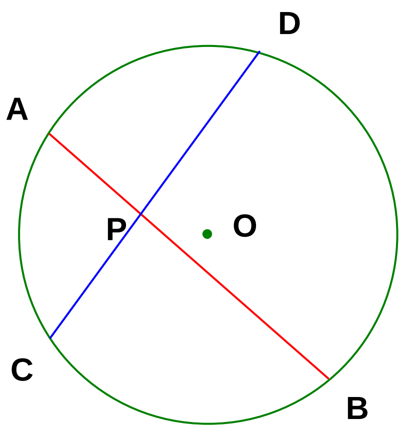
Relaciones métricas en la circunferencia

Capítulo 14. Ejercicios Resueltos (pp. 165 – 166)

Para los problemas (1) a (5) emplear la siguiente figura:



(1) Si $AP = 3$, $PB = 5$ y $PC = 4$, hallar PD.

(3) Si $PB = 2\,AP$, $PC = 4$ y $CD = 12$, hallar AB.

(5) Si $CD = 15$, $PD = 6$ y $PB = 3\,PA$, hallar PA.

Estos ejercicios se resuelven considerando la relación entre las cuerdas establecida en el Teorema 56 (pág. 160): si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se cortan en P, entonces $PA \times PB = PC \times PD$. *Aplicando esta relación se tiene:*

(1) $\overline{AP}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ de donde, $\overline{PD}=\dfrac{\overline{AP}\times\overline{PB}}{\overline{PC}}=\dfrac{3\times5}{4}=\dfrac{15}{4}=3.75$

(3) $\overline{AP}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ de donde, $\overline{PD}=\dfrac{\overline{AP}\times\overline{PB}}{\overline{PC}}=\dfrac{2(\overline{AP})^2}{4}=\dfrac{(\overline{AP})^2}{2}$

además, $\overline{PD}=\overline{CD}-\overline{PC}=12-4=8$ $\therefore$ $(\overline{AP})^2=16$ $\therefore$ $\overline{AP}=4$,

finalmente, $\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}=3\overline{AP}=12$.

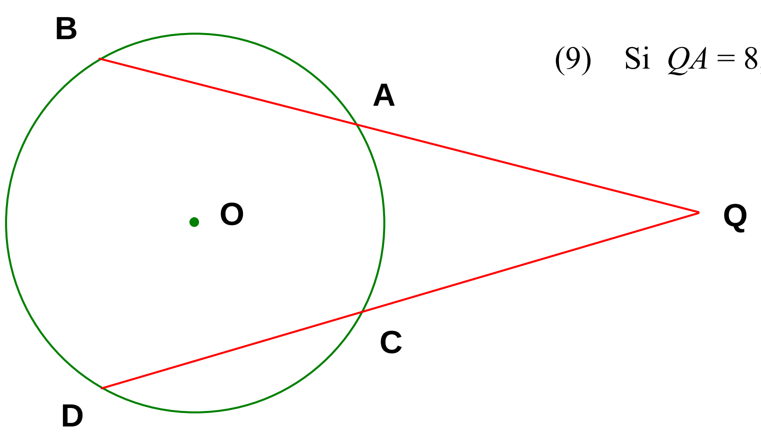
(5) como $\overline{PC}=\overline{CD}-\overline{PD}=15-6=9$ y $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

entonces, $\overline{PA}\times3\overline{PA}=9\times6$ de donde $(\overline{PA})^2=18$ y $\overline{PA}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Relaciones métricas en la circunferencia

Capítulo 14. Ejercicios Resueltos (pp. 165 – 166)

Para los problemas (6) a (10) emplear la siguiente figura:



(7) Si $QB = 70$, $QA = 8$ y $QC = 6$, hallar QD.

(9) Si $QA = 8$, $AB = 12$ y $CD = 10$, hallar QC.

Estos ejercicios se resuelven considerando la relación entre las secantes establecida en el Teorema 57 (pág. 161): si por un punto exterior Q a una circunferencia, se trazan dos secantes QB y QD que la cortan, respectivamente, en A y en C, entonces QB × QA = QD × QC. Aplicando esta relación se obtiene:

(7) $\overline{QA}\times\overline{QB} = \overline{QC}\times\overline{QD}$ de donde, $\overline{QD} = \dfrac{\overline{QA}\times\overline{QB}}{\overline{QC}} = \dfrac{8\times 70}{6} = \dfrac{280}{3} = 93\dfrac{1}{3}$

(9) como $\overline{QB} = \overline{QA} + \overline{AB} = 8 + 12 = 20$ y $\overline{QD} = \overline{QC} + \overline{CD} = \overline{QC} + 10$

entonces, $\overline{QA}\times\overline{QB} = 8\times 20 = \overline{QC}\times(\overline{QC}+10)$ de donde $(\overline{QC})^2 + 10\overline{QC} - 160 = 0$

y resolviendo esta ecuación cuadrática, la raíz positiva es

$$\overline{QC} = \frac{-10+\sqrt{10^2+4(160)}}{2} = \frac{-10+\sqrt{100+640}}{2} = \frac{-10+\sqrt{740}}{2} = \frac{-10+27.2}{2} = 8.6$$

Relaciones métricas en la circunferencia

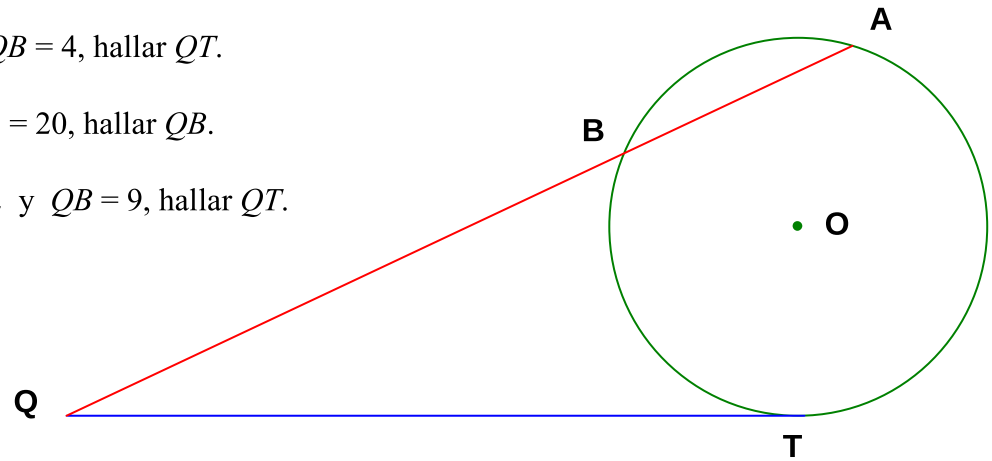
Capítulo 14. Ejercicios Resueltos (pp. 165 – 166)

Para los problemas (11) a (15) emplear la siguiente figura:

(11) Si $QA = 9$ y $QB = 4$, hallar QT.

(13) Si $QT = 8$, $QA = 20$, hallar QB.

(15) Si $QT = QA / 2$ y $QB = 9$, hallar QT.



Estos ejercicios se resuelven considerando la propiedad de la tangente y la secante trazadas desde un punto exterior a una circunferencia, establecida en el Teorema 58 (pág. 162): si por un punto exterior Q a una circunferencia, se trazan la tangente QT y la secante QA que la corta en B, entonces $QA : QT = QT : QB$. Usando esta relación se obtienen los siguientes resultados:

(11) $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QT}} = \dfrac{\overline{QT}}{\overline{QB}}$ de donde, $(\overline{QT})^2 = \overline{QA} \times \overline{QB} = 9 \times 4 = 36 \quad \therefore \quad \overline{QT} = \sqrt{36} = 6$

(13) $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QT}} = \dfrac{\overline{QT}}{\overline{QB}}$ de donde, $\overline{QB} = \dfrac{\overline{QT} \times \overline{QT}}{\overline{QA}} = \dfrac{8 \times 8}{20} = \dfrac{64}{20} = 3.2$

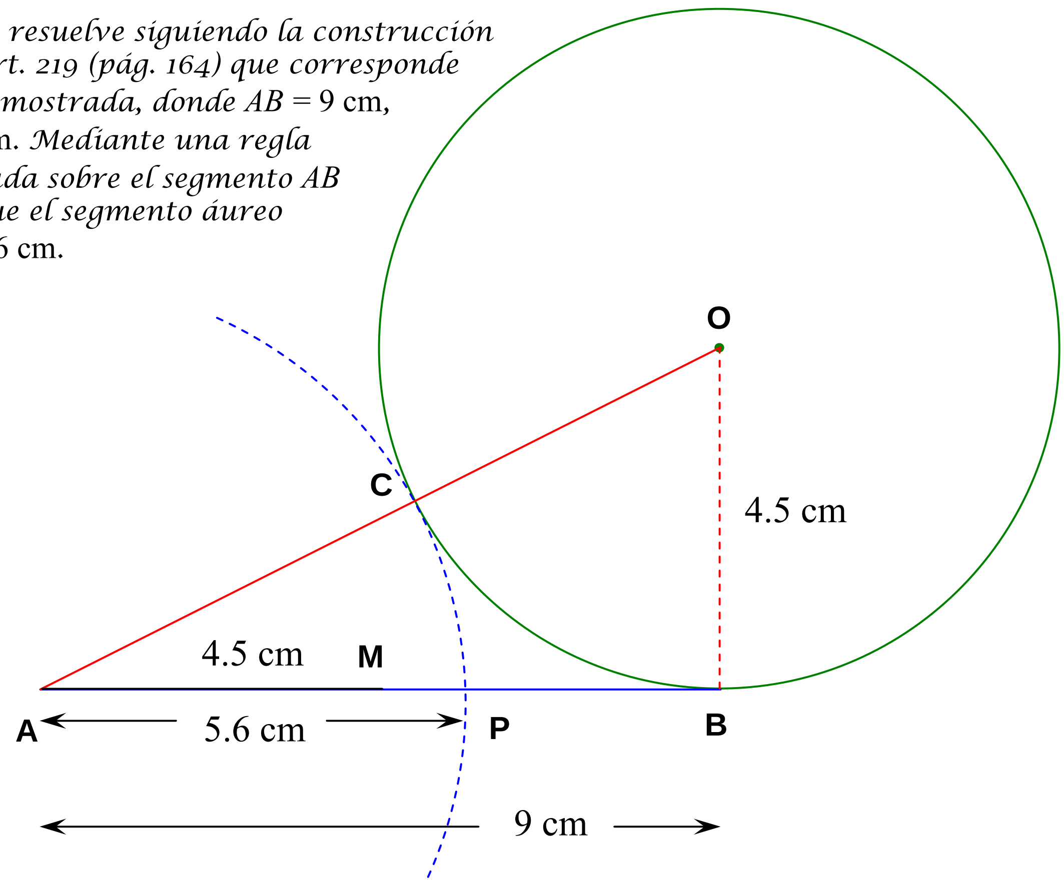
(15) $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QT}} = \dfrac{\overline{QT}}{\overline{QB}}$ de donde, $\dfrac{\overline{QA}}{\left(\dfrac{\overline{QA}}{2}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{\overline{QA}}{2}\right)}{9}$ entonces $\overline{QA} = 36 \quad \therefore \quad \overline{QT} = \dfrac{\overline{QA}}{2} = 18$.

Relaciones métricas en la circunferencia

Capítulo 14. Ejercicios Resueltos (pp. 165 – 166)

(16) Hallar gráficamente el segmento áureo de un segmento de 9 cm.
(17) Comprobarlo efectuando la medida.

El ejercicio 16 *se resuelve siguiendo la construcción descrita en el Art. 219 (pág. 164) que corresponde aquí a la figura mostrada, donde* $AB = 9$ cm, $OB = AM = 4.5$ cm. *Mediante una regla graduada colocada sobre el segmento* AB *se comprueba que el segmento áureo* $AP = AC$ *mide* 5.6 cm.



(19) Hallar algebraicamente el segmento áureo de un segmento de 30 cm.

Recuérdese que el segmento áureo surge de dividir un segmento AB *en media y extrema razón, que consiste en determinar dos segmentos* AP *y* PB *tales que* $AB : AP = AP : PB$ *. Según el desarrollo algebraico realizado en el Art. 217 (pág. 163), el segmento áureo* $AP = x$ *, correspondiente al segmento* $AB = a$ *, se calcula como sigue*

$$\boxed{x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0.618a \quad \therefore \quad x = 0.618 \times 30 \text{ cm} = 18.54 \approx 18.6 \text{ cm}}$$