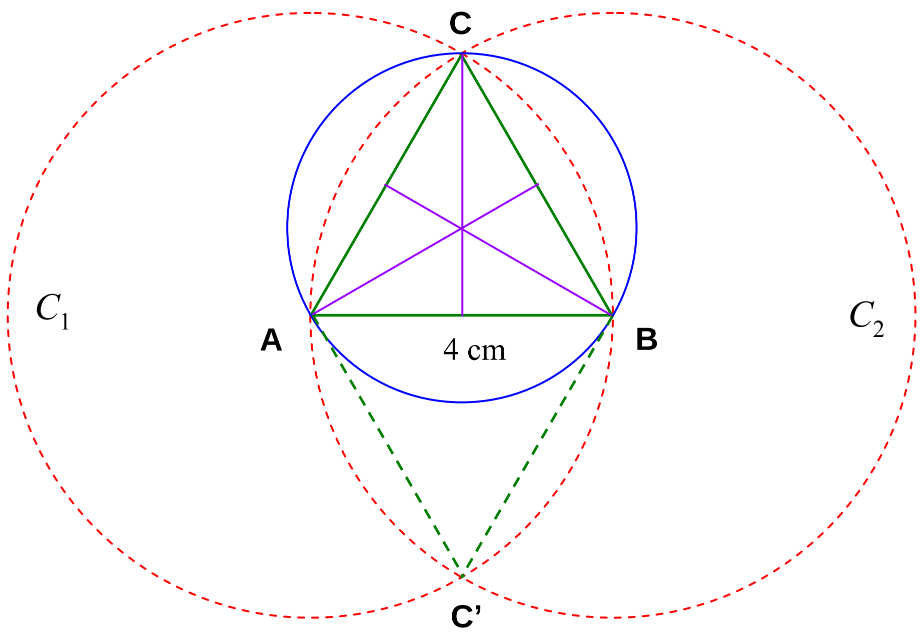
Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Construcciones Geométricas (p. 186)

(1) Construir un triángulo equilátero cuyos lados miden 4 cm inscrito en una circunferencia de radio r. ¿Dado el valor del lado l_3, cuánto mide r? *La construcción geométrica se realiza del siguiente modo: con regla se mide el segmento horizontal* $AB = 4$ cm *que se toma como la base del triángulo equilátero. Colocando el compás en el extremo* A *se traza la circunferencia* C_1 *(izquierda) de radio* AB *y análogamente, en el extremo* B *se traza la circunferencia* C_2 *(derecha) con el mismo radio. Ambas circunferencias se cortan en* C *y* C'*. Uniendo* A *con* C *y* B *con* C *se forman los otros dos lados iguales,* $AC = 4$ cm *y* $BC = 4$cm *y el triángulo equilátero* $\Delta\, ABC$ *queda construido.*



Dado que el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio r *está dado por* $l_3 = r\sqrt{3}$ *entonces, como* $l_3 = 4$ cm, *se obtiene*

$$r = \frac{l_3}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2.31 \text{ cm} \;\text{ y }\; d = 2r \approx 4.62 \text{ cm.}$$

con lo cual circunferencia circunscrita puede trazarse colocando el compás en el circuncentro que es el punto donde concurren las mediatrices del triángulo. Recuérdese que las mediatrices son los segmentos perpendiculares que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto. De la figura se observa también que:

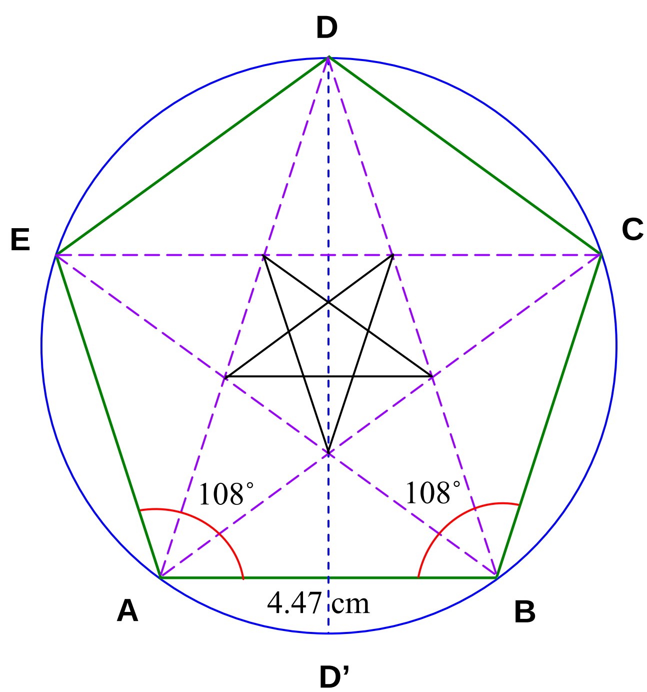
$$\Delta ABC = \Delta ABC'.$$

Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Construcciones Geométricas (p. 186)

(3) Construir un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio $r=\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ cm ¿Dado el valor del radio, cuál es la longitud del lado del pentágono, es decir, cuánto vale l_5?
La construcción geométrica se realiza del siguiente modo: calculando el valor aproximado del radio, resulta que $r = 3.804$ cm *mediante el cual trazamos la circunferencia circunscrita con diámetro* $d = 7.61$ cm. *El lado* l_5 *del pentágono tiene el valor*

$$l_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt{10^2-(4)(5)}=\frac{\sqrt{80}}{2}\approx 4.47\text{ cm.}$$



Entonces, el segmento $AB = l_5$ *se coloca horizontalmente como cuerda que forma la base del pentágono. Una vez trazada la cuerda AB, puede emplearse el transportador sobre ella para marcar los puntos C y E de modo que los ángulos ABC y BAE midan* 108°. *Después, en el punto medio D’ de AB se levanta una recta perpendicular que corte al círculo en D. Obsérvese que* $AD' = BD' = 2.235$ cm *y que* $DD' = 7.61$ cm *es un diámetro. Finalmente, se unen los puntos B con C, C con D, D con E y E con A que forman los otros cuatro lados del pentágono regular. Nótese como los puntos de intersección de las diagonales que pueden formarse en el pentágono inscrito dá lugar a un pentágono de menor tamaño pero invertido.*

Relaciones métricas en los polígonos regulares

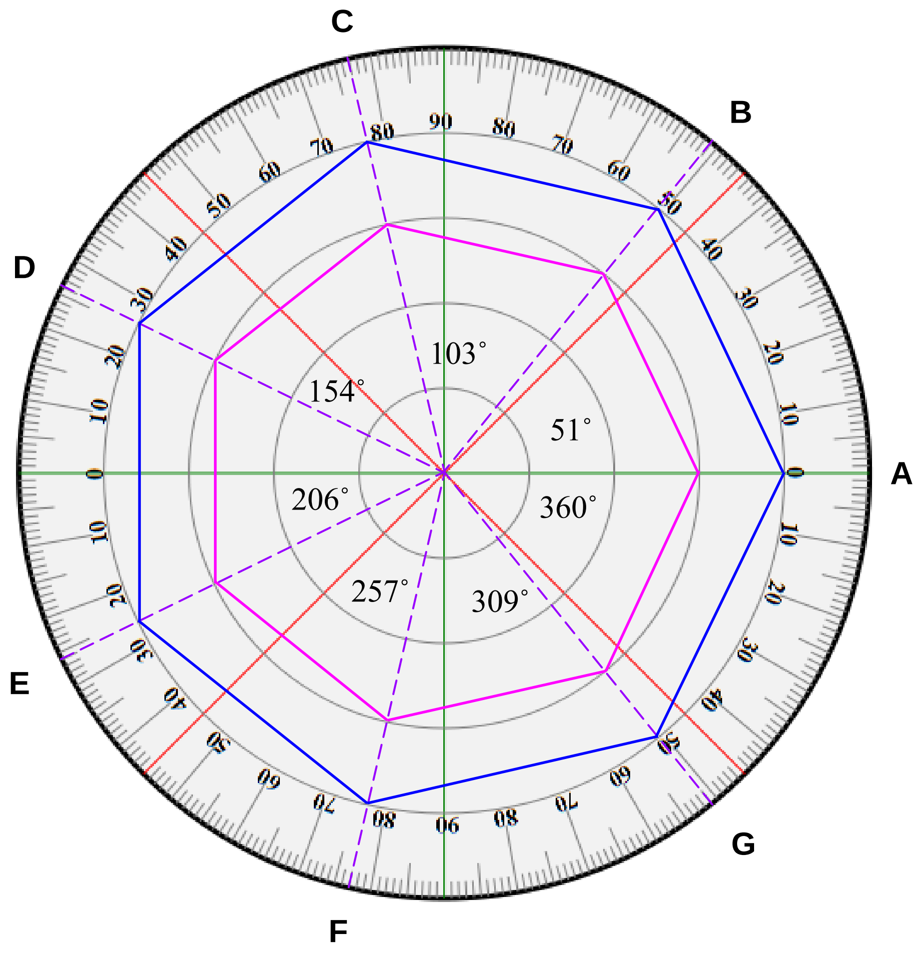
Capítulo 15. Construcciones Geométricas (p. 186)

(5) Construir un eptágono regular inscrito en una circunferencia. *Dado que no se dispone de una expresión, exenta de funciones trigonométricas, que permita calcular el lado de un eptágono y ya que no es posible construir exclusivamente con regla y compás este polígono regular puede optarse por el uso del transportador. En este caso, la división de la circunferencia completa de 360˚ al no ser exacta puede descomponerse en siete arcos cuya medida angular es la siguiente:*

$$51^\circ+52^\circ+51^\circ+52^\circ+51^\circ+52^\circ+51^\circ=51^\circ(4)+52^\circ(3)=204^\circ+156^\circ=360^\circ.$$

La construcción geométrica se realiza entonces eligiendo una circunferencia de un radio determinado con centro en O y usar el transportador sobre el diámetro horizontal. Después, marcar consecutivamente los puntos A, B, C, D, E, F y G según el valor de los ángulos indicados antes, sumados consecutivamente. La intercalación de un ángulo de 52˚ entre dos ángulos de 51˚ (excepto al cerrar el polígono) obedece al hecho de minimizar el error en la longitud de cada lado del eptágono.

$\angle AOB = 51°$
$\angle BOC = 51° + 52° = 103°$
$\angle COD = 103° + 51° = 154°$
$\angle DOE = 154° + 52° = 206°$
$\angle EOF = 206° + 51° = 257°$
$\angle FOG = 257° + 52° = 309°$
$\angle GOA = 309° + 51° = 360°$



Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Construcciones Geométricas (p. 186)

(7) Construir un eneágono regular inscrito en una circunferencia. *Dado que no se dispone de una expresión, exenta de funciones trigonométricas, que permita calcular el lado de un eneágono y ya que no es posible construir exclusivamente con regla y compás este polígono regular puede optarse por el uso del transportador. En este caso, la división de la circunferencia completa de* 360˚ *es exacta ya que* 360˚=9(40˚).

La construcción geométrica se realiza entonces eligiendo una circunferencia de un radio determinado con centro en O y usar el transportador sobre el diámetro horizontal. Después, marcar consecutivamente los puntos A, B, C, D, E, F, G, H e I cada 40˚, *o equivalentemente, ángulos acumulados consecutivamente.*

$\angle AOB = 40°$

$\angle BOC = 40°(2) = 80°$

$\angle COD = 40°(3) = 120°$

$\angle DOE = 40°(4) = 160°$

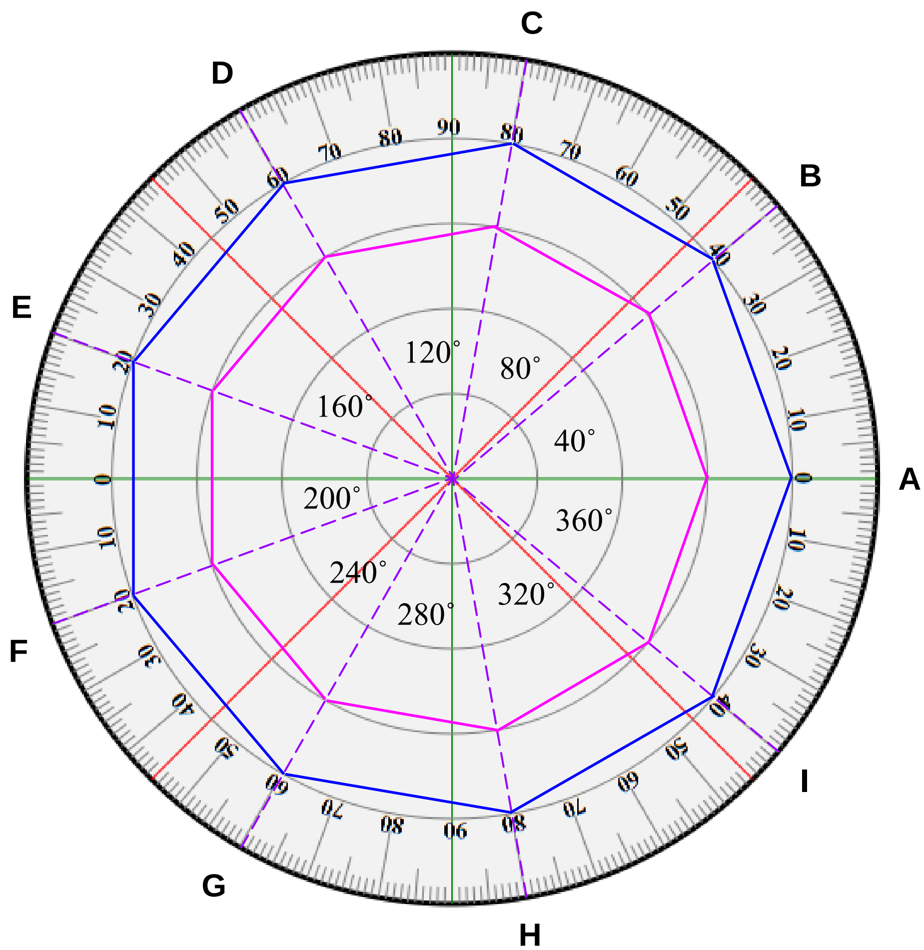
$\angle EOF = 40°(5) = 200°$

$\angle FOG = 40°(6) = 240°$

$\angle GOH = 40°(7) = 280°$

$\angle HOI = 40°(8) = 320°$

$\angle IOA = 40°(9) = 360°$

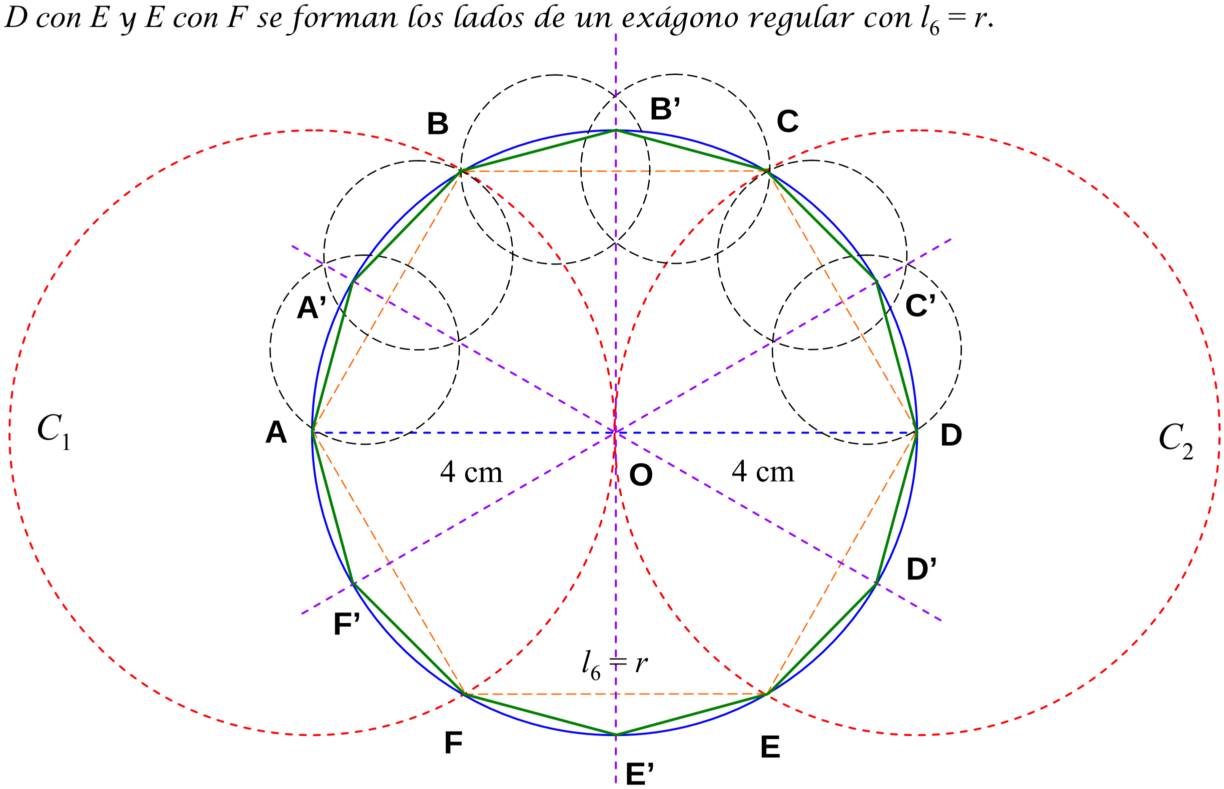


Relaciones métricas en los polígonos regulares

Capítulo 15. Construcciones Geométricas (p. 186)

(9) Construir un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio $r = 4$ cm.

La construcción geométrica se realiza del siguiente modo: con regla se mide el segmento horizontal $AD = 8$ cm *que se toma como un diámetro de la circunferencia circunscrita al dodecágono con centro en O. Colocando el compás en el extremo A se traza la circunferencia* C_1 *(izquierda) de radio* $OA = 4$ cm *y análogamente, en el extremo D se traza la circunferencia* C_2 *(derecha) con el mismo radio,* $OD = 4$ cm. *Ambas circunferencias cortan a la circunferencia circunscrita en B, C, E y F. Uniendo A con B, B con C, C con D, D con E y E con F se forman los lados de un exágono regular con* $l_6 = r$.



Sobre los primeros 3 *lados del exágono auxiliar ABCDEF, se trazan rectas perpendiculares en sus puntos medios usando, por ejemplo, circunferencias de radio mayor a* $l_6/2$; *aquí, se han trazado con un radio de* 2.5 cm *en cada uno de los extremos de los lados AB, BC y CD. De esta forma, cada par de circunferencias cortan los arcos AB, BC y CD respecitvamente en los puntos A', B' y C'. Al prolongar los segmentos A'O, B'O y C'O se obtienen los puntos D', E' y F' que dividen a la mitad los arcos inferiores DE, EF y FA. Finalmente, al unir A con A', A' con B, B con B', B' con C, etc., ... hasta F con F' y F' con A, se obtiene un dodecágono regular AA'BB'CC'DD'EE'FF'. Se comprueba, midiendo con una regla graduada, que AA' mide aproximadamente*

$$2.1 \text{ cm} \approx l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}} = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}\ .$$