

## Segmentos proporcionales

### Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Hallar las razones directas e inversas de los segmentos  $a$  y  $b$ , sabiendo que:

- (1)  $a = 18 \text{ m}$ ,  $b = 24 \text{ m}$       (3)  $a = 25 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$       (5)  $a = 2.5 \text{ dm}$ ,  $b = 50 \text{ cm}$   
 (7)  $a = 5 \text{ Hm}$ ,  $b = 3 \text{ Dm}$       (9)  $a = 6 \text{ mm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$

La razón directa es el cociente  $r = a/b$  mientras que la razón inversa o recíproca es el cociente  $b/a = (a/b)^{-1} = r^{-1}$ . De este modo se obtienen los siguientes valores numéricos:

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} \quad r = \frac{a}{b} = \frac{18 \text{ m}}{24 \text{ m}} = \frac{3(6)}{4(6)} = \frac{3}{4} = 0.75 & \text{y } r^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \\ \text{(3)} \quad r = \frac{a}{b} = \frac{25 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{25}{5} = 5 & \text{y } r^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0.2 \\ \text{(5)} \quad r = \frac{a}{b} = \frac{2.5 \text{ dm}}{50 \text{ cm}} = \frac{25 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = \frac{1}{2} = 0.5 & \text{y } r^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{2}{1} = 2 \\ \text{(7)} \quad r = \frac{a}{b} = \frac{5 \text{ Hm}}{3 \text{ Dm}} = \frac{500 \text{ m}}{30 \text{ m}} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} & \text{y } r^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{3}{50} \\ \text{(9)} \quad r = \frac{a}{b} = \frac{6 \text{ mm}}{3 \text{ cm}} = \frac{6 \text{ mm}}{30 \text{ mm}} = \frac{1}{5} = 0.2 & \text{y } r^{-1} = \frac{b}{a} = \frac{5}{1} = 5 \end{array}$$

Hallar los dos segmentos sabiendo su suma ( $S$ ) y su razón ( $r$ ).

- (11)  $S = 6$ ,  $r = 1/2$       (13)  $S = 12$ ,  $r = 1/2$       (15)  $S = 40$ ,  $r = 3/5$

Algebraicamente,  $S = a + b$  mientras que  $r = a/b$ ; consecuentemente,  $b = a/r$  de modo que  $S = a + a/r = a(1 + 1/r)$ . Entonces,  $a = S / (1 + r^{-1})$  por lo que se obtienen estos valores:

$$\begin{array}{ll} \text{(11)} \quad a = \frac{S}{1+r^{-1}} = \frac{6}{1+2} = \frac{6}{3} = 2 & \text{y } b = \frac{a}{r} = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 4 \\ \text{(13)} \quad a = \frac{S}{1+r^{-1}} = \frac{12}{1+2} = \frac{12}{3} = 4 & \text{y } b = \frac{a}{r} = \frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 8 \\ \text{(15)} \quad a = \frac{S}{1+r^{-1}} = \frac{40}{1+\frac{5}{3}} = \frac{40}{\frac{8}{3}} = \frac{120}{8} = 15 & \text{y } b = \frac{a}{r} = \frac{15}{\left(\frac{3}{5}\right)} = 25 \end{array}$$

Alternativamente, como  $S = a + b$  mientras que  $r = a/b$ ; entonces, si  $a = br$ ,  $S = br + b = b(1 + r)$  de donde  $b = S / (1 + r)$  y claramente se obtienen los mismos valores.

## Segmentos proporcionales

### Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Hallar los dos segmentos sabiendo su diferencia ( $D$ ) y su razón ( $r$ ).

(17)  $D = 24, r = 5$

(19)  $D = 7, r = 2$

Algebraicamente,  $D = a - b$  mientras que  $r = a/b$ ; consecuentemente,  $b = a/r$  de modo que  $D = a - a/r = a(1 - 1/r)$ . Entonces,  $a = D / (1 - r^{-1})$  por lo que se obtienen estos valores:

$$(17) \quad a = \frac{D}{1 - r^{-1}} = \frac{24}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{24}{\frac{4}{5}} = 30 \quad \text{y} \quad b = \frac{a}{r} = \frac{30}{5} = 6$$
$$(19) \quad a = \frac{D}{1 - r^{-1}} = \frac{7}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{\frac{1}{2}} = 14 \quad \text{y} \quad b = \frac{a}{r} = \frac{14}{2} = 7$$

Alternativamente, como  $D = a - b$  mientras que  $r = a/b$ ; entonces, si  $a = br$ ,  $D = br - b = b(1 - r)$  de donde  $b = D / (1 - r)$  y claramente se obtienen los mismos valores.

Hallar la cuarta proporcional a los números  $a, b$  y  $c$ .

(21)  $a = 2, b = 4, c = 8$

(23)  $a = 4, b = 8, c = 10$

(25)  $a = 6, b = 12, c = 3$

(21)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$  entonces  $x = c \frac{b}{a} = 8 \frac{4}{2} = 16$

(23)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$  entonces  $x = c \frac{b}{a} = 10 \frac{8}{4} = 20$

(25)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$  entonces  $x = c \frac{b}{a} = 3 \frac{12}{6} = 6$

Hallar la tercera proporcional a los números  $a$  y  $b$ .

(27)  $a = 2, b = 12$

(29)  $a = 6, b = 30$

(27)  $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$  entonces  $x = \frac{b^2}{a} = \frac{12^2}{2} = \frac{144}{2} = 72$

(29)  $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$  entonces  $x = \frac{b^2}{a} = \frac{30^2}{6} = \frac{900}{6} = 150$

## *Segmentos proporcionales*

### Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Hallar la media proporcional a los números  $a$  y  $b$ .

(31)  $a = 2, b = 4$

(33)  $a = 4, b = 8$

(35)  $a = 5, b = 10$

$$(31) \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{de donde} \quad x^2 = ab = (2)(4) \quad \therefore \quad x = \sqrt{2}\sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$(33) \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{de donde} \quad x^2 = ab = (4)(8) \quad \therefore \quad x = \sqrt{4}\sqrt{8} = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

$$(35) \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{de donde} \quad x^2 = ab = (5)(10) \quad \therefore \quad x = \sqrt{5}\sqrt{10} = \sqrt{5}(\sqrt{5}\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$$

Calcular los lados de un triángulo sabiendo su perímetro ( $P$ ) y que los lados son proporcionales a los números dados.

(37)  $P = 36$  y lados proporcionales a 3, 4, 5

(39)  $P = 75$  y lados proporcionales a 3, 5, 7

Sean  $a, b$  y  $c$  los lados del triángulo cuyo perímetro  $P$  se conoce y sean  $a', b'$  y  $c'$  los números dados. Por hipótesis, los lados del triángulo son proporcionales a los números dados, entonces empleando la propiedad de las proporciones relativa a una serie de razones iguales (ver Art. 122, pág 90) se verifica que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{P}{a'+b'+c'} = r, \quad \text{entonces} \quad a = a'r, \quad b = b'r \quad \text{y} \quad c = c'r.$$

$$(37) \quad \frac{P}{a'+b'+c'} = \frac{36}{3+4+5} = \frac{36}{12} = 3 \quad \therefore \quad \begin{cases} a = a'r = (3)(3) = 9 \\ b = b'r = (4)(3) = 12 \\ c = c'r = (5)(3) = 15 \end{cases}$$

$$(39) \quad \frac{P}{a'+b'+c'} = \frac{75}{3+5+7} = \frac{75}{15} = 5 \quad \therefore \quad \begin{cases} a = a'r = (3)(5) = 15 \\ b = b'r = (5)(5) = 25 \\ c = c'r = (7)(5) = 35 \end{cases}$$

## Segmentos proporcionales

### Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Calcular los segmentos determinados por la bisectriz sobre el lado mayor de los triángulos cuyos lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  miden:

(41)  $a = 24$ ,  $b = 32$ ,  $c = 40$

(43)  $a = 8$ ,  $b = 10$ ,  $c = 6$

(45)  $a = 7$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$

*En este ejercicio se emplea la solución al problema planteado en el Art. 133 (pág. 97), el cual se fundamenta en el Teorema 33 (misma página) en el que la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos,  $x$  e  $y$ , proporcionales a los otros dos lados. En este caso, el lado opuesto corresponderá al lado de mayor longitud.*

(41)  $c > b > a \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \frac{x+y}{x} = \frac{a+b}{a} = \frac{24+32}{24} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3} \quad \text{pero} \quad x+y=c=40$

entonces  $\frac{40}{x} = \frac{7}{3} \quad \therefore \quad x = \frac{3 \times 40}{7} = \frac{120}{7} = 17\frac{1}{7}$ , análogamente  $\frac{x+y}{y} = \frac{a+b}{b} = \frac{24+32}{32} = \frac{56}{32} = \frac{7}{4}$

de donde  $\frac{40}{y} = \frac{7}{4} \quad \therefore \quad y = \frac{4 \times 40}{7} = \frac{160}{7} = 22\frac{6}{7}$ ; comprobación:  $x+y = 17\frac{1}{7} + 22\frac{6}{7} = 40 = c$

(43)  $b > a > c \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{c}{a} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \frac{x+y}{x} = \frac{c+a}{c} = \frac{6+8}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \quad \text{pero} \quad x+y=b=10$

entonces  $\frac{10}{x} = \frac{7}{3} \quad \therefore \quad x = \frac{3 \times 10}{7} = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ , análogamente  $\frac{x+y}{y} = \frac{c+a}{a} = \frac{6+8}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

de donde  $\frac{10}{y} = \frac{7}{4} \quad \therefore \quad y = \frac{4 \times 10}{7} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$ ; comprobación:  $x+y = 4\frac{2}{7} + 5\frac{5}{7} = 10 = b$

(45)  $a > c > b \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{b}{c} = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \frac{x+y}{x} = \frac{b+c}{b} = \frac{3+5}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{pero} \quad x+y=a=7$

entonces  $\frac{7}{x} = \frac{8}{3} \quad \therefore \quad x = \frac{3 \times 7}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$ , análogamente  $\frac{x+y}{y} = \frac{b+c}{c} = \frac{3+5}{5} = \frac{8}{5}$

de donde  $\frac{7}{y} = \frac{8}{5} \quad \therefore \quad y = \frac{5 \times 7}{8} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$ ; comprobación:  $x+y = 2\frac{5}{8} + 4\frac{3}{8} = 7 = a$

## Segmentos proporcionales

### Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

En cada uno de los triángulos siguientes, de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , calcular los segmentos determinados por la bisectriz sobre el lado menor:

(47)  $a = 8, b = 12, c = 16$

(49)  $a = 6, b = 12, c = 10$

*En este ejercicio se emplea la solución al problema planteado en el Art. 133 (pág. 97), el cual se fundamenta en el Teorema 33 (misma página) en el que la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos,  $x$  e  $y$ , proporcionales a los otros dos lados. En este caso, el lado opuesto corresponderá al lado de menor longitud.*

(47)  $a < b < c \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{b}{c} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \frac{x+y}{x} = \frac{b+c}{b} = \frac{12+16}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \quad \text{pero} \quad x+y = a = 8$

entonces  $\frac{8}{x} = \frac{7}{3} \quad \therefore \quad x = \frac{3 \times 8}{7} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$ , análogamente  $\frac{x+y}{y} = \frac{b+c}{c} = \frac{12+16}{16} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}$

de donde  $\frac{8}{y} = \frac{7}{4} \quad \therefore \quad y = \frac{4 \times 8}{7} = \frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}$ ; comprobación:  $x+y = 3\frac{3}{7} + 4\frac{4}{7} = 8 = a$

(49)  $a < c < b \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{c}{b} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad \text{y} \quad \frac{x+y}{x} = \frac{c+b}{c} = \frac{10+12}{10} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} \quad \text{pero} \quad x+y = a = 6$

entonces  $\frac{6}{x} = \frac{11}{5} \quad \therefore \quad x = \frac{5 \times 6}{11} = \frac{30}{11} = 2\frac{8}{11}$ , análogamente  $\frac{x+y}{y} = \frac{c+b}{b} = \frac{10+12}{12} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$

de donde  $\frac{6}{y} = \frac{11}{6} \quad \therefore \quad y = \frac{6 \times 6}{11} = \frac{36}{11} = 3\frac{3}{11}$ ; comprobación:  $x+y = 2\frac{8}{11} + 3\frac{3}{11} = 6 = a$

## Segmentos proporcionales

### Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

- (51) Los lados de un triángulo miden  $a = 24$ ,  $b = 10$ ,  $c = 18$ . Calcular los segmentos determinados por cada bisectriz sobre el lado opuesto.

*En este ejercicio se emplea la solución al problema planteado en el Art. 133 (pág. 97), el cual se fundamenta en el Teorema 33 (misma página) en el que la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos,  $x$  e  $y$ , proporcionales a los otros dos lados. En este caso, el lado opuesto corresponderá a cada lado del triángulo.*

sobre el lado  $a$ :  $\frac{x}{y} = \frac{b}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$  y  $\frac{x+y}{x} = \frac{b+c}{b} = \frac{10+18}{10} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$  pero  $x+y = a = 24$

entonces  $\frac{24}{x} = \frac{14}{5} \therefore x = \frac{5 \times 24}{14} = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$ , análogamente  $\frac{x+y}{y} = \frac{b+c}{c} = \frac{10+18}{18} = \frac{28}{18} = \frac{14}{9}$

de donde  $\frac{24}{y} = \frac{14}{9} \therefore y = \frac{9 \times 24}{14} = \frac{108}{7} = 15\frac{3}{7}$ ; comprobación:  $x+y = 8\frac{4}{7} + 15\frac{3}{7} = 24 = a$

sobre el lado  $b$ :  $\frac{x}{y} = \frac{c}{a} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$  y  $\frac{x+y}{x} = \frac{c+a}{c} = \frac{18+24}{18} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$  pero  $x+y = b = 10$

entonces  $\frac{10}{x} = \frac{7}{3} \therefore x = \frac{3 \times 10}{7} = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ , análogamente  $\frac{x+y}{y} = \frac{c+a}{a} = \frac{18+24}{24} = \frac{42}{24} = \frac{7}{4}$

de donde  $\frac{10}{y} = \frac{7}{4} \therefore y = \frac{4 \times 10}{7} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$ ; comprobación:  $x+y = 4\frac{2}{7} + 5\frac{5}{7} = 10 = b$

sobre el lado  $c$ :  $\frac{x}{y} = \frac{b}{a} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$  y  $\frac{x+y}{x} = \frac{b+a}{b} = \frac{10+24}{10} = \frac{34}{10} = \frac{17}{5}$  pero  $x+y = c = 18$

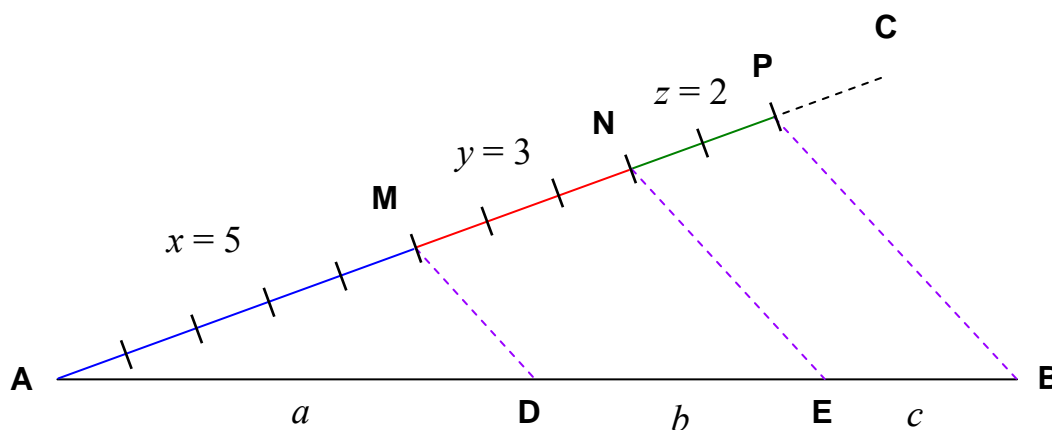
entonces  $\frac{18}{x} = \frac{17}{5} \therefore x = \frac{5 \times 18}{17} = \frac{90}{17} = 5\frac{5}{17}$ , análogamente  $\frac{x+y}{y} = \frac{b+a}{a} = \frac{10+24}{24} = \frac{34}{24} = \frac{17}{12}$

de donde  $\frac{18}{y} = \frac{17}{12} \therefore y = \frac{12 \times 18}{17} = \frac{216}{17} = 12\frac{12}{17}$ ; comprobación:  $x+y = 5\frac{5}{17} + 12\frac{12}{17} = 18 = c$

## Segmentos proporcionales

### Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Dividir gráficamente en partes proporcionales a 2, 3 y 5: (53) Un segmento de 5 pulgadas.



La construcción gráfica consiste en formar el ángulo BAC de cuyo vértice A se traza la semirrecta AC sobre la cual se llevan  $2 + 3 + 5 = 10$  divisiones iguales cualesquiera, en particular se emplea como unidad 1 cm. El segmento AB (dado) tiene una longitud de 5 plg  $\times 2.54 \text{ cm/plg} = 12.7 \text{ cm}$ , al cual se une el extremo P del número  $z = 2 = NP$  con el extremo B formando el segmento PB. Luego se trazan paralelas a PB en los puntos extremos N y M correspondientes a los números dados  $y = 3 = MN$  y  $x = 5 = AM$  y que cortan al segmento AB respectivamente en E y D. Los segmentos  $a = AD$ ,  $b = DE$  y  $c = EB$ , así determinados, son proporcionales a los números dados  $x, y, z$ . Algebraicamente,

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{12.7}{5+3+2} = 1.27 = r, \text{ entonces } \begin{cases} a = \overline{AD} = xr = 5 \times 1.27 = 6.35 \text{ cm} \\ b = \overline{DE} = yr = 3 \times 1.27 = 3.81 \text{ cm} \\ c = \overline{EB} = zr = 2 \times 1.27 = 2.54 \text{ cm} \end{cases}$$

se comprueba que  $a + b + c = \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EB} = 6.35 + 3.81 + 2.54 = 12.7 = \overline{AB}$

y en pulgadas,  $a = \frac{6.35}{2.54} = 2.5 \text{ plg.}$ ,  $b = \frac{3.81}{2.54} = 1.5 \text{ plg.}$ , y  $c = \frac{2.54}{2.54} = 1 \text{ plg.}$

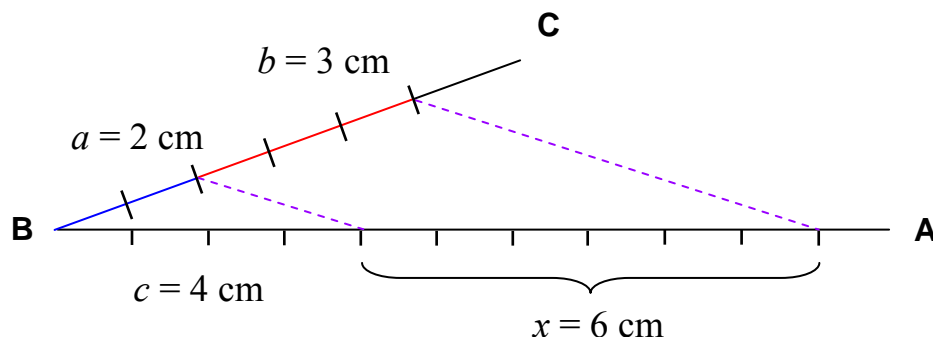
## Segmentos proporcionales

### Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Hallar gráficamente la cuarta proporcional a segmentos que miden:

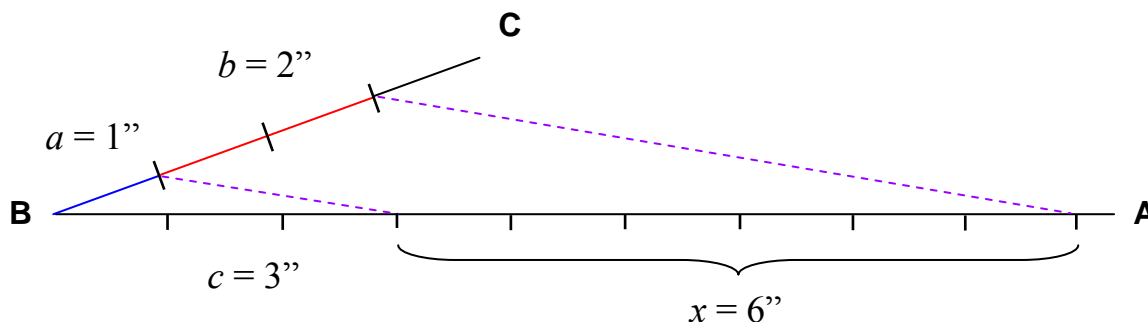
(55) 2, 3 y 4 cm

(57) 1, 2 y 3 pulgadas



(55) La construcción gráfica consiste en formar el ángulo  $ABC$  de cuyo vértice  $B$  se traza la semirrecta  $BC$  sobre la cual se llevan consecutivamente los segmentos  $a = 2$  cm y  $b = 3$  cm. Luego, sobre la semirrecta  $BA$  se coloca, partiendo de  $B$ , el segmento  $c = 4$  cm y se une el extremo de  $a$  con el extremo de  $c$ . Finalmente, se traza en el extremo de  $b$  una paralela al segmento  $ac$  que corte  $BA$  formando así el segmento  $x = 6$  cm que es cuarta proporcional de los segmentos dados  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Algebraicamente,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{ya que} \quad \frac{a}{b} = \frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{4 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{c}{x}.$$



(57) La construcción gráfica es similar a la anterior considerando que  $a = 1''$  (plg) y  $b = 2''$ . El segmento  $c = 3''$  se lleva sobre  $BA$  y el segmento  $x = 6''$  es la cuarta proporcional de los segmentos dados  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Algebraicamente,

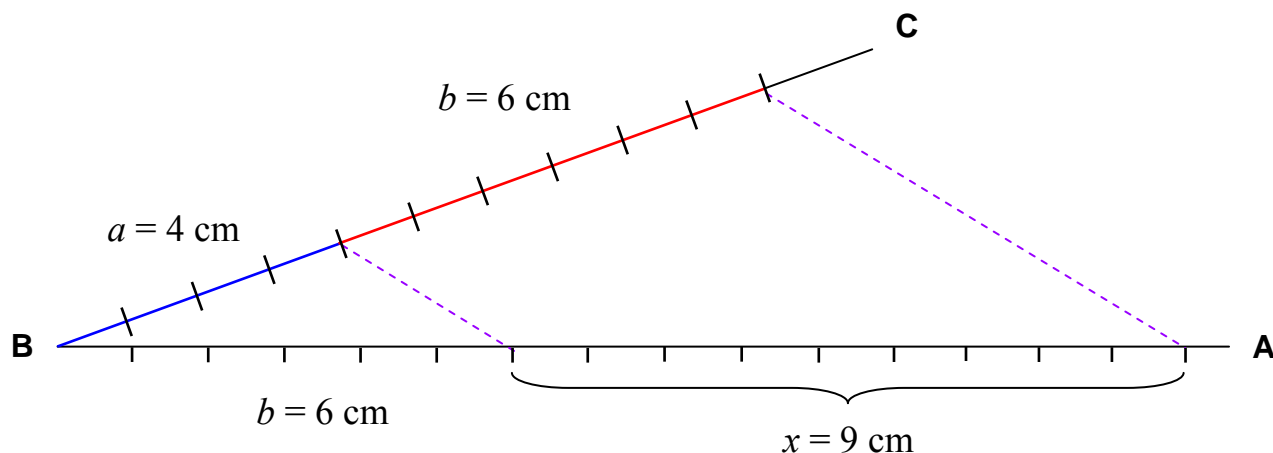
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{ya que} \quad \frac{a}{b} = \frac{1''}{2''} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{3''}{6''} = \frac{c}{x}.$$



## Segmentos proporcionales

### Capítulo 9. Ejercicios Resueltos (pp. 100 – 103)

Hallar gráficamente la tercera proporcional a segmentos que miden: (59) 4 y 6 cm



La construcción gráfica consiste en formar el ángulo  $ABC$  de cuyo vértice  $B$  se traza la semirrecta  $BC$  sobre la cual se llevan consecutivamente los segmentos  $a = 4$  cm y  $b = 6$  cm. Luego, sobre la semirrecta  $BA$  se coloca, partiendo de  $B$ , el segmento  $b = 6$  cm y se unen los extremos de  $a$  con  $b$  (sobre  $BA$ ). Finalmente, se traza en el extremo de  $b$  una paralela al segmento  $ab$  que corte  $BA$  formando así el segmento  $x$  que es tercera proporcional de los segmentos dados. Aritméticamente,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \quad \text{ya que} \quad \frac{a}{b} = \frac{4 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{2}{3} = \frac{6 \text{ cm}}{9 \text{ cm}} = \frac{b}{x}.$$