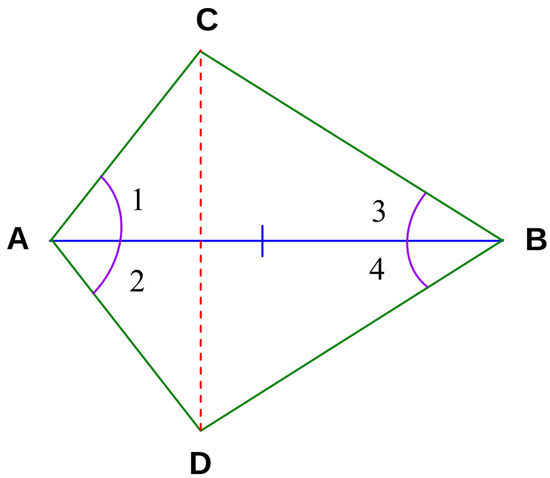
Casos de igualdad de triángulos

Capítulo 6. Ejercicios Resueltos (pp. 70 – 72)

(1) Si $< 1 = < 2$ y $< 3 = < 4$, demostrar que $\Delta\, ABC = \Delta\, ABD$.



Como los triángulos ABC y ABD tienen como base el lado común AB y los ángulos adyacentes a la base 1, 3 y 2, 4 son por hipótesis, iguales respectivamente, se sigue por el Teorema 21 (pág. 64) que ambos triángulos son iguales. De forma equivalente, puede emplearse el postulado del movimiento y rotar (fuera del plano de la hoja) el triángulo ABC respecto de la base AB (eje de rotación) para hacer coincidir el vértice C con el vértice D del triángulo ABD. Y dado que

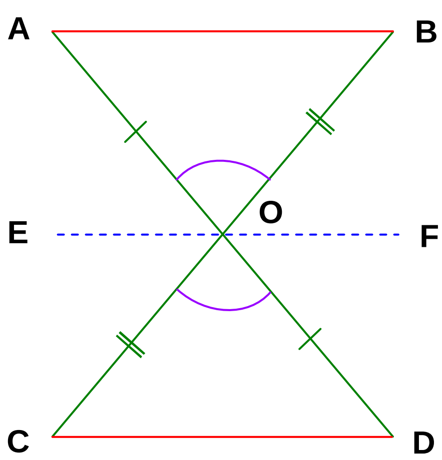
$$\angle 1 = \angle 2 \text{ entonces } \overline{AC} = \overline{AD},$$

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ entonces } \overline{BC} = \overline{BD}.$$

(3) Si $AC = AD$ y $BC = BD$, demostrar que $\Delta\, ABC = \Delta\, ABD$. *Por hipótesis ambos triángulos tienen dos lados iguales, además tienen como lado común e igual el segmento base AB por lo que se cumplen las condiciones del Caso 3 y según el Teorema 23 (pág. 66) ambos triángulos tienen entonces los tres lados iguales, es decir,*

$$\overline{AC} = \overline{AD},\ \ \overline{BC} = \overline{BD} \ \text{ y } \ \overline{AB} = \overline{AB} \ \text{(base común)} \ \therefore\ \Delta ABC = \Delta ABD.$$

(5) Si O es el punto medio de los segmentos AD y BC, demostrar que $\Delta\, AOB = \Delta\, COD$.



Por hipótesis, al ser O el punto medio de los segmentos AD y BC se tiene que

$$\overline{AO} = \overline{DO} \ \text{ y } \ \overline{BO} = \overline{CO}.$$

Por otra parte, el ángulo interior O en ambos triángulos es el mismo por ser opuestos por el vértice común, denotado por la misma letra. Así, se cumplen las condiciones correspondientes al Caso 2 y según el Teorema 22 (pág. 65) ambos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales, por tanto

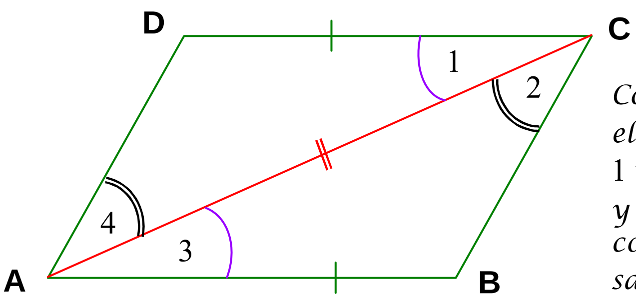
$$\Delta\, AOB = \Delta\, COD.$$

Como construcción auxiliar, Obsérvese que el triángulo AOB puede girarse, respecto al punto O, fuera del plano sobre la paralela EF a AB para hacerlo coincidir con el triángulo COD (postulado del movimiento) y así mostrar la igualdad de las bases AB y CD.

Casos de igualdad de triángulos

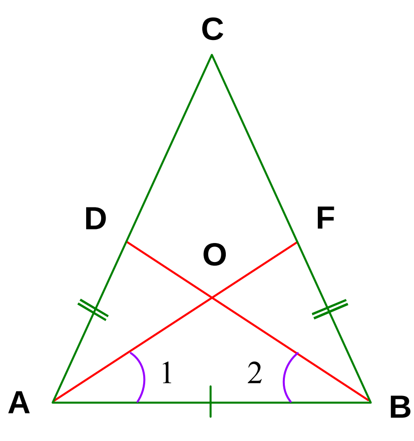
Capítulo 6. Ejercicios Resueltos (pp. 70 – 72)

(7) Si $CD = AB$ y $<1 = <3$, demostrar que $\Delta ACD = \Delta ACB$ y que $BC = AD$.



Como los triángulos ACD y ACB tienen como base el lado común AC, el lado CD = AB y los ángulos 1 y 3 comprendidos, respectivamente entre AC, CD y AC, AB son iguales, por hipótesis, resulta que las condiciones del Caso 2, Teorema 22 (pág. 65) se satisfacen. Por lo tanto, $\Delta ACD = \Delta ACB$.

(9) El ΔABC es isósceles; D y F son los puntos medios de los lados AC y BC respectivamente. Demostrar que $AF = BD$ y que $< 1 = < 2$.



Por hipótesis, al ser isósceles el triángulo ABC, $AC = BC$ *y* $< A = < B$ *(ver Corolario, pág. 66). Por otra parte, siendo D y F los puntos medios respectivos de los lados AC y BC se tiene que*

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 2\overline{AD} \\ \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC} = 2\overline{BF} \end{array}\right\} \text{ entonces } \overline{AD} = \overline{BF} .$$

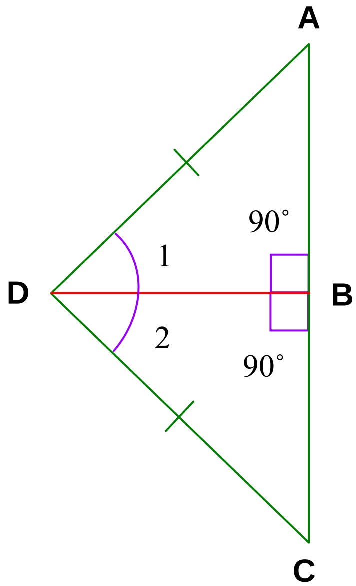
y siendo la base AB un lado común a los triángulos ABD y ABF resulta que estos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales. Se sigue por el Caso 2, Teorema 22 (pág. 65) que $\Delta ABD = \Delta ABF$.

Al ser iguales los triángulos ABD y ABF los lados que se oponen, respectivamente a los ángulos A y B son iguales. Así, el lado BD se opone al ángulo A y el lado AF se opone al ángulo B, consecuentemente AF = BD (lados homólogos). De manera análoga, ya que $\Delta ABD = \Delta ABF$ *y AD = BF los ángulos que se oponen a estos lados también son iguales. Es decir, como* < 1 *se opone al lado BF y el* < 2 *se opone al lado AD se sigue que* $< 1 = < 2$ *(ángulos homólogos).*

Casos de igualdad de triángulos

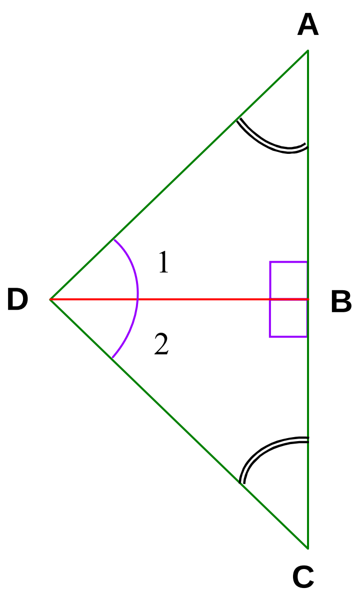
Capítulo 6. Ejercicios Resueltos (pp. 70 – 72)

(11) Si el lado BD es perpendicular al segmento AC, $<1=<2$ y $AD=CD$, demostrar que los triángulos ABD y CBD son iguales.



Por hipótesis, siendo BD perpendicular al segmento AC entonces BD es perpendicular a los lados AB y BC pues son segmentos colineales. De este modo, los triángulos ABD y CBD son triángulos rectángulos, donde $<B=R$, *y como también* $<1=<2$ *(ángulos agudos) y las hipotenusas respectivas AD y CD son iguales, se cumplen las condiciones del Caso 1 para triángulos rectángulos (Art. 92, pág. 67). Entonces,* $\Delta\, ABD=\Delta\, CBD$.

(13) Si el lado BD es perpendicular al segmento AC y $<1=<2$, demostrar que los triángulos ABD y CBD son iguales, que $AD=CD$ y que $<A=<C$.



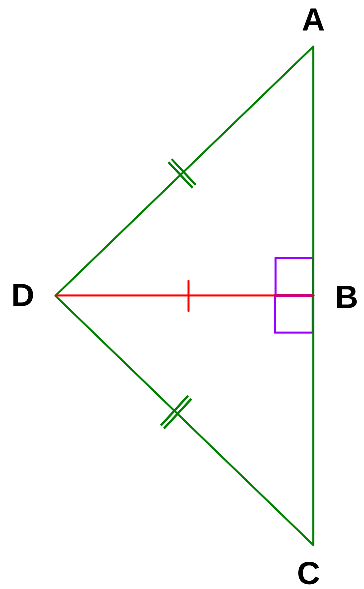
Por hipótesis, siendo BD perpendicular al segmento AC entonces BD es perpendicular a los lados AB y BC pues son segmentos colineales. De este modo, los triángulos ABD y CBD son triángulos rectángulos, donde $<B=R$, *que comparten el cateto BD. Además, los ángulos adyacentes (agudos) son iguales, es decir,* $<1=<2$ *por hipótesis. De esta manera, se cumplen las condiciones del Caso 2 a) para triángulos rectángulos (Art. 92, pág. 68). Entonces,* $\Delta\, ABD=\Delta\, CBD$ *. Por ser estos triángulos iguales, los lados que se oponen al ángulo recto son también iguales. Como AD se opone al* $<B$ *en el* $\Delta\, ABD$ *y CD se opone al* $<B$ *en el* $\Delta\, CBD$, *resulta que* $AD=CD$. *Finalmente,*

$$\left.\begin{array}{ll}\text{en } \Delta ABD, & \angle 1+\angle A=R \\ \text{en } \Delta CBD, & \angle 2+\angle C=R\end{array}\right\} \text{ de donde } \angle A=\angle C .$$

Casos de igualdad de triángulos

Capítulo 6. Ejercicios Resueltos (pp. 70 – 72)

(15) Si el lado BD es perpendicular al segmento AC y $AD = CD$, demostrar que $AB = BC$.



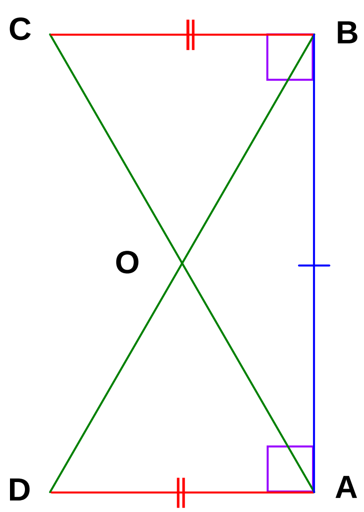
Por hipótesis, siendo BD perpendicular al segmento AC entonces BD es perpendicular a los lados AB y BC pues son segmentos colineales. De este modo, los triángulos ABD y CBD son triángulos rectángulos, donde < B = R, que comparten el cateto BD.

Adicionalmente, las hipotenusas respectivas se suponen también iguales, es decir, AD = CD. De este modo, se cumplen las condiciones del Caso 4 para triángulos rectángulos (Art. 92, pág. 69). Entonces, $\Delta\, ABD = \Delta\, CBD$.

Ya que estos triángulos son iguales, por el criterio de igualdad de triángulos (Art. 87, pág. 60), sus tres lados son iguales. Consecuentemente, AB = BC. Recuérdese que este caso está relacionado al Teorema de Pitágoras. Así,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 \text{ de donde } \overline{AB} = \overline{BC}.$$

(17) Si el lado DA es perpendicular al lado AB, el lado CB es perpendicular al lado AB y $AD = BC$, demostrar que $\Delta\, ABD = \Delta\, ABC$.

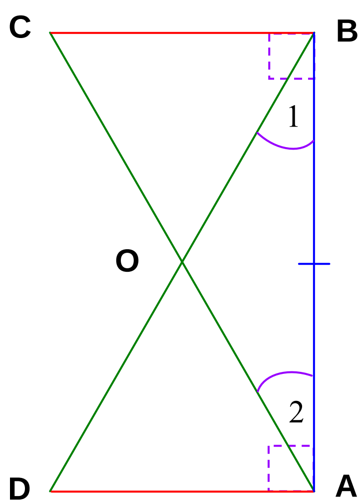


Por las relaciones de perpendicularidad supuestas, $\overline{DA} \perp \overline{AB}$ y $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ *se sigue que los triángulos ABD y ABC son triángulos rectángulos que comparten el lado AB como cateto común. Como, por hipótesis, los catetos opuestos AD y BC, respectivamente a los ángulos B y A también son iguales, se satisfacen las condiciones correspondientes al Caso 3 para triángulos rectángulos (Art. 92, pág. 68-69). Entonces,* $\Delta\, ABD = \Delta\, ABC$.

Casos de igualdad de triángulos

Capítulo 6. Ejercicios Resueltos (pp. 70 – 72)

(19) Si el lado DA es perpendicular al lado AB, el lado CB es perpendicular al lado AB y $<1 = <2$, demostrar que $\Delta\, ABD = \Delta\, ABC$.



Por las relaciones de perpendicularidad supuestas, $\overline{DA} \perp \overline{AB}$ y $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ se sigue que los triángulos ABD y ABC son triángulos rectángulos que comparten el lado AB como cateto común. Como, por hipótesis, los ángulos adyacentes al cateto AB son iguales, es decir, $<1 = <2$, se cumplen las condiciones correspondientes al Caso 2 a) para triángulos rectángulos (Art. 92, pág. 68). Entonces, $\Delta\, ABD = \Delta\, ABC$.

Obsérvese que el <1 y el ángulo recto A son adyacentes sobre AB para el triángulo ABD. Similarmente, el <2 y el ángulo recto B son adyacentes sobre AB para el triángulo ABC.