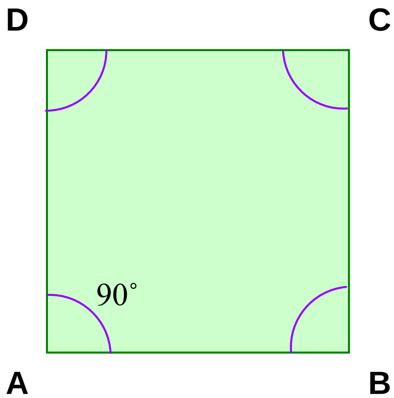
Polígonos

Capítulo 7. Ejercicios Resueltos (pp. 79 – 80)

(1) Hallar la suma de los ángulos interiores de un cuadrado.



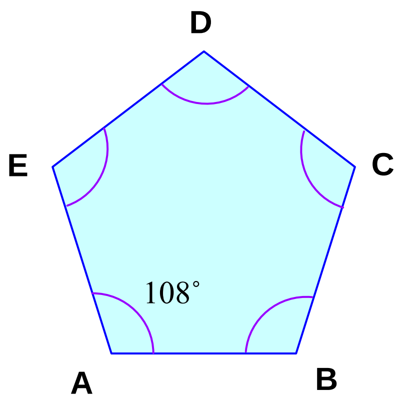
Por ser un cuadrado un polígono regular de cuatro lados (iguales) y en consecuencia un tipo de cuadrilátero puede aplicarse la fórmula dada en el Teorema 24 (pág. 75) empleando $n = 4$*. Realizando la susbtitución, se obtiene:*

$$S_i = 2R(n-2) = 2R(4-2) = 4R = 360°,$$

lo que puede comprobarse de la figura adjunta, ya que

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4(90°) = 360°.$$

(3) Hallar la suma de los ángulos interiores de un pentágono.



Por ser un pentágono un polígono de cinco lados puede aplicarse la fórmula dada en el Teorema 24 (pág. 75) empleando $n = 5$*. Realizando la susbtitución, se obtiene:*

$$S_i = 2R(n-2) = 2R(5-2) = 6R = 540°.$$

En el pentágono regular de la figura adjunta, cada ángulo vale $108˚$*, y se verifica que*

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 5(108°) = 540°.$$

(5) ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 1260˚? *De acuerdo al Teorema 24 (pág. 75) se sabe que* $S_i = 1260˚ = 2R\,(n - 2)$*, ecuación de la cual puede despejarse el valor de n, es decir,*

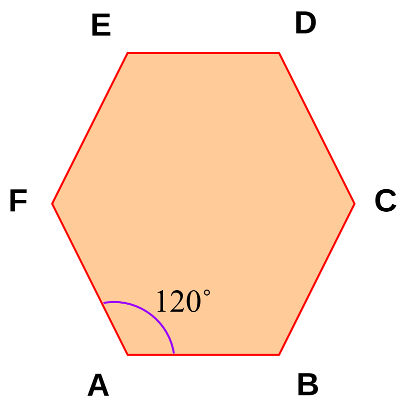
$$\text{como } S_i = 2R(n-2) = 1260° \text{ entonces } n = \frac{1260°}{2R} + 2 = \frac{1260°}{180°} + 2 = 7 + 2 = 9.$$

En consecuencia, al ser $n = 9$*, se trata de un polígono de nueve lados llamado eneágono.*

Polígonos

Capítulo 7. Ejercicios Resueltos (pp. 79 – 80)

(7) Hallar el valor del ángulo interior de un hexágono regular.



Por ser un hexágono regular un polígono con seis lados y ángulos iguales puede aplicarse la fórmula dada en el Art. 97 (pág. 76) empleando $n = 6$. *Substituyendo este valor, nos dá lo siguiente:*

$$\angle i = \frac{S_i}{n} = \frac{2R(n-2)}{n} = \frac{2R(6-2)}{6} = \frac{4R}{3} = \frac{360°}{3} = 120° .$$

Siendo este resultado el valor del ángulo interior para un hexágono regular, se observa en la figura adjunta que

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 120° .$$

(9) Hallar el valor de un ángulo interior de un decágono regular. *Por ser un decágono regular un polígono con diez lados y ángulos iguales puede aplicarse la fórmula dada en el Art. 97 (pág. 76) empleando* $n = 10$. *Substituyendo este valor, nos dá lo siguiente:*

$$\angle i = \frac{S_i}{n} = \frac{2R(n-2)}{n} = \frac{2R(10-2)}{10} = \frac{8R}{5} = \frac{720°}{5} = 144° .$$

Siendo este resultado el valor del ángulo interior para un decágono regular, se sigue que los diez ángulos, $\angle A, \angle B, \ldots, \angle I, \angle J$ *tienen este mismo valor.*

(11) Determinar cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior vale 90˚. *Considerando que la fórmula dada en el Art. 97 (pág. 75) se aplica a polígonos regulares y al suponer como hipótesis que el ángulo interior vale* 90˚, *entonces*

como $\angle i = \dfrac{2R(n-2)}{n} = 90°$ se obtiene $2R(n-2) = 2Rn - 4R = 90°n$; equivalentemente

$180°n - 90°n = 4R = 360°,$ de donde $n = \dfrac{360°}{90°} = 4$ y se trata de un cuadrado.

(13) Hallar la suma de los ángulos exteriores de un eptágono. *Siendo un eptágono un polígono convexo de siete lados, se le puede aplicar el Teorema 25 (pág. 76), el cual establece que la suma de los ángulos exteriores de un polígono de n lados siempre es igual a* $4R$. *Así, en particular, la suma de los ángulos exteriores de un eptágono es igual a* 360˚.

Polígonos

Capítulo 7. Ejercicios Resueltos (pp. 79 – 80)

(15) Hallar el valor del ángulo exterior de un decágono regular. *Por ser un decágono regular un polígono con diez lados y ángulos iguales puede aplicarse la fórmula dada en el Art. 99 (pág. 77) empleando* $n = 10$. *Substituyendo este valor, nos dá lo siguiente:*

$$\angle e = \frac{S_e}{n} = \frac{4R}{n} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ .$$

Siendo este resultado el valor del ángulo exterior para un decágono regular, se sigue que los diez ángulos, $\angle 1, \angle 2, \ldots, \angle 9, \angle 10$ *tienen este mismo valor.*

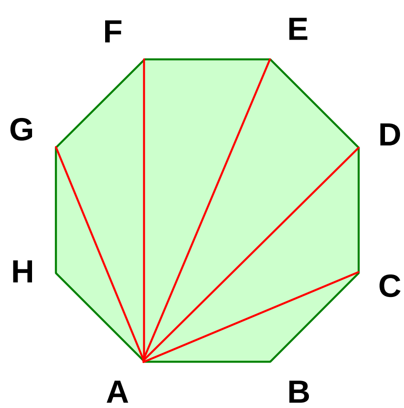
(17) ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior vale 120˚? *Considerando que la fórmula dada en el Art. 99 (pág. 77) se aplica a polígonos regulares y al suponer como hipótesis que el ángulo exterior vale* 120˚, *entonces*

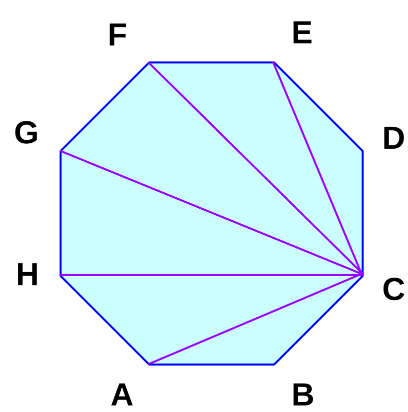
$$\angle e = \frac{4R}{n} = 120^\circ \text{ de donde } 4R = 120^\circ n \text{ y } n = \frac{360^\circ}{120^\circ} = 3 \quad \therefore \text{ es un triángulo equilátero.}$$

(19) Determinar cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior vale 90˚? *Considerando que la fórmula dada en el Art. 99 (pág. 77) se aplica a polígonos regulares y al suponer como hipótesis que el ángulo exterior vale* 90˚, *entonces*

$$\angle e = \frac{4R}{n} = 90^\circ \text{ de donde } 4R = 90^\circ n \text{ y } n = \frac{360^\circ}{90^\circ} = 4 \quad \therefore \text{ es un cuadrado.}$$

(21) Calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un octágono. *Siendo un octágono un polígono de ocho lados, se le puede aplicar el Teorema 26 (pág. 77), que dá el número de diagonales que pueden trazarse desde cualquier vértice, considerando que* $n = 8$. *Así,* $d = n - 3 = 8 - 3 = 5$, *lo cual puede apreciarse en la figura adjunta, por ejemplo para los vértices A y C. Recordar que en el vértice mismo y en los* 2 *vértices contiguos no pueden trazarse diagonales.*



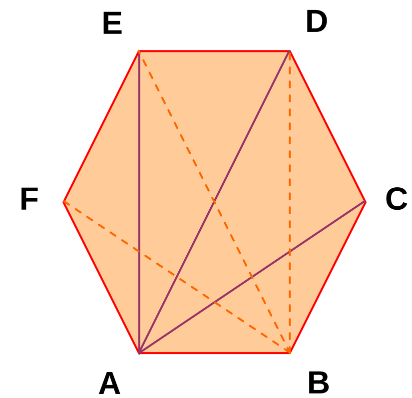


Polígonos

Capítulo 7. Ejercicios Resueltos (pp. 79 – 80)

(23) ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar tres diagonales desde un vértice?

Como el Teorema 26 (pág. 77), dá el número de diagonales que pueden trazarse desde cualquier vértice en un polígono de n lados, y en este caso, $d = 3 = n - 3$, se sigue inmediatamente que $n = 3 + 3 = 6$, por lo cual se trata de un hexágono. Como se comprueba en la figura adjunta, por ejemplo, 3 diagonales pueden trazarse desde los vértices A y B, respectivamente. Obsérvese que el resultado se refiere a hexágonos regulares o irregulares.



(25) ¿Cuál es el polígono en el cual se pueden trazar nueve diagonales? *Como el Teorema 26 (pág. 77), dá el número de diagonales que pueden trazarse desde cualquier vértice en un polígono de n lados, y por hipótesis, $d = 9 = n - 3$, se sigue claramente que $n = 9 + 3 = 12$, por lo cual se trata de un dodecágono.*

(27) Calcular el número total de diagonales que se pueden trazar en un decágono? *Por ser un decágono un polígono de diez lados, puede aplicarse el Teorema 27 (pág. 77), con $n = 10$, para determinar el número total de diagonales que pueden trazarse en el decágono dado. Consecuentemente,*

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{10(10-3)}{2} = \frac{10(7)}{2} = 35\,.$$

(29) ¿Cuál es el polígono en el cual se pueden trazar 14 diagonales en total? *Para este problema, la hipótesis consiste en que el número total de diagonales de un polígono está dado y es igual a 14. Del Teorema 27 (pág. 77), se sabe que el número total de diagonales que pueden trazarse en un polígono de n lados está dado por*

$$D = 14 = \frac{n(n-3)}{2} \quad \text{entonces} \quad n(n-3) = 2(14) = 7(4) \quad \text{de donde} \quad n = 7 \quad \text{y} \quad n - 3 = 4$$

$\therefore \quad n = 7$ (ambas ecuaciones dan lo mismo) y se trata de un eptágono.