Polígonos semejantes. Medida de la circunferencia

Capítulo 16. Ejercicios Resueltos (pp. 200 – 202)

(1) Los lados de dos polígonos están en la relación 2:7. ¿Se puede afirmar que son semejantes? ¿Por qué? *Dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos ordenadamente iguales y sus lados homólogos proporcionales. Como solamente se establece la proporcionalidad de los lados pero no la igualdad de los ángulos, ambos polígonos no son semejantes. Es necesaria la igualdad de los ángulos para que fueran semejantes.*

(3) Dos rectángulos son semejantes. Los anchos respectivos son 16 y 24 metros y el primero tiene 30 m de largo. ¿Cuál es el largo del segundo? *Por hipótesis, al ser ambos rectángulos semejantes entre sí, en particular, los lados homólogos son proporcionales (anchos y largos), es decir si a, a' denotan el ancho y l, l' denotan el largo respectivo en cada rectángulo, entonces se cumple que*

$$\frac{a}{a'} = \frac{l}{l'} \quad \text{substituyendo,} \quad \frac{16}{24} = \frac{30}{l'} \quad \text{de donde} \quad l' = \frac{(24)(30)}{16} = 45 \text{ m.}$$

(5) En una circunferencia de 10 m de diámetro, el lado del polígono regular de 48 lados, inscrito en la misma, mide 1.3 m. Calcular el lado de otro polígono regular del mismo número de lados, inscrito en una circunferencia de 12.5 m de radio. *Por el Teorema 64 (pág. 189), dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes y por el Teorema 65 (pág. 190), la razón de sus lados es igual a la razón de sus radios. Sean r, r' los radios de las circunferencias circunscritas a cada polígono regular de 48 lados, y sean l, l' los lados respectivos del polígono regular inscrito en cada circunferencia. Entonces,*

$$\frac{r}{r'} = \frac{l}{l'} \quad \text{substituyendo,} \quad \frac{(10/2)}{12.5} = \frac{1.3}{l'} \quad \text{entonces} \quad l' = \frac{(12.5)(1.3)}{5} = 3.25 \text{ m.}$$

(7) Hallar la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 9 cm. *Según la fórmula establecida en el Corolario del Art. 259 (pág. 196), la longitud de una circunferencia de radio r está dada por (donde el valor del resultado es dependiente de la precisión, en cifras decimales, empleada para representar al número π):*

$$C = 2\pi r \quad \text{y substituyendo el valor del radio,} \quad C = 2\pi \times 9 = 2\times 3.14 \times 9 = 56.52 \text{ cm.}$$

$$\text{obsérvese que} \quad C = 2\times 3.141 \times 9 = 56.538 \text{ cm} \approx 56.54 \text{ cm.}$$

$$\text{y que} \quad C = 2\times 3.1416 \times 9 = 56.5488 \text{ cm} \approx 56.55 \text{ cm.}$$

Polígonos semejantes. Medida de la circunferencia

Capítulo 16. Ejercicios Resueltos (pp. 200 – 202)

(9) Hallar el radio de una circunferencia cuya longitud es 628 cm. *Según la fórmula establecida en el Corolario del Art. 259 (pág. 196), la longitud de una circunferencia de radio r está dada por (donde el valor del resultado es dependiente de la precisión, en cifras decimales, empleada para representar al número π):*

$C = 2\pi r$ de donde, $r = \dfrac{C}{2\pi}$ y substituyendo, $r = \dfrac{628}{2\times 3.14} = \dfrac{628}{6.28} = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m.}$

obsérvese que $r = \dfrac{628}{2\times 3.141} = \dfrac{628}{6.282} \approx 99.97 \text{ cm.}$

y que $r = \dfrac{628}{2\times 3.1416} = \dfrac{628}{6.2832} \approx 99.95 \text{ cm.}$

(11) Hallar el radio de una circunferencia cuya longitud es igual a la suma de las longitudes de dos circunferencias cuyos radios miden 6 m y 12 m. *Aplicando la fórmula establecida en el Corolario del Art. 259 (pág. 196) para la longitud de una circunferencia de radio r se tiene que*

$C = C_1 + C_2 = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi(r_1 + r_2) = 2\pi r$ de donde $r = r_1 + r_2 = 6 + 12 = 18$ m.

(13) Hallar la longitud de una circunferencia inscrita en un cuadrado de 20 cm de lado. *Como se trata de una circunferencia inscrita entonces es tangente en los puntos medios de los lados del cuadrado circunscrito. Así, el valor del radio es la mitad del lado dado. Consecuentemente, aplicando la fórmula establecida en el Corolario del Art. 259 (pág. 196) para la longitud de una circunferencia de radio r se obtiene*

$$C = 2\pi r = 2\pi \times \frac{20}{2} = 2\times 3.14\times 10 = 6.28\times 10 = 62.8 \text{ cm.}$$

(15) Hallar la longitud de un arco cuya amplitud es de 30°, que pertenece a una circunferencia de 10 cm de diámetro. *Aplicando la fórmula establecida en el Art. 261 (pág. 197) para la longitud de un arco de circunferencia de n°, se obtiene (usando* $\pi \sim 3.14$*)*

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi(10/2)(30^\circ)}{180^\circ} = \frac{5}{6}\pi \text{ cm} \approx 2.62 \text{ cm.}$$

Polígonos semejantes. Medida de la circunferencia

Capítulo 16. Ejercicios Resueltos (pp. 200 – 202)

(17) Calcular el radio de un arco cuya amplitud es de 20˚, si su longitud es de 2.79 cm. *Aplicando la fórmula establecida en el Art. 261 (pág. 197) para la longitud de un arco de circunferencia de n˚, resulta que (aproximación de* $\pi \sim 3.1416$*)*

de $l = \dfrac{\pi r n^\circ}{180^\circ}$ se sigue que $r = \dfrac{180^\circ l}{\pi n^\circ}$ y substituyendo,

$$r = \frac{180^\circ \times 2.79}{\pi(20^\circ)} = \frac{9 \times 2.79}{3.1416} = 7.993 \approx 8 \text{ cm.}$$

(19) Hallar la longitud de un arco de 5˚ 2' 8" que pertenece a una circunferencia de 2 m de radio. *Primero se convierte el arco sexagesimal a decimal y luego se aplica la fórmula establecida en el Art. 261 (pág. 197) para la longitud de un arco de circunferencia de n˚, de la cual se obtiene (aproximación de* $\pi \sim 3.1416$*)*

arco sexagesimal $n^\circ = 5^\circ 2' 8''$; su equivalente decimal es $n^\circ = 5^\circ + \dfrac{2'}{60'/^\circ} + \dfrac{8''}{3600''/^\circ} = 5.035^\circ$

entonces, $l = \dfrac{\pi \times 2 \times 5.035^\circ}{180^\circ} = \dfrac{3.1416 \times 2 \times 5.035^\circ}{180^\circ} = 0.176 \text{ m} \dfrac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \approx 17.6 \text{ cm.}$

(21) Hallar el perímetro del segmento circular limitado por el lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de 3 cm de radio. *El perímetro del segmento circular limitado por el lado del cuadrado inscrito a una circunferencia es la suma de la longitud del lado supuesto y la longitud del arco de circunferencia subtendido por el ángulo central del cuadrado inscrito. De esta manera se obtiene (aproximando* $\sqrt{2}$ como 1.41 y π como 3.14*)*

$$P_{\text{segmento circular}} = l_{\text{lado cuadrado inscrito}} + l_{\text{arco subtendido}} = r\sqrt{2} + \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ}, \text{ substituyendo}$$

$$P_{\text{segmento circular}} = 3\sqrt{2} + \frac{\pi \times 3 \times 90^\circ}{180^\circ} = 3\sqrt{2} + \frac{3}{2}\pi = 3 \times 1.41 + 1.5 \times 3.14 = 8.94 \text{ cm.}$$

Polígonos semejantes. Medida de la circunferencia

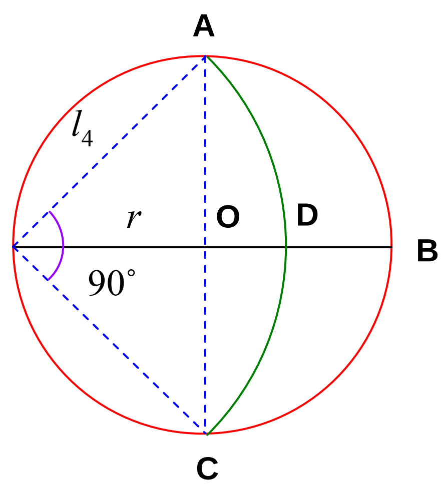
Capítulo 16. Ejercicios Resueltos (pp. 200 – 202)

(23) La longitud de un arco que pertenece a una circunferencia de 4 m de radio, es igual a la longitud de un arco que pertenece a una circunferencia de 10 m de radio. Si el primer arco es de 36˚, ¿cuántos grados tiene el segundo arco? *Aplicando a cada circunferencia, la fórmula establecida en el Art. 261 (pág. 197) para la longitud de un arco de ellas, se tiene que*

en la 1era circunferencia, $l = \dfrac{\pi \times 4 \times 36^\circ}{180^\circ}$; en la 2da circunferencia, $l' = \dfrac{\pi \times 10 \times n^\circ}{180^\circ}$

por hipótesis, $l = l'$ entonces $\dfrac{\pi \times 4 \times 36^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\pi \times 10 \times n^\circ}{180^\circ} \therefore\ n^\circ = \dfrac{2}{5}(36^\circ) = 14.4^\circ = 14^\circ 24'$

(25) Si el radio de la circunferencia O es r, ¿cuál es el perímetro de la "lúnula" $ABCD$? *El perímetro de la lúnula ABCD es la suma de la longitud de la semicircunferencia ABC y la longitud del arco de circunferencia ADC subtendido por el ángulo central (90˚) del cuadrado inscrito. Para esta segunda longitud de arco resulta claro, de la figura adjunta, que el radio correspondiente a la circunferencia de la cual ADC es parte tiene por radio el lado del cuadrado inscrito en O, es decir,* l_4.



$$\begin{aligned} P_{\text{lúnula}} &= l_{\text{semicircunferencia ABC}} + l_{\text{arco ADC}} \\ &= \frac{2\pi r}{2} + \frac{\pi l_4 \times 90^\circ}{180^\circ} \\ &= \pi r + \frac{\pi r\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\pi r\,. \end{aligned}$$