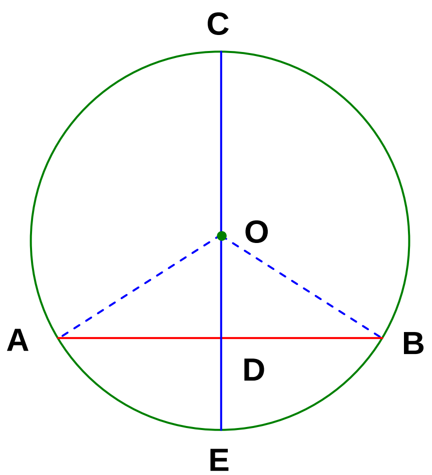
Circunferencia y círculo

Capítulo 12. Ejercicios Resueltos (pp. 146 – 148)

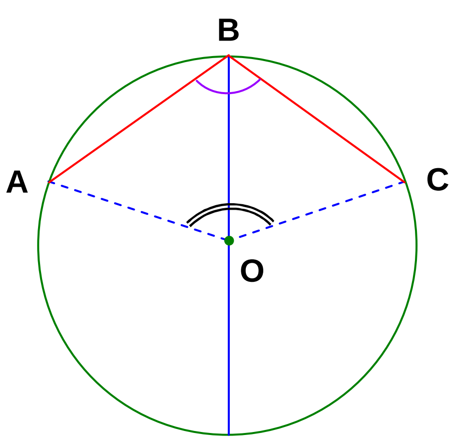
(1) Si $AD = DB$, demostrar que el arco AE es igual al arco EB. *Como construcción auxiliar se trazan los radios OA y OB formándose los triángulos rectángulos AOD y BOD que son iguales ya que tienen sus tres lados iguales, es decir, OA = OB (por ser radios de una misma circunferencia), OD es el lado común y, por hipótesis, AD = DB (igual base).*



Como $\Delta\, AOD = \Delta\, BOD$ y $\overline{AD} = \overline{DB}$ (hipótesis)
se sigue que $\angle AOD = \angle BOD$ (opuestos a lados iguales)
de donde $\cap AE = \cap EB$ (arcos correspondientes a ángulos centrales iguales).

Nótese que puede aplicarse directamente el Teorema 44 (pág. 134), que establece que todo diámetro perpendicular a una cuerda, divide a ésta y a los arcos subtendidos en partes iguales. En este caso CE es el diámetro (que pasa por O) y AB es la cuerda y se cumple la relación $CE \perp AB$.

(3) Si $AB = BC$, demostrar que el triángulo ABO es igual al triángulo CBO. *Como construcción auxiliar se trazan los radios OA y OC. Así los triángulos ABO y CBO tienen por lado común el segmento OB (igual al radio). Por hipótesis, AB = BC, de modo que al aplicar el Teorema recíproco (pág. 136, Art. 180), a cuerdas iguales corresponden arcos iguales. Consecuentemente, el arco AB es igual al arco CB y los ángulos centrales determinados por estos arcos también son iguales, es decir, ángulo central AOB = ángulo central COB.*



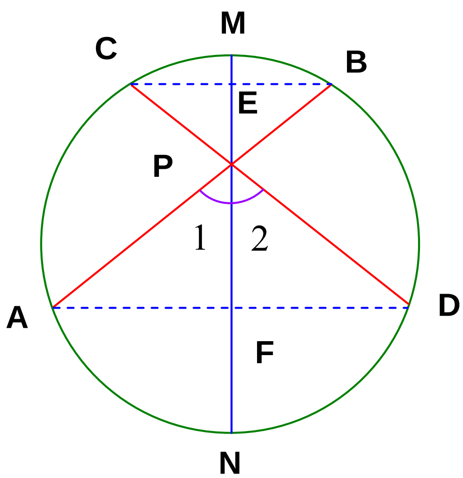
Por construcción, $\overline{OA} = \overline{OC}$ y $\overline{OB}$ es el lado común,
además, $\angle AOB = \angle COB$ (demostrado)
$\therefore\ \Delta\, ABO = \Delta\, CBO$ (por tener dos lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ellos).

En particular, como OA = OB y OC = OB, ambos triángulos son isósceles.

Circunferencia y círculo

Capítulo 12. Ejercicios Resueltos (pp. 146 – 148)

(5) Si ángulo 1 = ángulo 2, demostrar que $AB = CD$.

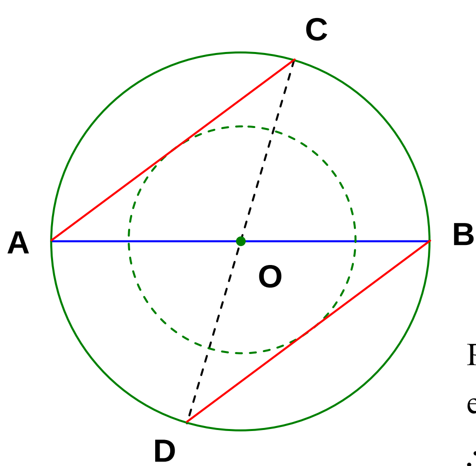


Como construcción auxiliar se unen los puntos C con B y A con D para formar los segmentos BC y AD cuya intersección con el diámetro MN corresponde a los puntos E y F. Además el punto donde concurren las secantes AB y CD se denota por P. De este modo, es inmediato ver que los triángulos rectángulos AFP y DFP son iguales, de donde $AP = DP$ por ser hipotenusas homólogas de triángulos iguales. También, $\Delta\ CEP = \Delta\ BEP$, de donde $CP = BP$ por la misma razón que antes. Finalmente por suma de segmentos, se tiene

$$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{PD} + \overline{CP} = \overline{CD}.$$

Obérvese que la hipótesis de que los ángulos 1 y 2 *son iguales se emplea para justificar que los triángulos rectángulos establecidos en la construcción auxiliar son iguales por tener un lado igual (común sobre MN) e iguales los ángulos adyacentes (agudo y recto).*

(7) Si $AC \parallel BD$ y O es el punto medio de AB, demostrar que $AC = BD$. *Al ser AC paralela a BD, puede aplicarse el Teorema 50 (pág. 144) el cual establece que los arcos comprendidos entre paralelas son iguales. Así, $\cap AD = \cap BC$, de donde*



$$\cap AC = \cap AB - \cap CB = \cap BA - \cap DA = \cap BD$$

por resta de arcos referida al diámetro $\overline{AB}$ $\therefore$ $\overline{AC} = \overline{BD}$

ya que a arcos iguales corresponden cuerdas iguales.

De otra forma, se traza el diámetro CD como construcción auxiliar formándose los ángulos centrales AOC y BOD que son iguales por ser opuestos en el vértice O (centro de la circunferencia).

Por construcción, $\angle AOC = \angle BOD$ (ángulos centrales iguales)

entonces, $\cap AC = \cap BD$ (por igualdad de ángulos y arcos)

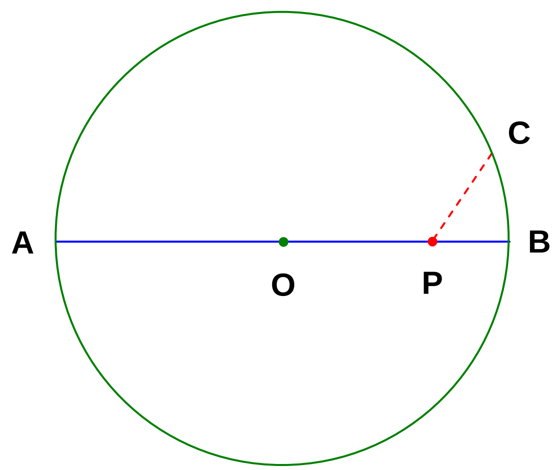
$\therefore$ $\overline{AC} = \overline{BD}$ (arcos iguales tienen cuerdas iguales).

En el último paso de cada argumentación se ha empleado el Teorema 45 (pág. 135) que establece las relaciones entre las cuerdas y arcos correspondientes para una circunferencia dada.

Circunferencia y círculo

Capítulo 12. Ejercicios Resueltos (pp. 146 – 148)

(9) Un punto dista 2 cm del centro de una circunferencia de 6 cm de diámetro. Hallar la menor distancia del punto a la circunferencia.

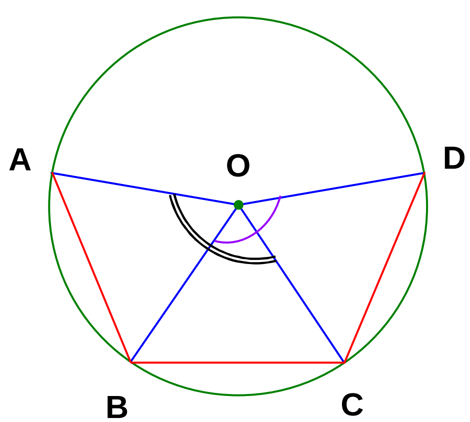


De acuerdo al Teorema 48 (pág. 139), la distancia mínima de un punto a una circunferencia es el menor de los segmentos de normal comprendidos entre ella y el punto.

De este modo, en la circunferencia O con diámetro (normal) es $AB = 6$ cm *y radio* $OB = 3$ cm, *el punto P es interior ya que* $OP = 2$ cm $< OB$. *Como* $PB < PC$, *la menor distancia del punto dado a la circunferencia está dada por*

$$d = \overline{PB} = \overline{OB} - \overline{OP} = 3 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 1 \text{ cm}.$$

(11) Si $AB = BC = CD$, demostrar que el ángulo AOC es igual al ángulo BOD. *Aplicando el Teorema recíproco (Art. 180, pág. 136) en el que cuerdas iguales determinan arcos iguales, se sigue que* $\cap AB = \cap BC = \cap CD$, *de donde, por suma de arcos (ver Art. 173, pág. 132):*



$$\cap AC = \cap AB + \cap BC = \cap BC + \cap CD = \cap BD$$

de donde $\angle AOC = \angle BOD$, ya que arcos iguales son subtendidos por ángulos centrales iguales.