Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Ejercicios Resueltos (pp. 184 – 185)

(1) Calcular la apotema de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 3 m de radio, si el lado del cuadrado mide $3\sqrt{2}$ m (aproximadamente, 4.24 m).

fórmula de la apotema, $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$;

lado del cuadrado, $l_4 = 3\sqrt{2}$ m, $r = 3$ m y $n = 4$ entonces,

$$a_4 = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(3)^2 - (3\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36-18} = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ \text{m} \simeq 2.12\ \text{m.}$$

(3) Sabiendo que el lado del octágono regular inscrito en una circunferencia de 6 m de radio vale $6\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m (aproximadamente, 4.59 m), hallar el lado del polígono regular de 16 lados inscrito en la misma circunferencia.

fórmula del lado del polígono de doble no. de lados, $l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$;

lado del octágono, $6\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m, $r = 6$ m y $n = 16$ entonces,

$$l_{16} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_6^2}} = \sqrt{2(6)^2 - 6\sqrt{4(6)^2 - (6\sqrt{2-\sqrt{2}})^2}} = \sqrt{2(6)^2 - 6\sqrt{4(6)^2 - (6)^2(2-\sqrt{2})}}$$
$$= \sqrt{2(6)^2 - (6)^2\sqrt{4-(2-\sqrt{2})}} = 6\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ \text{m} \simeq 2.34\ \text{m.}$$

(5) Sabiendo que el lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia de 9 m de radio vale 9 m, hallar el lado del hexágono regular circunscrito en la misma circunferencia.

fórmula del lado del polígono circunscrito, $L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$;

lado del hexágono regular inscrito, $l_6 = r = 9$ m, $r = 9$ m y $n = 6$ entonces,

$$L_6 = \frac{2rl_6}{\sqrt{4r^2 - l_6^2}} = \frac{2r^2}{\sqrt{4r^2 - r^2}} = \frac{2r^2}{r\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2(9)\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}\ \text{m} \simeq 10.39\ \text{m.}$$

Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Ejercicios Resueltos (pp. 184 – 185)

(7) Calcular el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 8 m de radio.

fórmula del lado de un triángulo equilátero, $l_3 = r\sqrt{3}$;
radio de la circunferencia, $r = 8$ m, entonces $l_3 = 8\sqrt{3}\ \text{m} \simeq 13.86\ \text{m}.$

(9) Calcular el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 12 cm de radio.

fórmula del lado de un cuadrado, $l_4 = r\sqrt{2}$;
radio de la circunferencia, $r = 12$ cm, entonces $l_4 = 12\sqrt{2}\ \text{cm} \simeq 16.97\ \text{cm}.$

(11) Calcular el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

fórmula del lado de un pentágono, $l_5 = \dfrac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$;
radio de la circunferencia, $r = 10$ cm, entonces

$$l_5 = \frac{10}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 5\sqrt{10-2\sqrt{5}}\ \text{cm} \simeq 11.76\ \text{cm}.$$

(13) Calcular el lado de un octágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio vale $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ m (aproximadamente, 1.85 m).

fórmula del lado de un octágono, $l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$;
radio de la circunferencia, $r = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ m, entonces

$$l_8 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}\ \text{m} \simeq 1.41\ \text{m}.$$

(15) Calcular el lado de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio mide $2+\sqrt{3}$ cm (aproximadamente, 3.73 cm).

fórmula del lado de un dodecágono, $l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$; radio de la circunferencia, $r = 2+\sqrt{3}$ cm

entonces,
$$\begin{aligned} l_{12} &= (2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})} = \sqrt{(2+\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]} \\ &= \sqrt{(2+\sqrt{3})[2^2-3]} = \sqrt{(2+\sqrt{3})[4-3]} = \sqrt{2+\sqrt{3}}\ \text{cm} \simeq 1.93\ \text{cm}. \end{aligned}$$