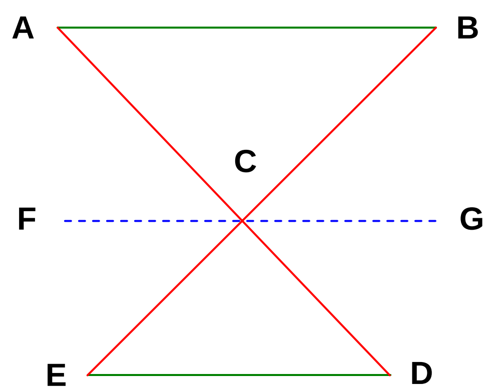
Semejanza de triángulos

Capítulo 10. Ejercicios Resueltos (pp. 113 – 116)

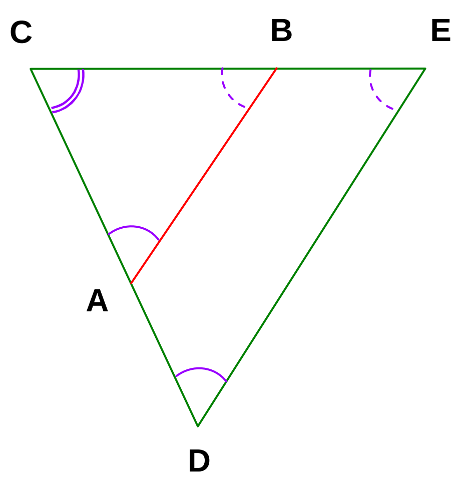
(1) Si $AB \parallel ED$, demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta ECD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos. *Como construcción auxiliar se traza la recta FG, que pasa por el vértice C común a ambos triángulos, y que sea paralela a AB (y a ED por transitividad). Así,*



considerando AD y BE como segmentos de rectas transversales que cortan a las paralelas AB, ED (hipótesis) y FG (construcción auxiliar), se sigue, por el Teorema de Tales, que los segmentos determinados en ellas se corresponden proporcionalmente. Es decir, $AC : CD = BC : CE$. *Además, al ser C vértice común, el ángulo ACB es igual al ángulo ECD. En consecuencia,* $\Delta ABC \sim \Delta ECD$ *ya que tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido (2do caso, Teorema 36, pág. 109). La proporcionalidad entre lados homólogos está dada por*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}.$$

(3) Si $AB \parallel DE$, demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta DCE$. Si $AC = 3$, $AD = 2$ y $AB = 4$; calcular DE.



Al ser C vértice común a ambos triángulos, el ángulo ACB es igual al ángulo DCE. Además, siendo $AB \parallel DE$, *y considerando la recta CD como secante que corta a AB y DE, entonces* $\angle A = \angle D$. *Análogamente considerando la recta CE como secante que corta a AB y DE, entonces* $\angle B = \angle E$. *En consecuencia,* $\Delta ABC \sim \Delta DCE$ *ya que tienen dos ángulos respectivamente iguales (1er caso, Teorema 35, pág. 109). La proporcionalidad entre lados homólogos está dada por*

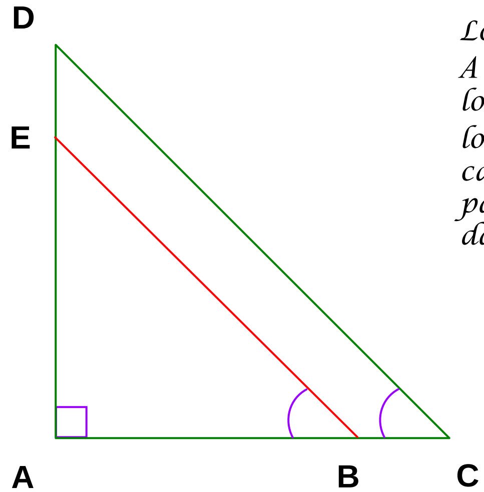
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \quad \text{de donde} \quad \overline{DE} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \cdot \overline{AB}, \quad \text{entonces}$$

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AC} + \overline{AD}}{\overline{AC}} \cdot \overline{AB} = \frac{3+2}{3} \cdot 4 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} = 6.67$$

Semejanza de triángulos

Capítulo 10. Ejercicios Resueltos (pp. 113 – 116)

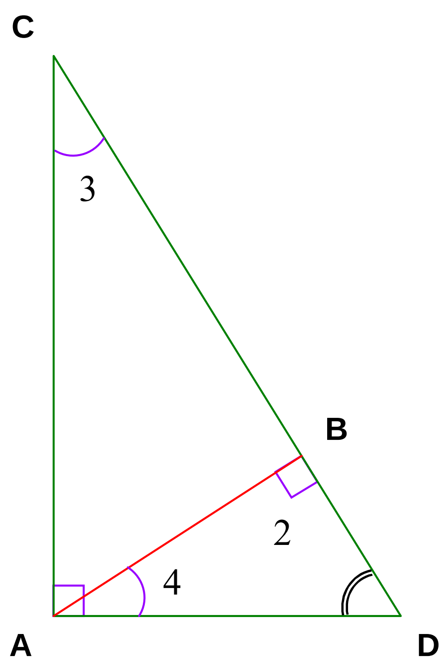
(5) El ángulo A es recto y el ángulo B es igual al ángulo C. Demostrar que $\Delta\, ABE \sim \Delta\, ACD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos.



Los triángulos dados son rectángulos ya que el ángulo A es recto. Además, por hipótesis $\angle B = \angle C$ de modo que los dos triángulos tienen un ángulo agudo igual y, por lo tanto $\Delta\, ABE \sim \Delta\, ACD$ ya que corresponde al primer caso de semejanza de triángulos rectángulos (Art. 149, pág. 112). La proporcionalidad entre lados homólogos está dada por

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

(7) Si $CA \perp AD$ y $AB \perp CD$, demostrar que $\Delta\, ABD \sim \Delta\, ACD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos



Por ser ambos triángulos rectángulos ya que

$$\angle A = R \text{ en } \Delta\, ACD \quad \text{y} \quad \angle 2 = R \text{ en } \Delta\, ABD,$$

y el hecho que comparten el mismo ángulo agudo D, se sigue por el primer caso de semejanza de triángulos rectángulos (Art. 149, pág. 112) que $\Delta\, ACD \sim \Delta\, ABD$.

Además, se tiene que los ángulos $ACD = 3$ y $DAB = 4$ tienen lados mutuamente perpendiculares (hipótesis) y por lo tanto son iguales, es decir, $\angle 3 = \angle 4$ (recuérdese el Teorema 15 sobre ángulos con lados perpendiculares, pág. 49). Así, la proporcionalidad entre lados homólogos se determina del siguiente modo

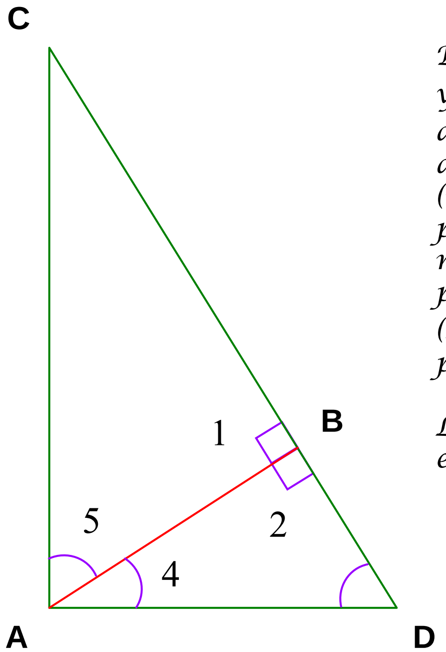
$$\frac{\angle A}{\angle 2} = \frac{\angle C}{\angle 4} = \frac{\angle D}{\angle D} \quad \text{de donde} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

obsérvese que se ha empleado el criterio sugerido en el Art. 143, pág. 106, para establecer la proporcionalidad de los lados. En este caso, el ángulo A es distinto en cada triángulo rectángulo.

Semejanza de triángulos

Capítulo 10. Ejercicios Resueltos (pp. 113 – 116)

(9) Si el ángulo A es recto y $AB \perp CD$ demostrar que $\Delta\, ABD \sim \Delta\, ABC$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos.

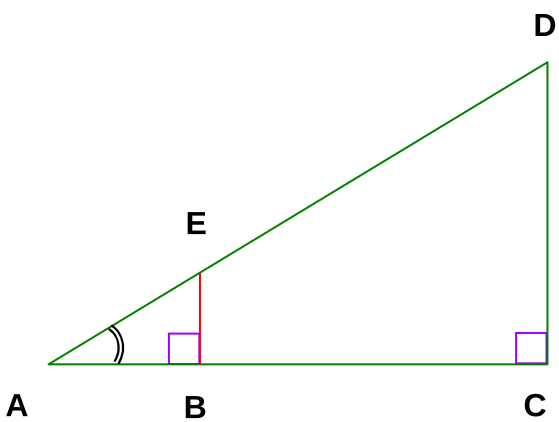


Por hipótesis, A es un ángulo recto. Entonces, $AC \perp AD$ y como $AB \perp CD$ (segunda hipótesis), resulta que los ángulos $CAB = 5$ y ADB tienen lados mutuamente perpendiculares y por lo tanto son iguales, es decir, $\angle 5 = \angle D$ (recuérdese el Teorema 15 sobre ángulos con lados perpendiculares, pág. 49). Entonces por ser triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual, se aplica el primer caso de semejanza de triángulos rectángulos (Art. 149, pág. 112). Por tanto, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, ABD$. De donde, por semejanza, $\angle C = \angle 4$.

La proporcionalidad entre los lados homólogos se determina empleando el criterio sugerido en el Art. 143, pág. 106. Así,

$$\frac{\angle 1}{\angle 2} = \frac{\angle C}{\angle 4} = \frac{\angle 5}{\angle D} \quad \text{entonces} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}.$$

(11) Si $EB \parallel CD$ y $AB = 2$ m; $BC = 18$ m y $BE = 3$ m; calcular CD.



Los triángulos ABE y ACD son semejantes por ser rectángulos, ya que $\angle B = \angle C = R$, y tener un ángulo agudo igual (A). Estableciendo la proporcionalidad de los lados se tiene que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \quad \text{de donde} \quad \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}$$

entonces,

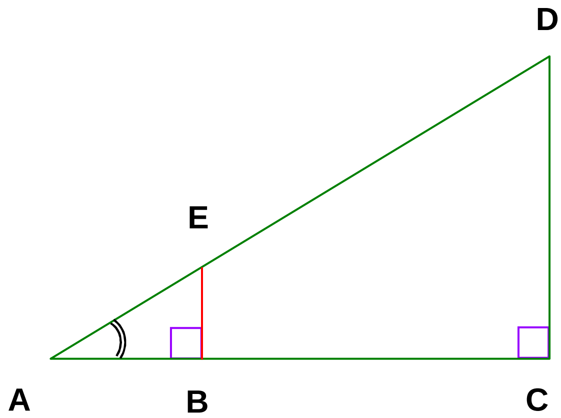
$$\overline{CD} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \overline{BE} = \frac{2+18}{2} \cdot 3 = 30 \text{ m}.$$

Interpretación: conociendo, e.g., la longitud AB de la sombra proyectada por un poste de altura BE y la longitud AC de la sombra proyectada por la punta de un árbol se determina la altura CD del árbol, por la proporcionalidad de lados correspondientes en triángulos semejantes.

Semejanza de triángulos

Capítulo 10. Ejercicios Resueltos (pp. 113 – 116)

(13) Si $EB \parallel CD$ y $AB = 9$ m; $EB = 6$ m y $CD = 80$ m; calcular BC.



Los triángulos ABE y ACD son semejantes por ser rectángulos, ya que $\angle B = \angle C = R$, *y tener un ángulo agudo igual* (A). *Estableciendo la proporcionalidad de los lados se tiene que*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \quad \text{de donde} \quad \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}$$

entonces,

$$\overline{BC} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \cdot \overline{AB} - \overline{AB} = \frac{80}{6} \cdot 9 - 9 = 111 \text{ m.}$$

Interpretación: conociendo, e.g., la longitud AB de la sombra proyectada sobre la cubierta de un barco producida por un mástil de altura BE, al ser iluminado por la luz del faro y la altura CD de éste sobre el nivel del mar, se determina la distancia BC que hay del barco al faro (o a la costa aproximadamente), empleando la proporcionalidad de lados correspondientes en triángulos semejantes.

En este ejercicio así como en el anterior (11), *está implícita la aplicación del Teorema 34 (pág. 106) relativo a la existencia de triángulos semejantes ya que por hipótesis, en ambos ejercicios, EB* $\parallel$ *CD, y en consecuencia dicha paralela al lado CD forma con los otros dos lados un triángulo semejante al primero.*