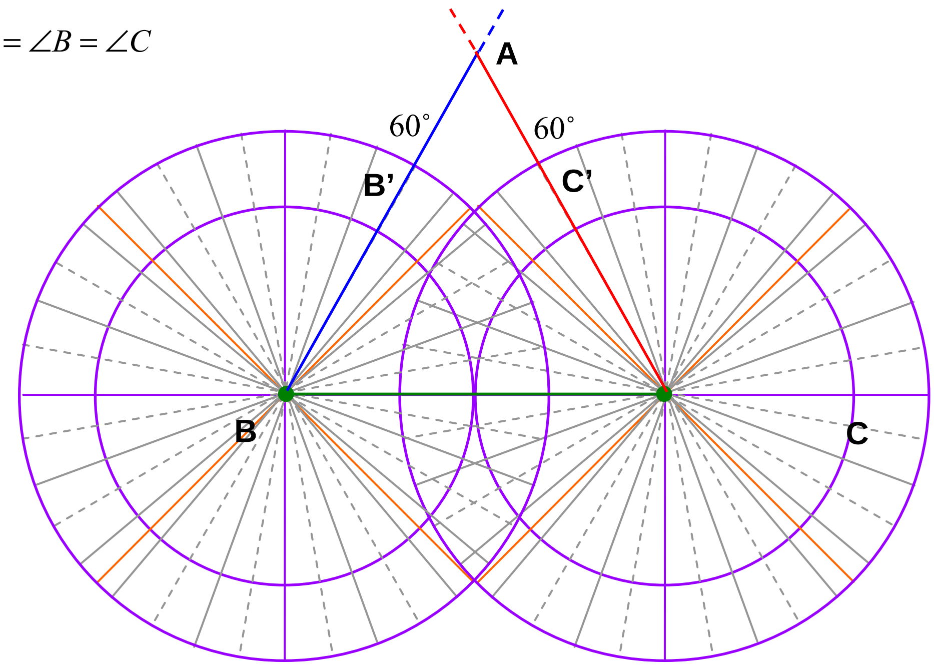
Triángulos y generalidades

Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

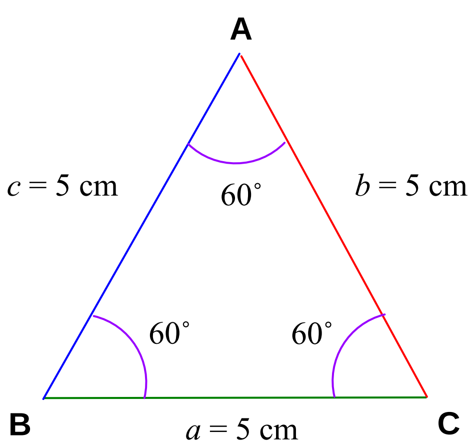
(7) Construir un triángulo equilátero de 5 cm de lado. Trazar las mediatrices y señalar el circuncentro. *Sobre la base (cualquier lado, ya que por hipótesis se trata de un triángulo equilátero) se coloca el origen del transportador primero en B para marcar el ángulo de* 60˚ *con el punto B' y luego en C para marcar el mismo ángulo* (60˚) *con el punto C'. Después, se trazan las rectas BB' y CC' las cuales al prolongarlas se cortan en el vértice A.*

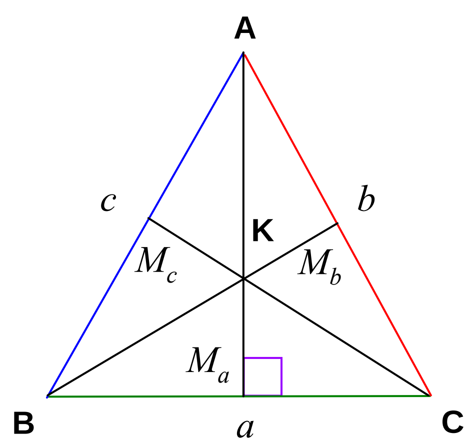
Hipótesis: $a = b = c$ y $\angle A = \angle B = \angle C$

Nota: puede resolverse este problema usando la construcción hecha en el Problema (1) *y en tal caso solo se necesita el compás y no el transportador. Las circunferencias colocadas en B y C se dibujan cada una con un radio de* 5 cm.



Uniendo los puntos extremos se forman los lados faltantes AB = c y AC = b, formando así el triángulo equilátero requerido ABC que se muestra abajo a la izquierda. Las mediatrices corresponden a las perpendiculares trazadas en el punto medio de cada lado a, b y c (ver Definición, pág. 57) y concurren en el punto K que es el circuncentro. El trazo de estas perpendiculares emplea la construcción geométrica 2) *del Art. 57 (pág. 38).*

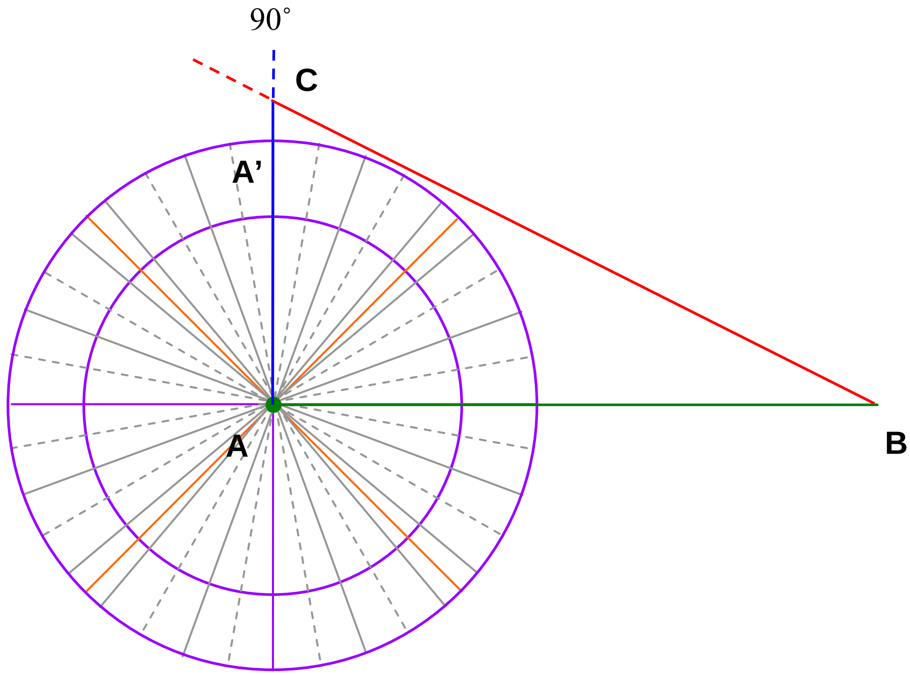




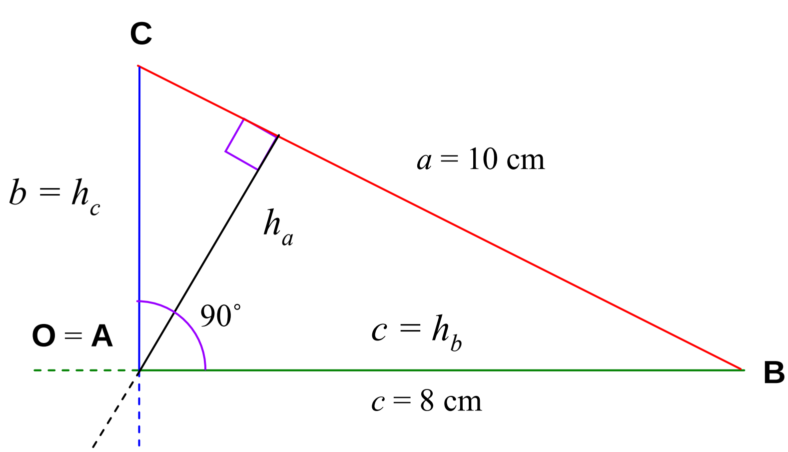
Triángulos y generalidades

Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

(9) Construir un triángulo rectángulo que tenga un cateto que mida 8 cm y cuya hipotenusa mida 10cm. Dibujar las tres alturas. *Sobre el cateto dado se coloca el origen del transportador en A para marcar el ángulo de 90° con el punto A'. Se prolonga la recta AA' hacia arriba y del extremo B se traza a un punto C sobre AA', la hipotenusa con la longitud dada.*



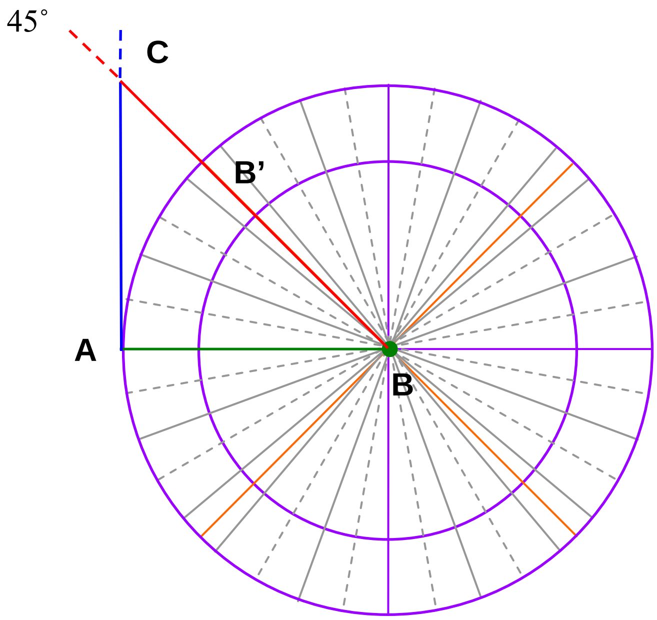
Uniendo los puntos A y C se forma el otro cateto AC = b, formando así el triángulo rectángulo requerido ABC que se muestra abajo. En este caso, las alturas h_c y h_b son iguales respectivamente a los catetos b y c y la única perpendicular que se traza es la que va del vértice A (ángulo recto) a la hipotenusa (lado a es opuesto). El ortocentro es O = A.

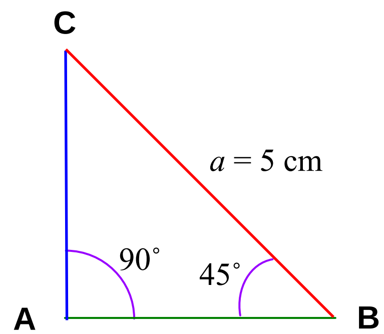


Triángulos y generalidades

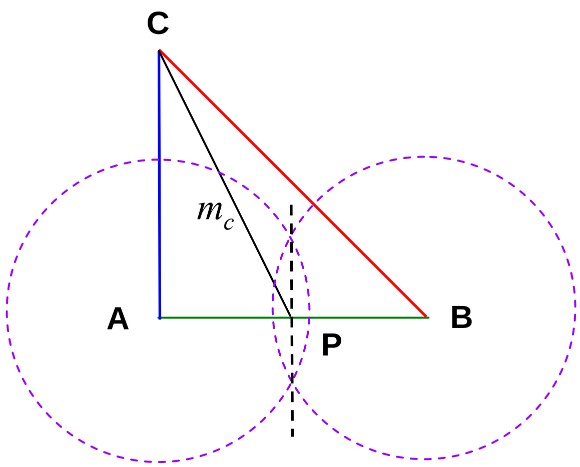
Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

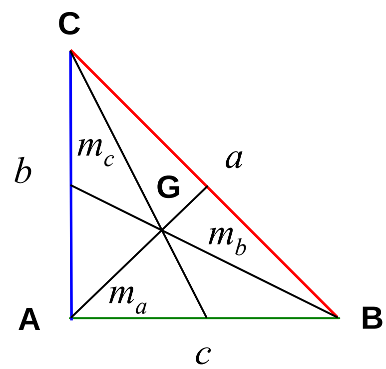
(11) Construir un triángulo rectángulo que tenga una hipotenusa que mida 5 cm y un ángulo que mida 45˚. Dibujar las tres medianas. *Sobre el cateto horizontal (sin longitud dada) se coloca el origen del transportador en B para marcar el ángulo de 45˚ con el punto B'. Se prolonga el segmento BB' (hipotenusa) hasta que mida 5 cm y de su extremo C se baja la perpendicular CA (cateto vertical) al cateto AB sobre el cual se colocó el transportador.*





Uniendo los puntos A y B se forma el cateto horizontal AB = c, formando así el triángulo rectángulo requerido ABC que se muestra arriba a la derecha. Las medianas son los segmentos que van de cada vértice al punto medio del lado opuesto (ver definición, pág. 56) donde el punto medio P (para el cual, p. ej., AP = PB) puede determinarse por la construcción geométrica 1) del Art. 57 (pág. 38). El punto G de concurrencia es el baricentro.





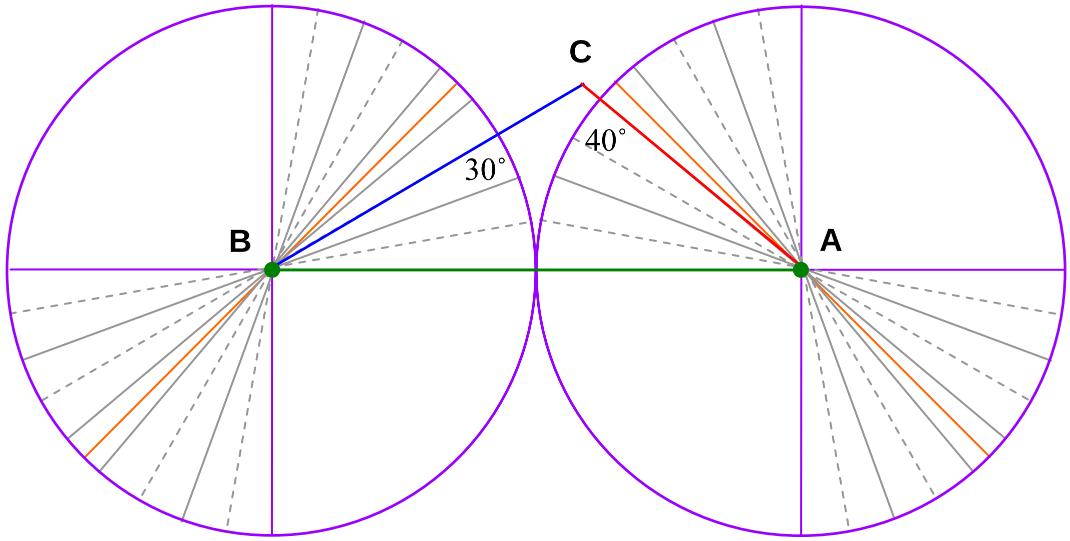
Triángulos y generalidades

Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

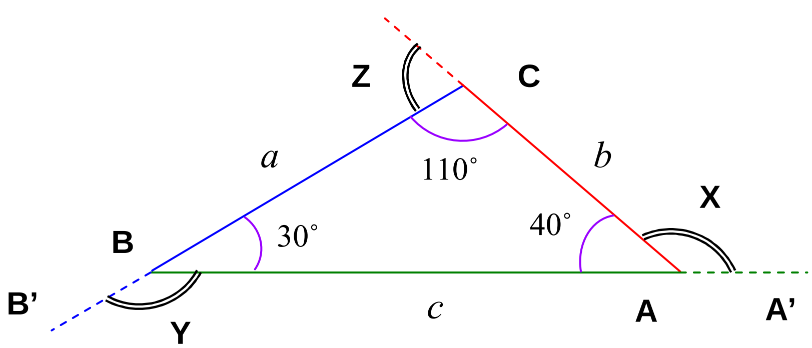
(13) Dos ángulos de un triángulo miden 40˚ y 30˚ respectivamente. ¿Cuánto mide el tercer ángulo y cada uno de los ángulos exteriores? *Según el Teorema 18 (pág. 58), la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo vale dos ángulos rectos, es decir, si A, B y C son los ángulos del triángulo, entonces* $\angle A + \angle B + \angle C = 2R$. *Por hipótesis,*

$$\angle A = 40° \text{ y } \angle B = 30°, \text{ de donde } \angle C = 2R - (\angle A + \angle B) = 180° - 70° = 110°$$

Como 110˚ > *R, el tercer ángulo C es obtuso y se trata de un triángulo obtusángulo. La construcción del triángulo ABC se muestra a continuación.*



Los ángulos exteriores son los que se forman por uno de los lados del triángulo y la prolongación de otro (ver Definición Art. 84, pág 58). Por ejemplo, el ángulo exterior X se forma con el lado AC = b y la prolongación A'B del lado AB = c. Como X, Y, Z son ángulos adyacentes a los respectivos ángulos interiores A, B, C del triángulo, se obtiene inmediatamente que:



$$\angle X = 2R - \angle A = 180° - 40° = 140°$$
$$\angle Y = 2R - \angle B = 180° - 30° = 150°$$
$$\angle Z = 2R - \angle C = 180° - 110° = 70°$$

y se comprueba que

$$\angle X + \angle Y + \angle Z = 360° = 4R .$$

Triángulos y generalidades

Capítulo 5. Ejercicios Resueltos (pp. 62 – 63)

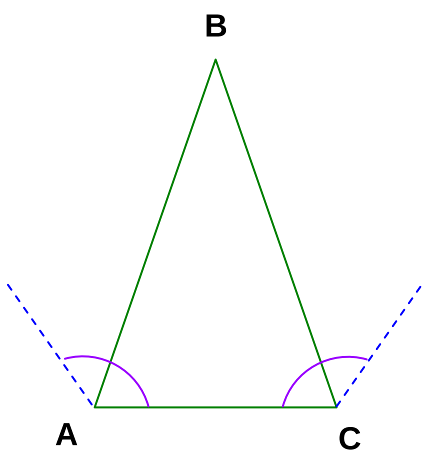
(15) ¿Puede ser obtuso el ángulo en la base de un triángulo isósceles? *Razonamos por el método de reducción al absurdo. Así, supóngase que el ángulo A de la base en un triángulo isósceles es un ángulo obtuso, por tanto, A es mayor a un ángulo recto. Por hipótesis, tratándose de un triángulo isósceles, el otro ángulo C de la base es igual con A, de modo que (ver esquema abajo a la izquierda)*

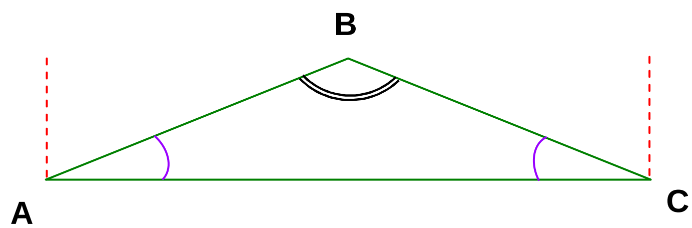
$$\angle A + \angle C > R + R = 2R \text{ de donde } \angle A + \angle B + \angle C > 2R + \angle B > 2R,$$

desigualdad que contradice al Teorema 18 que establece que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo, en particular de un triángulo isósceles, es igual a un ángulo llano. Consecuentemente, lo que se supuso como verdadero es falso y el ángulo en la base de un triángulo isósceles no puede ser obtuso (ni A ni C). No obstante, el ángulo opuesto a la base sí puede ser obtuso ya que si el ángulo $B > R$ (mayor a un recto), entonces

$$\angle A + \angle C = 2R - \angle B < R$$

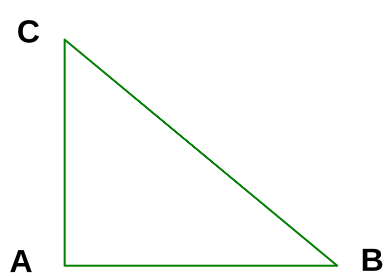
$$\text{y } \angle A = \angle C < \frac{R}{2}$$



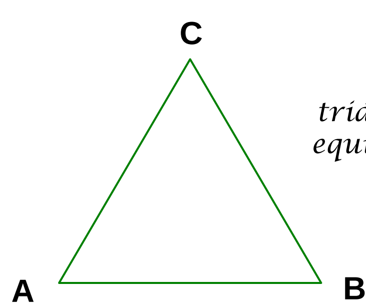


(17) ¿Puede ser equilátero un triángulo rectángulo? *Por construcción geométrica, todos los ángulos de un triángulo equilátero ABC son iguales y como suman dos ángulos rectos (Teorema 18) se deduce que cada uno vale 60°. Como un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto igual a 90° (ver Definición, pág. 56), resulta claro que este ángulo no es igual a ningún ángulo de un triángulo equilátero (ver criterio de igualdad de triángulos en pág. 60). Por lo tanto, un triángulo rectángulo no puede ser equilátero.*

triángulo rectángulo



$\angle A = 90^\circ ; \angle B + \angle C = 90^\circ$



triángulo equilátero

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$